

Schnittpunkt zweier Geraden

Autor(en): **Bertschmann, S.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières**

Band (Jahr): **38 (1940)**

Heft 1

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-198508>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SCHWEIZERISCHE
Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik

ORGAN DES SCHWEIZ. GEOMETERVEREINS

Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Kulturtechnik / Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

ORGANE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES GÉOMÈTRES

Organe officiel de l'Association Suisse du Génie rural / Organe officiel de la Société Suisse de Photogrammétrie

Redaktion: Dr. h. c. C. F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)

Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats

Expedition, Inseraten- und Abonnements-Annahme:

BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR A.G., WINTERTHUR

<p style="text-align: center;">No. 1 • XXXVIII. Jahrgang der „Schweizerischen Geometer-Zeitung“ Erscheinend am zweiten Dienstag jeden Monats 9. Januar 1940 Inserate: 50 Cts. per einspaltige Nonp.-Zeile</p>	<p style="text-align: center;">Abonnemente: Schweiz Fr. 12. —, Ausland Fr. 16. — jährlich Für Mitglieder der Schweiz. Gesellschaften für Kulturtechnik u. Photogrammetrie Fr. 9. — jährl. Unentgeltlich für Mitglieder des Schweiz. Geometervereins</p>
---	--

Schnittpunkt zweier Geraden.

Von *S. Bertschmann.*

Das Problem des Schnittpunktes zweier durch je zwei Koordinatenpaare gegebener Geraden ist mathematisch sehr einfacher Natur. Und dennoch ist es in der Vermessungsliteratur vielfach behandelt worden im Suchen nach einer möglichst bequemen Rechnungsform für verschiedene Rechenhilfsmittel. Dabei finden sich Hinweise darauf, daß der Rechnungsgang nach der hergeleiteten Formel rascher zum Ziele führe als derjenige nach anderen Formeln, ohne daß aber eine Vergleichsbasis gegeben wird. Das ist auch nicht so einfach, wie es auf den ersten Blick erscheinen mag. Denn für den Entscheid, welcher Formel wir den Vorzug geben sollen, sind verschiedene Faktoren maßgebend. Neben dem Zeitaufwand für die verschiedenen Rechenoperationen ist in Berücksichtigung zu ziehen, ob die Formel sich ohne besondere Gedächtnishilfen anwenden läßt und weiter, ob die Kontrolle der Rechnung leicht durchzuführen ist. Zur Ermittlung des Zeitaufwandes ist es notwendig, für jedes Rechenhilfsmittel eine Analyse der Formel nach ihren einzelnen Rechenoperationen und ihres Zeitverbrauches, gleichsam eine Punktierung vorzunehmen. Das gleiche gilt für die Kontrollrechnung; während die Beurteilung, ob eine Formel leicht anwendbar ist, schon subjektiverer Natur ist. Wenn im folgenden eine neue Berechnungsart für Maschinenrechnen entwickelt wird, so sollen auch noch Vergleichsgrundlagen gegeben werden. Angeregt wurde die kleine Arbeit durch eine Abhandlung von Katasterdirektor Mittelstaedt in der deutschen Zeitschrift für Vermessungswesen 1931. Der dort entwickelte Gedankengang wird weitergeführt und gezeigt,

daß ohne den Umweg über s_1 und s_2 und das Einrechnen von Punkten in eine Gerade die Koordinaten des Schnittpunktes S direkt aus Flächenproportionen erhalten werden können.

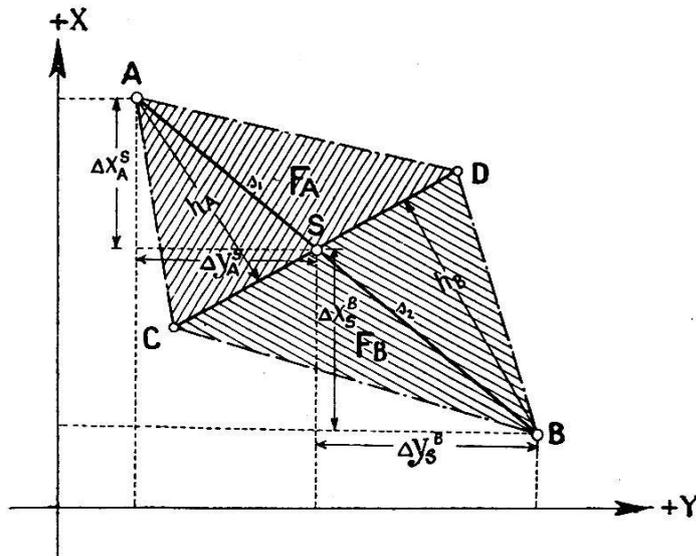


Fig. 1.

