Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 43 (1945)

Heft: 8

Artikel: Les calculs de compensation et le contrôle des poids

Autor: Ansermet, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-202950

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Les calculs de compensation et le contrôle des poids

Par *A. Ansermet.*

Les calculs de compensation nécessitent de nombreux contrôles portant notamment sur l'expression $[pvv]$ qui doit être rendue minimum. Les v sont les résidus

$$l_i + v_i = f_i\,(xyz\ldots) \qquad i = 1, 2 \ldots n$$

et les p les poids respectifs des quantités mesurées l_i. Il y a n observations, u inconnues $(xyz\ldots)$ et $n - u = r$ observations en excédent. Dans certains problèmes il est opportun d'éliminer les inconnues; les résidus v seuls subsistent dans un système de r équations.

Après compensation les expressions $(l_i + v_i)$ sont affectées de poids P_i $(i = 1, 2 \ldots n)$ dont le calcul est souvent demandé. Un contrôle est donc utile; or une relation très simple existe entre les valeurs p_i et P_i:

la somme des quotients $p_i : P_i$ est égale au nombre des inconnues

$$\left[p_i : P_i\right]_1^n = u = n - r$$

Cette valeur est un extrêmum valable lorsqu'on applique le principe $[pvv] = \min$. La démonstration est aisée; considérons le système

$$l_i + v_i = a_i x + b_i y + c_i z \qquad (u = 3)$$

$$P_i = \text{poids de } (a_i x + b_i y + c_i z)$$

et appliquons les formules aux coefficients de poids

$$\frac{1}{P_i} = a_i^2 \left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] + b_i^2 \left[\frac{\beta\beta}{p}\right] + c_i^2 \left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right] + 2\, a_i\, b_i \left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] + \\ + 2 a_i\, c_i \left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right] + 2\, b_i\, c_i \left[\frac{\beta\gamma}{p}\right]$$

$$\left[p_i : P_i\right]_1^n = [paa] \left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] + [pab] \left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] + [pac] \left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right] \\ + [pab] \left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] + [pbb] \left[\frac{\beta\beta}{p}\right] + [pbc] \left[\frac{\beta\gamma}{p}\right] \\ + [pac] \left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right] + [pbc] \left[\frac{\beta\gamma}{p}\right] + [pcc] \left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right] = 1 + 1 + 1 = u = 3$$

on peut aussi appliquer la forme sans coefficients de poids

$$\frac{1}{P_i} = \frac{F_1^2}{[paa]} + \frac{[F_2 \cdot 1]^2}{[pbb \cdot 1]} + \frac{[F_3 \cdot 2]^2}{[pcc \cdot 2]} \cdots$$

où $\quad F_1 = a_i \qquad [F_2 \cdot 1] = b_i - \dfrac{[pab]}{[paa]}\, a_i \qquad$ etc. . . .

S'il s'agit d'observations conditionelles le calcul est analogue. Considérons le système

$$\begin{array}{l} a_1 v_1 + a_2 v_2 \ldots + a_n v_n + w_1 = 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 \ldots + b_n v_n + w_2 = 0 \\ c_1 v_1 + c_2 v_2 \ldots + c_n v_n + w_3 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

où $w_1\ w_2\ w_3 \ldots$ sont les discordances fonctions de $l_1\ l_2 \ldots l_n$. Le poids P_i de $(l_i + v_i)$ est donné par

$$\frac{1}{P_i} = \frac{1}{p_i} - \frac{\left(\frac{a_i}{p_i}\right)^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - \frac{\left[\frac{b_i}{p_i}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]} - \frac{\left[\frac{c_i}{p_i}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]} \ldots.$$

où

$$\left[\frac{b_i}{p_i}\cdot 1\right] = \frac{b_i}{p_i} - \frac{\left[\frac{ab}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\frac{a_i}{p_i} \qquad \left[\frac{c_i}{p_i}\cdot 2\right] = \left[\frac{c_i}{p_i}\cdot 1\right] - \frac{\left[\frac{bc}{p}\cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}\left[\frac{b_i}{p_i}\cdot 1\right]$$

$$\frac{p_i}{P_i} = 1 - p_i\frac{\left(\frac{a_i}{p_i}\right)^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - p_i\frac{\left[\frac{b_i}{p_i}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]} - p_i\frac{\left[\frac{c_i}{p_i}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]} \ldots.$$

et on vérifie sans peine que $\left[\frac{p_i}{P_i}\right]_1^n = n - 1 - 1 - 1 \ldots = n - r = u$

on peut aussi avoir recours aux cœfficients $Q_{11}\ Q_{12}\ Q_{13}\ Q_{22} \ldots$ qui sont à la base de la résolution indeterminée des équations normales (calcul des $K_1\ K_2\ K_3 \ldots$ en fonction de $w_1\ w_2\ w_3 \ldots$)

$$\frac{1}{P_i} = \frac{1}{p_i} - \frac{a_i}{p_i}L_1 - \frac{b_i}{p_i}L_2 - \frac{c_i}{p_i}L_3 \ldots. \qquad \text{([2] p. 62–66)}$$

