Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 43 (1945)

Heft: 6

Artikel: Méthode de la connexion des images et théorie des erreurs de l'orientation relative [suite]

Autor: Bachmann, W.K.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-202944

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Méthode de la connexion des images et théorie des erreurs de l'orientation relative

par *Dr W. K. Bachmann*

(Suite)

4. *Parallaxes verticales*

Pour pouvoir effectuer la restitution d'un couple de clichés, son orientation dans l'autographe doit être la même qu'au moment de la prise de vues. Cette orientation s'effectue en deux parties:

a) *Orientation relative.*

Les éléments d'orientation des deux chambres de l'autographe doivent être déterminés de telle sorte que les deux clichés conjugués *définissent* un modèle spatial. S'il en est ainsi, *un déplacement du chariot de base permet d'amener les extrémités supérieures des tiges conductrices simultanément sur deux points conjugués quelconques des clichés.*

b) *Orientation absolue.*

Le modèle spatial, précédemment obtenu, est amené à la grandeur voulue et orienté dans l'espace.

Lors de l'établissement de l'orientation relative, on se sert toujours de valeurs approchées pour les éléments d'orientation ω, φ, κ, bx, by, bz. Après introduction de ces valeurs dans l'appareil de restitution, on corrige un certain nombre d'entre elles afin de rendre le modèle exempt de parallaxes. Etant donné que l'on peut toujours s'arranger à ce que ces corrections deviennent petites, elles jouent le rôle de différentielles. Nous devons donc tout d'abord établir les relations différentielles donnant les parallaxes verticales. *Comme on utilise de préférence des vues verticales dans la triangulation aérienne, nous nous bornerons ici à l'étude de ce cas particulier, en supposant en outre le terrain à restituer à peu près horizontal. La direction du vol étant amenée approximativement en coïncidence avec celle de l'axe des X de l'autographe, les composantes de base by et bz sont toujours petites.*

Considérons deux clichés conjugués orientés correctement dans l'autographe. A l'aide d'un déplacement du chariot de base, nous amenons les extrémités supérieures des tiges conductrices sur deux points conjugués quelconques. Soit p l'un d'eux (fig. 4.1). Imprimons à la chambre correspondante la rotation différentielle (voir fig. 3.2)

$$d\vec{u} = -\vec{i}\,d\omega - \vec{j}\,d\varphi + \vec{k}\,d\kappa \tag{4.1}$$

et attribuons aux composantes de base les accroissements dbx, dby, dbz. Ceci fait, nous imprimons les translations (δX, δY, δZ) au chariot de base. La tige conductrice interceptant maintenant le cliché en un point $\bar{p}$, nous allons déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{\bar{p}p} = \vec{v}$. Pour éviter l'introduction d'un nouveau système de coordonnées, nous projetons le

cliché sur le plan objet $Z = h$ et en effectuant nos calculs dans ce dernier plan, nous obtenons un vecteur $\vec{V}$ qui est proportionnel au premier

$$\vec{v} = \frac{f}{h}\,\vec{V}. \tag{4.2}$$

Par suite de la rotation $\vec{du}$ de la chambre, le point d'intersection P du rayon pO et du plan $Z = h$ vient se placer en P'. Soit Q l'intersection de ce nouveau rayon OP' et du plan objet; nous posons

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{i}\, d_1k + \vec{j}\, d_1l. \tag{4.3}$$

Déterminons tout d'abord les composantes d_1k et d_1l de ce vecteur. Si X, Y, Z sont les coordonnées du point P, nous avons

$$\overrightarrow{OP} = \vec{R} = \vec{i}\,X + \vec{j}\,Y + \vec{k}\,Z \tag{4.4}$$