Verbindet man die gegebenen Koordinatenpunkte der beiden sich schneidenden Geraden \overline{AB} und \overline{CD} , so entsteht ein Viereck, in welchem die Geraden Diagonalen sind und dessen doppelte Fläche F sei. Die Diagonalen sind gemeinschaftliche Grundlinien je zweier Dreiecke, deren doppelte Fläche nach dem dritten sie bestimmenden Punkt mit F_C , F_D bzw. F_A , F_B bezeichnet seien. Aus der Figur 1 lassen sich alsdann folgende Beziehungen herleiten:

$$\frac{F_A}{F_B} = \frac{h_A}{h_B} = \frac{s_1}{s_2} = \frac{\Delta y_A^S}{\Delta y_B^S} = \frac{\Delta x_A^S}{\Delta x_B^S} \quad (1)$$

$$\Delta y_B^S = \Delta y_A^B - \Delta y_A^S; \quad \Delta x_B^S = \Delta x_A^B - \Delta x_A^S \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$\frac{F_A}{F_B} = \frac{\Delta y_A^S}{\Delta y_A^B - \Delta y_A^S} = \frac{\Delta x_A^S}{\Delta x_A^B - \Delta x_A^S} \quad \text{und}$$

$$\left| \begin{array}{l} \Delta y_A^S = \frac{F_A}{F_A + F_B} \cdot \Delta y_A^B = \frac{F_A}{F} \cdot \Delta y_A^B \\ \Delta x_A^S = \frac{F_A}{F_A + F_B} \cdot \Delta x_A^B = \frac{F_A}{F} \cdot \Delta x_A^B \\ y_S = y_A + \Delta y_A^S \quad \quad \quad x_S = x_A + \Delta x_A^S \end{array} \right. \quad (3)$$

Analog finden wir, wenn von Punkt B aus operiert werden will:

$$\Delta y_B^S = \frac{F_B}{F} \cdot \Delta y_B^A \quad \Delta x_B^S = \frac{F_B}{F} \Delta x_B^A \quad (4)$$

wobei die Kontrolle nach (2) besteht. Wird von der Diagonale \overline{AB} als Dreiecksbasis ausgegangen, so finden wir

$$\Delta y_C^S = \frac{F_C}{F} \cdot \Delta y_C^D \quad \Delta x_C^S = \frac{F_C}{F} \Delta x_C^D \quad (5)$$

$$\Delta y_D^S = \frac{F_D}{F} \cdot \Delta y_D^C \quad \Delta x_D^S = \frac{F_D}{F} \cdot \Delta x_D^C \quad (6)$$

Die Formeln (4) bis (6) liefern Rechenproben im Übermaß.

Die übliche, auf analytischem Wege unter Benützung der Richtungskoeffizienten der sich schneidenden Geraden hergeleitete Formel läßt sich durch entsprechende Gruppierung der Produkte und Quotienten leicht in die vorstehend hergeleiteten Formeln überführen.

Es handelt sich bei den neuen Formeln hauptsächlich um die Berechnung des Flächeninhaltes von Dreiecken und Vierecken aus den Koordinaten der Eckpunkte. Wer selten Schnittpunkte zu rechnen hat, wird die Flächen am zweckmäßigsten nach den ihm geläufigen Gauß'schen Flächenformeln: doppelte Fläche

$$F = \pm \Sigma y_n (x_{n+1} - x_{n-1}) = \Sigma x_n (y_{n+1} - y_{n-1})$$

ermitteln. Rascher führt der Rechnungsansatz in Determinantenform zum Ziele, weil er in nur zwei Glieder umgesetzt werden kann. Es läßt sich leicht aus der Gauß'schen Flächenformel herleiten, daß für den Spezialfall des *Vierecks* die Formel für den doppelten Flächeninhalt ohne Rücksicht auf das Vorzeichen übergeht in

$$F = (y_B - y_A) (x_D - x_C) - (x_B - x_A) (y_D - y_C)$$

oder, in Determinantenform geschrieben

$$F = \begin{vmatrix} (y_B - y_A) & (y_D - y_C) \\ (x_B - x_A) & (x_D - x_C) \end{vmatrix}$$