ou

$$L_1 = \frac{a_i}{p_i}Q_{11} + \frac{b_i}{p_i}Q_{12} + \frac{c_i}{p_i}Q_{13} \ldots.$$

$$L_2 = \frac{a_i}{p_i}Q_{21} + \frac{b_i}{p_i}Q_{22} + \frac{c_i}{p_i}Q_{23} \ldots.$$

$$L_3 = \frac{a_i}{p_i}Q_{31} + \frac{b_i}{p_i}Q_{32} + \frac{c_i}{p_i}Q_{33} \ldots. \text{ d'où l'on déduit}$$

$$\left[\frac{p_i}{P_i}\right]_1^n =$$

$$= n - \left(\left[\frac{aa}{p}\right]Q_{11} + \left[\frac{bb}{p}\right]Q_{22} + \left[\frac{cc}{p}\right]Q_{33} + 2\left[\frac{ab}{p}\right]Q_{12} + 2\left[\frac{ac}{p}\right]Q_{13} + 2\left[\frac{bc}{p}\right]Q_{23}\right)$$

pour $r = 3$

$$\left[p_i : P_i\right]_1^n = n - r = u$$

Applications.

1° *Méthode des combinaisons binaires* (ou de Schreiber)

$$n = \frac{s(s-1)}{2} \qquad u = s - 1 \qquad r = \frac{(s-1)(s-2)}{2}$$

(s visées mesurées)

$$p_i = 1 \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

Il faut distinguer, après compensation, les poids P_i au nombre de $(s-1)$ et P'_i au nombre de $\frac{(s-1)(s-2)}{2}$

$$\left[\frac{1}{P_i}\right]_1^n = (s-1)\left(\frac{1}{P_i}\right) + \frac{(s-1)(s-2)}{2}\left(\frac{1}{P'_i}\right) = u = s - 1$$

relation verifiée pour $\frac{1}{P_i} = \frac{1}{P'_i} = \frac{2}{s}$

2° *Nivellement.* Considérons le réseau compensé par M. Ad. Hunziker dans cette Revue (novembre 1944) comprenant 4 repères et 16 lignes ($u = 4$, $n = 16$):

$$\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] = 0.336; \quad \left[\frac{\beta\beta}{p}\right] = 0.347; \quad \left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right] = 0.273; \quad \left[\frac{\delta\delta}{p}\right] = 0.257;$$

$$\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] = +0.075; \quad \left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right] = +0.016; \quad \left[\frac{\alpha\delta}{p}\right] = +0.017; \quad \left[\frac{\beta\gamma}{p}\right] = +0.072;$$

$$\left[\frac{\beta\delta}{p}\right] = +0.078; \quad \left[\frac{\gamma\delta}{p}\right] = +0.096.$$

	$1 : P_i =$	p_i	$p_i : P_i =$
1	0.336	1.25	0.42
2	0.336	0.67	0.23
3	$0.336 + 0.347 - 2 \times 0.075 = 0.530$	0.67	0.35
4	0.336	0.53	0.18
5	0.347	0.62	0.22
6	0.347	0.36	0.13
7	$0.347 + 0.273 - 2 \times 0.072 = 0.476$	0.59	0.28
8	$0.347 + 0.257 - 2 \times 0.078 = 0.450$	0.72	0.32
9	0.347	0.33	0.12
10	0.273	0.67	0.18
11	0.273	0.62	0.17
12	0.273	1.00	0.27
13	$0.273 + 0.257 - 2 \times 0.096 = 0{,}338$	1.43	0.48
14	0.257	1.25	0.32
15	0.257	0.77	0.20
16	0.257	0.46	0.12
		$\left[p_i : P_i\right]_1^n$	$= 3.99$

(exactement 4.00)

La valeur moyenne du rapport $p_i : P_i = \frac{4}{16} = 0.25$. Ce quotient, dans les cas particulier, varie entre des limites relativement étendues et l'examen de ces résultats est intéressant (limites 0.12 et 0.48)

3⁰ *Compensation d'une station.* Considérons l'exemple traité par R. Helmert ([1], p. 159).

$$
\begin{array}{llllll}
v_1 = l_1 & & & + z & \text{poids} = 9 & \\
v_2 = l_2 & & & + t & \text{»} \quad 8 & n = 8 \\
v_3 = l_3 & & & - z + t & \text{»} \quad 7 & u = 4 \\
v_4 = l_4 & & - y & + t & \text{»} \quad 2 & r = 4 = n - u \\
v_5 = l_5 & & + y & & \text{»} \quad 2 & \\
v_6 = l_6 & - x & & + z & \text{»} \quad 4 & \\
v_7 = l_7 & + x & & & \text{»} \quad 6 & \\
v_8 = l_8 & - x & + y & & \text{»} \quad 2 &
\end{array}
$$