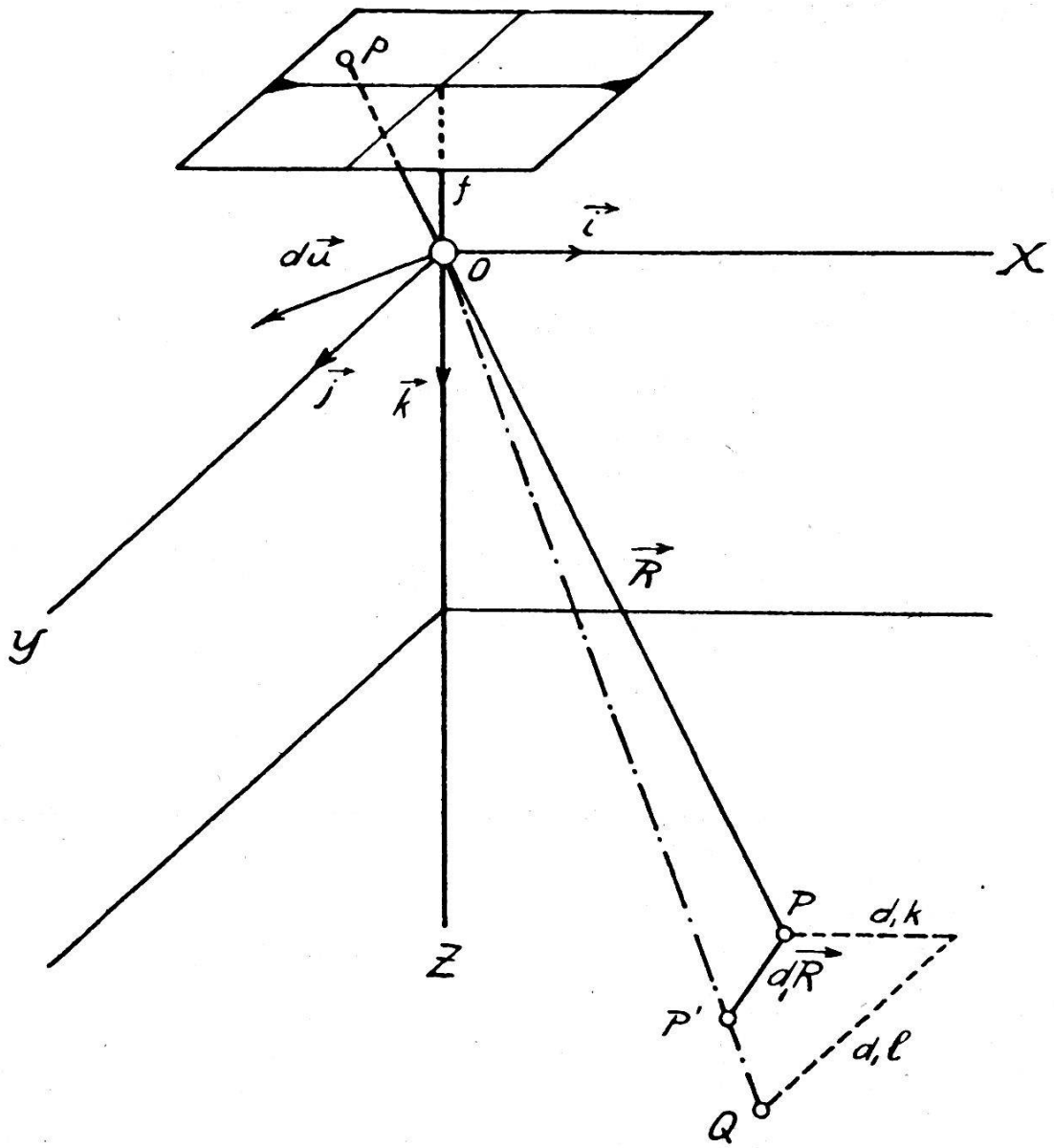

Fig. 4.1

et le déplacement différentiel $\overrightarrow{d_1 R} = \overrightarrow{PP'}$, résultant de la rotation $\vec{du}$ de de la chambre, est donné par la formule

$$d_1 \vec{R} = \vec{du} \wedge \vec{R} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -d\omega & -d\varphi & +d\kappa \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} +\vec{i}\,(-Y\,d\kappa - Z\,d\varphi) \\ +\vec{j}\,(+X\,d\kappa + Z\,d\omega) \\ +\vec{k}\,(+X\,d\varphi - Y\,d\omega) \end{Bmatrix}$$

Pour déterminer le point Q, nous calculons l'expression

$$\lambda\,(\vec{R} + \overrightarrow{d_1 R})$$

où λ est un paramètre fixant la position d'un point courant sur OP'.