Für das Dreieck beispielsweise F_C ist der doppelte Flächeninhalt

$$F_C = \begin{vmatrix} (y_C - y_A) & (x_C - x_A) \\ (y_B - y_C) & (x_B - x_C) \end{vmatrix}$$

Es sind diejenigen Formen der Determinanten gewählt, welche sich leicht aus der Anschrift der die Geraden bestimmenden Koordinaten und in Anlehnung an die übliche Rechenpraxis, d. h. die Bildung der Koordinatendifferenzen von P_2-P_1 ergeben. Außer dem in Figur 1

dargestellten Fall sind noch weitere Schnittmöglichkeiten zu berücksichtigen; es läßt sich aber leicht zeigen, daß die angegebenen Formeln allgemeine Gültigkeit haben. Ebenso lassen sich die Aufgaben, vom Punkt B eine Senkrechte auf \overline{AC} zu fällen oder durch B eine Parallele zu \overline{AC} zu legen und diese beispielsweise mit \overline{DC} zum Schnitt zu bringen, leicht lösen.

Numerische Beispiele.

Folgendes Rechenschema prägt sich leicht ein und liefert unmittelbar die Determinanten für die Flächen. Die Punktfolge im Koordinatenverzeichnis ergibt sich aus der Anschrift der Schnittgeraden, indem zuerst die erste und anschließend die zweite Kolonne hingeschrieben werden. Beim ersten Beispiel wird der Rechnungsgang ausführlich dargestellt, bei den folgenden Beispielen wird die besondere Anschrift der Determinanten unterlassen, da sie direkt aus dem Koordinatenschema in die Rechenmaschine genommen werden können. Auch werden die Rechenoperationen auf das Notwendige beschränkt.

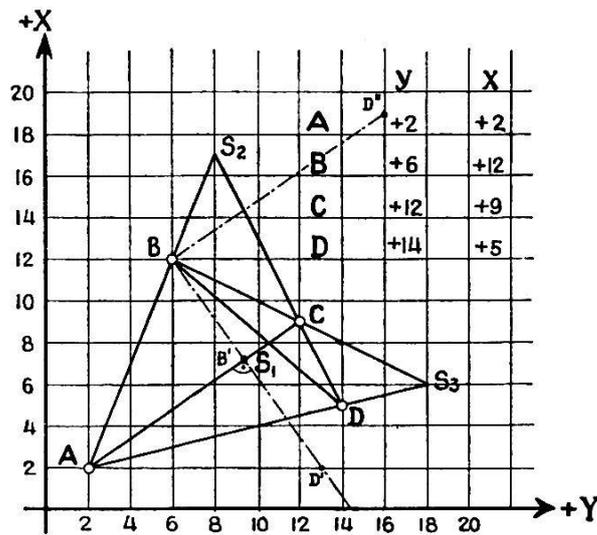


Fig. 2.

Schnitt AC mit BD		y	Δy	Δx	x
A		+ 2	$(y_B - y_A)$	$(x_B - x_A)$	+ 2
	$(y_C - y_A)$		+ 4	+ 10	$(x_C - x_A)$
B	+ 10	+ 6	$(y_C - y_B)$	$(x_C - x_B)$	+ 12
	$(y_D - y_B)$		+ 6	- 3	$(x_D - x_B)$
C	+ 8	+ 12	$(y_D - y_C)$	$(x_D - x_C)$	+ 9
			+ 2	- 4	
D		+ 14	$(y_A - y_D)$	$(x_A - x_D)$	+ 5
			- 12	- 3	
A		+ 2			+ 2
	Kontrolle		+ 12	+ 10	
			- 12	- 10	