éliminons les 4 inconnues

$$
\begin{array}{l}
+ v_1 - v_2 + v_3 + w_1 = 0 \\
- v_2 + v_4 + v_5 + w_2 = 0 \\
- v_1 + v_6 + v_7 + w_3 = 0 \\
- v_5 + v_7 + v_8 + w_4 = 0
\end{array}
$$

$$\left[\frac{aa}{p}\right] = 0.379, \quad \left[\frac{bb}{p}\right] = 1.125, \quad \left[\frac{cc}{p}\right] = 0.528, \quad \left[\frac{dd}{p}\right] = 1.167,$$

$$\left[\frac{ab}{p}\right] = + 0.125, \quad \left[\frac{ac}{p}\right] = - 0.111, \quad \left[\frac{ad}{p}\right] = \left[\frac{bc}{p}\right] = 0, \quad \left[\frac{bd}{p}\right] = - 0.500,$$

$$\left[\frac{cd}{p}\right] = + 0.167, \quad \left[\frac{bb}{p} \cdot 1\right] = 1.084, \quad \left[\frac{bc}{p} \cdot 1\right] = + 0.037,$$

$$\left[\frac{bd}{p} \cdot 1\right] = - 0.500, \quad \left[\frac{cc}{p} \cdot 2\right] = 0.495, \quad \left[\frac{cd}{p} \cdot 2\right] = + 0.184,$$

$$\left[\frac{dd}{p} \cdot 2\right] = 0.936, \quad \left[\frac{dd}{p} \cdot 3\right] = 0.868$$

$$p_i : P_i = 1 - p_i \frac{\left(\frac{a_i}{p_i}\right)^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - p_i \frac{\left[\frac{b_i}{p_i} \cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p} \cdot 1\right]} - p_i \frac{\left[\frac{c_i}{p_i} \cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p} \cdot 2\right]} - p_i \frac{\left[\frac{d_i}{p_i} \cdot 3\right]^2}{\left[\frac{dd}{p} \cdot 3\right]} \cdots$$

La valeur moyenne $p_i : P_i = 0.5$; les limites pour ce quotient sont ici 0.593 et 0.379. Ce sont encore les poids faibles qui sont amplifiés dans la proportion la plus forte. Les discordances w_1, w_2, w_3, w_4 ne jouent bien entendu aucun rôle dans ce calcul; leur valeur numérique ainsi que celle des termes absolues l_1, l_2 ... l_8 n'est donc pas donnée.

$i = 1$	$p_i : P_i$	$= 1$	$- 0.293$	$- 0.012$	$- 0.111$	$- 0.001$	$= 0.583$
2	»	$= 1$	$- 0.330$	$- 0.052$	$- 0.018$	$- 0.007$	$= 0.593$
3	»	$= 1$	$- 0.377$	$- 0.014$	$- 0.026$	$- 0.012$	$= 0.571$
4	»	$= 1$	0	$- 0.461$	$- 0.001$	$- 0.130$	$= 0.408$
5	»	$= 1$	0	$- 0.461$	$- 0.001$	$- 0.159$	$= 0.379$
6	»	$= 1$	0	0	$- 0.505$	$- 0.040$	$= 0.455$
7	»	$= 1$	0	0	$- 0.337$	$- 0.076$	$= 0.587$
8	»	$= 1$	0	0	0	$- 0.576$	$= 0.424$
sommes:		8	$- 1.000$	$- 1.000$	$- 0.999$	$- 1.001$	$= 4.000$
							$= u = n - r$

4⁰ *Méthode des secteurs* (Dr. H. Wild). Le contrôle des poids est ici très utile; désignons par p_s et p_i les poids respectifs des secteurs et des angles intermédiaires et par P_s et P_i les poids correspondants *après* compensation

$$\left[\frac{p_s}{P_s}\right] + \left[\frac{p_i}{P_i}\right] = u$$

Exemples: 3 secteurs, 6 angles intermédiaires (2 par secteur)

pour $p_s = p_i = 1$ on a

$$3 \times \frac{1}{P_s} + 6 \times \frac{1}{P_i} = 5 = u \qquad P_s = 2.25 \qquad P_i = \frac{18}{11}$$

4 secteurs, 8 angles intermédiaires (2 par secteur)

$$4 \times \frac{1}{P_s} + 8 \times \frac{1}{P_i} = 7 \qquad P_s = 2.00 \qquad P_i = \frac{8}{5}$$

Si on a recours à une compensation approchée le calcul est plus complexe car la détermination des poids présente une certaine ambiguité ([3] p. 124–129).

En *résumé* le contrôle $[p : P]$ des poids *avant* et *après* compensation peut rendre de réels services. La condition $[pvv] = \min$ entraîne $[p : P] = u$ et réciproquement.

Littérature

[1] R. Helmert, Ausgleichsrechnung.
[2] C. F. Baeschlin, Ausgleichsrechnung und Landesvermessung.
[3] Eggert-Jordan, Vermessungskunde I.
[4] Koll O., Methode der kl. Quadrate.
[5] Wellisch S., Theorie und Praxis der Ausgleichsrechnung.