$$\lambda\,(\vec{R} + d_1 \vec{R}) = \begin{Bmatrix} +\vec{i}\,\lambda\,(X - Y\,d\kappa - Z\,d\varphi) \\ +\vec{j}\,\lambda\,(Y + X\,d\kappa + Z\,d\omega) \\ +\vec{k}\,\lambda\,(Z + X\,d\varphi - Y\,d\omega) \end{Bmatrix} \tag{4.5}$$

Pour le point Q, nous avons

$$\lambda\,(\vec{R} + d_1 \vec{R}) \cdot \vec{k} = Z\,; \tag{4.6}$$

l'équation (4.5) nous donne ainsi

$$\lambda\,(Z + X\,d\varphi - Y\,d\omega) = Z \tag{4.7}$$

et en divisant par Z, cette équation devient

$$\lambda \left\{ 1 + \frac{X}{Z}\,d\varphi - \frac{Y}{Z}\,d\omega \right\} = 1. \tag{4.8}$$

En négligeant les différentielles d'ordre supérieur au premier, nous obtenons pour λ l'équation

$$\lambda = \frac{1}{1 + \frac{X}{Z}\,d\varphi - \frac{Y}{Z}\,d\omega} = 1 - \frac{X}{Z}\,d\varphi + \frac{Y}{Z}\,d\omega. \tag{4.9}$$

Introduisons cette valeur dans (4.5) en négligeant de nouveau les différentielles d'ordre supérieur

$$\begin{aligned} \lambda\,(\vec{R} + d_1 \vec{R}) = {} & \vec{i} \left\{ X - Y\,d\kappa - Z\,d\varphi - \frac{X^2}{Z}\,d\varphi + \frac{XY}{Z}\,d\omega \right\} \\ & + \vec{j} \left\{ Y + X\,d\kappa + Z\,d\omega - \frac{XY}{Z}\,d\varphi + \frac{Y^2}{Z}\,d\omega \right\} \\ & + \vec{k} \left\{ Z + X\,d\varphi - Y\,d\omega - X\,d\varphi + Y\,d\omega \right\} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Nous constatons que le coefficient de $\vec{k}$ est bien égal à Z. En tenant compte de (4.3), nous trouvons

$$(4.11)\quad \begin{cases} d_1 k = -Y\,d\kappa - Z\left[1 + \dfrac{X^2}{Z^2}\right] d\varphi + \dfrac{XY}{Z}\,d\omega \\ d_1 l = +X\,d\kappa - \dfrac{XY}{Z}\,d\varphi + Z\left[1 + \dfrac{Y^2}{Z^2}\right] d\omega \end{cases}$$

Examinons maintenant l'influence qu'exercent sur la tige conductrice les accroissements attribués aux composantes de base. La composante bx s'introduisant à l'autographe Wild A5 symétriquement à partir du milieu du chariot de base, un changement provisoire de variable s'impose en vue d'une simplification des formules. *Nous introduisons l'accroissement de base $db\bar{x}$ positivement dans la direction des $+X$, et ceci aussi bien pour la chambre A que pour la chambre B* (voir fig. 3.2). Une fois les formules établies, il sera facile de revenir à la différentielle dbx.

En désignant les coordonnées de la douille conductrice, comme précédemment, par X, Y, Z, nous obtenons la formule (4.4). Attribuons maintenant aux composantes de base les accroissements $db\bar{x}$, dby, dbz; l'accroissement correspondant $d_2\vec{R}$ du vecteur $\overrightarrow{OP} = \vec{R}$ devient

$$(4.12)\qquad d_2\vec{R} = \vec{i}\,db\bar{x} + \vec{j}\,dby - \vec{k}\,dbz.$$

Pour déterminer l'intersection de la tige conductrice dans sa nouvelle position avec le plan objet $Z = h$, nous procédons exactement comme ci-dessus. μ étant un paramètre, nous avons

$$(4.13)\quad \mu\,(\vec{R} + d_2\vec{R}) = \vec{i}\,\mu\,(X + db\bar{x}) + \vec{j}\,\mu\,(Y + dby) + \vec{k}\,\mu\,(Z - dbz)$$

et nous calculons μ à l'aide de l'équation

$$\mu\left(1 - \frac{1}{Z}\,dbz\right) = 1$$

qui nous donne en première approximation

$$(4.14)\qquad \mu = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{Z}\,dbz} = 1 + \frac{1}{Z}\,dbz.$$