Es ist:

$$F_B = \begin{vmatrix} (y_B - y_A) & (x_B - x_A) \\ (y_C - y_B) & (x_C - x_B) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} + 4 & + 10 \\ + 6 & - 3 \end{vmatrix} = -12 - (+60) = - 72$$

$$F_D = \begin{vmatrix} (y_D - y_C) & (x_D - x_C) \\ (y_A - y_D) & (x_A - x_D) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} + 2 & - 4 \\ -12 & - 3 \end{vmatrix} = - 6 - (+48) = - 54$$

$$F = \begin{vmatrix} (y_C - y_A) & (x_C - x_A) \\ (y_D - y_B) & (x_D - x_B) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} + 10 & + 7 \\ + 8 & - 7 \end{vmatrix} = -70 - (+56) = -126$$

$$F_A = \begin{vmatrix} (y_B - y_A) & (x_B - x_A) \\ (y_A - y_D) & (x_A - x_D) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12 & - 3 \\ + 4 & + 10 \end{vmatrix} = -120 - (-12) = -108$$

$$F_C = \begin{vmatrix} (y_C - y_B) & (x_C - x_B) \\ (y_D - y_C) & (x_D - x_C) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} + 6 & - 3 \\ + 2 & - 4 \end{vmatrix} = - 24 - (- 6) = - 18$$

$$F_A + F_C = F = -108 - 18 = -126$$

$$F_B + F_D = F = -72 - 54 = -126$$

$$\Delta y_A^S = \frac{F_A}{F} \cdot \Delta y_A^C = \frac{-108}{-126} \cdot +10 = +8.6 \quad \underline{y_{S1}} = y_A + \Delta y_A^S = +2 + 8.6 = \underline{+10.6}$$

$$\Delta x_A^S = \frac{F_A}{F} \cdot \Delta x_A^C = \frac{-108}{-126} \cdot + 7 = +6.0 \quad \underline{x_{S1}} = x_A + \Delta x_A^S = +2 + 6.0 = \underline{+ 8.0}$$

Probe:

$$\Delta y_B^S = \frac{F_B}{F} \cdot \Delta y_B^D = \frac{-72}{-126} \cdot +8 = +4.6 \quad \underline{y_{S1}} = y_B + \Delta y_B^S = +6 + 4.6 = +10.6$$

$$\Delta x_B^S = \frac{F_B}{F} \cdot \Delta x_B^D = \frac{-72}{-126} \cdot -7 = -4.0 \quad \underline{x_{S1}} = x_B + \Delta x_B^S = +12 - 4.0 = + 8.0$$

Probe für $\frac{F_A}{F}$ und $\frac{F_B}{F}$: $\frac{F_A}{F} + \frac{F_C}{F} = \frac{F}{F} = 1$; $\frac{F_B}{F} + \frac{F_D}{F} = \frac{F}{F} = 1$

Schnitt BA

mit CD

		y		x	
B		+ 6		+12	
			+ 6	-3	
C	-4	+12		+ 9	-10
			-10	-7	
A	+2	+ 2		+ 2	- 4
			+12	+3	
D		+14		+ 5	

$$F_C = -72$$

$$F = +36$$

$$F_A = +54$$

$$\underline{\Delta y_{S_2}} = +12 + \frac{-72}{+36} \cdot +2 = +12 - 4 = \underline{+8}$$

$$\underline{\Delta x_{S_2}} = +9 + \frac{-72}{36} \cdot -4 = +9 + 8 = \underline{+17}$$

Kontrolle:

$$\Delta y_{S_2} = +2 + \frac{+54}{+36} \cdot +4 = +2 + 6 = +8$$

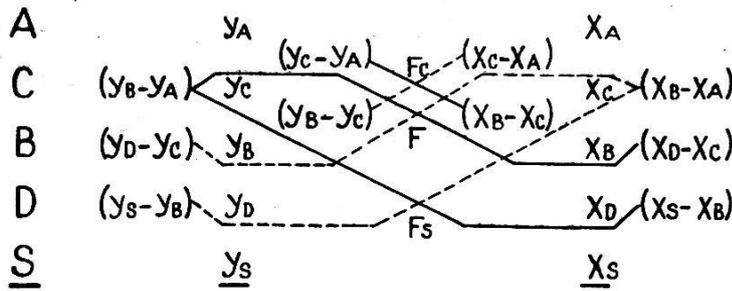
$$\Delta x_{S_2} = +2 + \frac{+54}{+36} \cdot +10 = +2 + 15 = +17$$