En introduisant cette valeur de μ dans (4.13) nous trouvons

$$(4.15)\quad \mu\,(\vec{R} + d_2\vec{R}) = \begin{Bmatrix} +\vec{i}\left\{X + db\bar{x} + \dfrac{X}{Z}\,dbz\right\} \\ +\vec{j}\left\{Y + dby + \dfrac{Y}{Z}\,dbz\right\} \\ +\vec{k}\left\{Z - dbz + \dfrac{Z}{Z}\,dbz\right\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +\vec{i}\left\{X + d_2 k\right\} \\ +\vec{j}\left\{Y + d_2 l\right\} \\ +\vec{k}\,Z \end{Bmatrix}.$$

Nous avons

$$(4.16)\qquad \begin{cases} d_2\, k = +\, db\bar{x} + \dfrac{X}{Z}\, dbz \\[2ex] d_2\, l = +\, dby + \dfrac{Y}{Z}\, dbz. \end{cases}$$

Il nous reste encore à examiner l'influence qu'exerce sur la tige conductrice un déplacement (δX, δY, δZ) du chariot de base. En désignant le déplacement de la douille conductrice par $d_3\vec{R}$, nous avons

$$(4.17)\qquad d_3\, \vec{R} = \vec{i}\, \delta X + \vec{j}\, \delta Y + \vec{k}\, \delta\, Z.$$

En répétant maintenant les calculs indiqués plus haut, nous trouvons, si ν est un nouveau paramètre

$$(4.18)\qquad \nu\, (\vec{R} + d_3\, \vec{R}) = \vec{i}\, \nu\, (X + \delta\, X) + \vec{j}\, \nu\, (Y + \delta\, Y) + \vec{k}\, \nu\, (Z + \delta\, Z)$$

et

$$(4.19)\qquad \nu \left(1 + \frac{1}{Z}\, \delta\, Z\right) = 1$$

d'où nous tirons

en première approximation

$$(4.20)\qquad \nu = 1 - \frac{1}{Z}\, \delta\, Z.$$

L'équation (4.18) nous donne ensuite

$$(4.21)\qquad \nu\, (\vec{R} + d_3\, \vec{R}) = \begin{Bmatrix} +\, \vec{i} \left\{ X + \delta X - \dfrac{X}{Z}\, \delta\, Z \right\} \\[2ex] +\, \vec{j} \left\{ Y + \delta Y - \dfrac{Y}{Z}\, \delta\, Z \right\} \\[2ex] +\, \vec{k} \left\{ Z + dZ - \dfrac{Z}{Z}\, \delta\, Z \right\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +\, \vec{i} \left\{ X + d_3\, k \right\} \\[2ex] +\, \vec{j} \left\{ Y + d_3\, l \right\} \\[2ex] +\, \vec{k}\, Z \end{Bmatrix}$$

et le déplacement cherché du point d'intersection de la tige conductrice et du plan $Z = h$ devient ainsi

$$(4.22)\qquad \begin{cases} d_3\, k = \delta\, X - \dfrac{X}{Z}\, \delta\, Z \\[2ex] d_3\, l = \delta\, Y - \dfrac{Y}{Z}\, \delta\, Z. \end{cases}$$

En envisageant maintenant l'ensemble de ces déplacements différentiels, les composantes ΔX, ΔY du vecteur $\vec{V}$ dont il a été question plus haut deviennent:

$$(4.23) \qquad \begin{cases} \Delta X = d_1 k - d_2 k - d_3 k \\ \Delta Y = d_1 l - d_2 l - d_3 l. \end{cases}$$

Etant donné que $(d_1 k - d_2 k)$ et $(d_1 l - d_2 l)$ ne dépendent que des accroissements attribués aux éléments d'orientation des chambres, nous posons

$$(4.24) \qquad \boxed{\begin{aligned} d\,k &= d_1 k - d_2 k = \\ &= -Y\,d\kappa - Z\left[1 + \frac{X^2}{Z^2}\right] d\varphi + \frac{XY}{Z}\,d\omega - db\bar{x} - \frac{X}{Z}\,dbz \\ d\,l &= d_1 l - d_2 l = \\ &= +X\,d\kappa - \frac{XY}{Z}\,d\varphi + Z\left[1 + \frac{Y^2}{Z^2}\right] d\omega - dby - \frac{Y}{Z}\,dbz \end{aligned}}$$

En tenant compte de (4.22), les formules (4.23) deviennent maintenant

$$(4.25) \qquad \boxed{\begin{aligned} \Delta X &= dk - \delta X + \frac{X}{Z}\,\delta Z \\ \Delta Y &= d\,l - \delta Y + \frac{Y}{Z}\,\delta Z \end{aligned}}\,.$$

Ces dernières relations sont à la base de toute la photogrammétrie théorique. En les appliquant aux deux chambres A et B de l'autographe, nous avons

$$(4.26) \qquad \begin{cases} \Delta X_A = dk_A - \delta X + \dfrac{X_A}{Z}\,\delta Z \\ \Delta X_B = dk_B - \delta X + \dfrac{X_B}{Z}\,\delta Z \end{cases}$$

$$(4.27) \qquad \begin{cases} \Delta Y_A = dl_A - \delta Y + \dfrac{Y_A}{Z}\,\delta Z \\ \Delta Y_B = dl_B - \delta Y + \dfrac{Y_B}{Z}\,\delta Z \end{cases}$$

d'où nous allons tirer un critérium pour l'orientation relative.

Partons des deux vues conjuguées, orientées correctement dans l'autographe. En attribuant de petits accroissements aux éléments d'orientation des chambres, nous obtenons les différentielles dk_A, dk_B, dl_A, dl_B. Est-il maintenant possible de trouver un déplacement (δX, δY, δZ) du chariot de base tel que l'on ait à la fois $\Delta X_A = \Delta X_B = \Delta Y_A = \Delta Y_B = 0$? Il résulte des équations (4.26) et (4.27) qu'il n'en est généralement pas ainsi. En effet, dans (4.26), nous avons $X_A \neq X_B$ et nous pouvons par conséquent trouver un système de valeurs δX, δZ annulant à la fois ΔX_A et ΔX_B. Dans (4.27), on a par contre $Y_A = Y_B$. Ce dernier système ne peut donc être résolu par rapport à δY et δZ puisque son déterminant est nul. En soustrayant la première de ces équations de la seconde, nous obtenons une grandeur qui est indépendante de la position du chariot de base

$$\boxed{\Delta Y_B - \Delta Y_A = dl_B - dl_A.} \tag{4.28}$$

En prenant $\Delta Y_A = 0$, nous avons

$$\Delta Y_B = dl_B - dl_A. \tag{4.29}$$

Si l'on annule par contre ΔY_B, on trouve

$$\Delta Y_A = dl_A - dl_B. \tag{4.30}$$

Ces deux grandeurs peuvent être observées dans l'autographe; elles portent le nom de «*parallaxes verticales*». Nous posons

$$\boxed{\begin{aligned} pv_B &= dl_B - dl_A \\ pv_A &= dl_A - dl_B \end{aligned}}. \tag{4.31}$$

Remarquons que l'indice de pv indique la chambre dans laquelle la parallaxe verticale est observée. **(A suivre.)**

Calcul symbolique des coefficients de poids

par *Dr W. K. Bachmann*

Le calcul symbolique des coefficients de poids fut découvert en 1934 par J. M. Tienstra [1] et a déjà été appliqué dans un certain nombre de publications de W. Schermerhorn et R. Roelofs, voir [2], [3], [4]. Le nombre de nos lecteurs disposant de ces publications étant certainement très restreint, M. le Professeur C. F. Baeschlin nous a suggéré de développer ici la théorie de J. M. Tienstra afin de faciliter la lecture de nos publications photogrammétriques.

Ces calculs, quoique ne conduisant somme toute à aucun résultat nouveau en ce qui concerne la théorie des erreurs proprement dite, sont d'une grande importance. Il existe en effet un certain nombre de pro-