Bei Verwendung der Rechenmaschine „Madas, Triplex Vollautomat, Modell 20 AT“ läßt sich die Schnittpunktberechnung, nachdem die Koordinatendifferenzen gebildet sind, bis zu den Endkoordinatenwerten von S durchführen, ohne daß ein Zwischenresultat aufnotiert werden muß. Der Rechnungsgang ist dabei folgender: F bilden mit gleichgeschaltetem Resultat- und Speicherwerk, Hebel Y auf I + IV. F in IV belassen, Hebel Y auf I, Resultat in I löschen und F_C bilden. F_C in Tastatur einstellen, I löschen und mit Taste Z wieder in I erscheinen lassen. Aus IV F in Tastatur einstellen und automatische Division ausführen. Resultat in Tastatur nehmen, in Multiplikatorreihe transferieren und mit Knopf H festhalten. y_C -Koordinate mit Nippel in I einstellen, Differenz $y_D - y_C$ in Tastatur einstellen und Multiplikation ausführen; Resultat y_S aufnotieren. I löschen, x_C -Koordinate mit Nippel in I einstellen, Differenz $x_D - x_C$ in Tastatur einstellen und Multiplikation ausführen; Resultat x_S aufnotieren.

Für die Bewertung des Zeitaufwandes für die einzelnen Rechenoperationen sind folgende Punktzahlen festgestellt worden:

1. Einstellen einer 5stelligen Zahl im Resultatwerk mit Nippel 12 P.
2. Einstellen einer 5stelligen Zahl im Tastaturwerk 7 P.
3. Einstellen einer 5stelligen Zahl im Kontrollwerk 12 P.
4. Multiplikation zweier 5stelliger Zahlen, Einstellen inbegriffen 17 P.
5. Division zweier 5stelliger Zahlen, Einstellen inbegriffen . . 26 P.
6. Bildung der Koordinatendifferenzen mit der Maschine und Resultatnotierung 24 P.
7. Bildung der Koordinatendifferenzen durch Kopfrechnen und Resultatnotierung 8 P.
8. Aufnotieren einer 5stelligen Zahl 8 P.
9. Aufnotieren einer 10stelligen Zahl 16 P.

An Hand dieser Punktzahlen erkennen wir, daß die Kontrollrechnung für die Schnittpunktkoordinaten zweckmäßigerweise nicht über eine zweite Flächenproportion ausgeführt wird. Es ist vorteilhafter, die aus der ersten Flächenproportion erhaltenen Koordinaten für S im Rechenschema aufzuschreiben, beispielsweise:



$$y_S = y_C + \frac{F_C}{F} (y_D - y_C) \qquad x_S = x_C + \frac{F_C}{F} (x_D - x_C)$$

Kontrolle: $F_S = 0$

und $y_S - y_B$ und $x_S - x_B$ zu bilden. F_S ist alsdann

$$\begin{vmatrix} (y_B - y_A) & (x_B - x_A) \\ (y_S - y_B) & (x_S - x_B) \end{vmatrix} = 0$$

bei fehlerfreier Bestimmung von y_S und x_S . F_S wird wegen der Auf- oder Abrundungsfehler in y_S und x_S nicht genau Null werden; die zu tolerierende Abweichung läßt sich aber leicht abschätzen durch überschlägige Multiplikation der Summe $(y_B - y_A) + (x_B - x_A)$ mit dem maximalen Auf- oder Abrundungsfehler.

Es sei noch kurz auf die Aufgabe zurückgekommen, vom Punkt B eine Senkrechte auf \overline{AC} zu fällen. Die Koordinatenpaare werden in nachstehender Reihenfolge hingeschrieben und die Koordinatendifferenzen gebildet:

	y		x		
A	+ 2			+ 2	
		+4	+10		
B	+10	+ 6		+12	+7
		+6	- 3		
C	+12			+ 9	
D'					

Die Koordinaten von D' , eines ebenfalls auf der Senkrechten liegenden Punktes, werden erhalten durch Addition von

$$y_B + (x_C - x_A) = + 6 + 7 = +13 = y_{D'} \quad \text{und}$$

$$x_B - (y_C - y_A) = +12 - 10 = + 2 = x_{D'} \quad \text{oder auch}$$

$$y_{D'} = y_B - (x_C - x_A), \quad x_{D'} = x_B + (y_C - y_A)$$

Soll durch B eine Parallele zu \overline{AC} gelegt werden und diese mit einer weiteren Geraden zum Schnitt gebracht werden, so bildet man die Koordinaten von D''

$$y_{D''} = y_B \pm (y_C - y_A) \quad \text{In beiden Ausdrücken ist das Zeichen +}$$

$$x_{D''} = x_B \pm (x_C - x_A) \quad \text{oder dann - anzuwenden.}$$