Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 43 (1945)

Heft: 3

Artikel: Théorie des erreurs de l'observation des variables secondaires [fin]

Autor: Bachmann, W.K.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-202930

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SCHWEIZERISCHE
Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik
ORGAN DES SCHWEIZ. GEOMETERVEREINS
Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Kulturtechnik / Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie
Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières
ORGANE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES GÉOMÈTRES
Organe officiel de l'Association Suisse du Génie rural / Organe officiel de la Société Suisse de Photogrammétrie
Redaktion: Dr. h. c. C. F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)
Ständ. Mitarbeiter für Kulturtechnik: E. RAMSER, Prof. für Kulturtechnik an der ETH., Freie Straße 72, Zürich
Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats
Expediton, Inseraten- und Abonnements-Annahme
BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR AG., WINTERTHUR

No. 3 • XLIII. Jahrgang
der „Schweizerischen Geometer-Zeitung"
Erscheinend am zweiten Dienstag jeden Monats
13. März 1945
Inserate: 25 Cts. per einspalt. Millimeter-Zeile. Bei Wiederholungen Rabatt gemäß spez. Tarif

Abonnemente:
Schweiz Fr. 14. —, Ausland Fr. 18. — jährlich
Für Mitglieder der Schweiz. Gesellschaften für Kulturtechnik u. Photogrammetrie Fr. 9. — jährl.
Unentgeltlich für Mitglieder des Schweiz. Geometervereins

Théorie des erreurs de l'observation des variables secondaires

par Dr. W. K. Bachmann

(Fin)

IV. Exemple numérique

Dans notre prochaine publication, intitulée «Méthode de la connexion des images et théorie des erreurs de l'orientation relative», nous aurons l'occasion d'appliquer les formules que nous venons de développer à l'orientation relative, problème comportant 5 variables. Il nous semble toutefois indiqué de traiter au préalable un exemple numérique très simple à deux variables, ce qui nous donne la possibilité de calculer les ellipses d'erreur relatives aux divers modes d'opérations que nous envisageons.

Le problème que nous allons traiter se rapporte au *rétablissement d'un point de triangulation à l'aide de visées extérieures.*

Soient $P\ (x, y)$, $P_1\ (x_1, y_1)$, $P_2\ (x_2, y_2)$ trois points de triangulation donnés. Nous supposons que le point P ait disparu et qu'il s'agisse de le rétablir sur le terrain à l'aide des directions extérieures $P_1 P$ et $P_2 P$. Calculons premièrement les gisements φ_1, φ_2 des côtés orientés $s_1 = \overline{P_1 P}$ et $s_2 = \overline{P_2 P}$, ainsi que les coefficients de direction $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ ce qui nous donne

$$(23) \qquad \begin{cases} \delta\varphi_1 = \alpha_1\, \delta x + \beta_1\, \delta y \\ \delta\varphi_2 = \alpha_2\, \delta x + \beta_2\, \delta y. \end{cases}$$

Comme application numérique, nous choisissons

$$\varphi_1 = 370^{gr}\ 24^c\ 00^{cc} \qquad \varphi_2 = 225^{gr}\ 42^c\ 00^{cc}$$

$$s_1 = 5516{,}64 \text{ m} \qquad s_2 = 3808{,}44 \text{ m}$$

et nous prenons comme erreur moyenne à craindre sur l'unité de poids

$$\mu = \pm\ 10^{cc}$$

Les coefficients de direction se calculant d'après la formule

$$\delta\varphi^{cc} = -\frac{\rho^{cc}}{s} \sin\varphi \cdot \delta x + \frac{\rho^{cc}}{s} \cos\varphi \cdot \delta y$$

nous obtenons pour les données numériques ci-dessus, en introduisant δx et δy en cm et $\delta\varphi$ en secondes centésimales:

$$\rho^{cc} = 636620^{cc}$$

$$\sin\varphi_1 = -\ 0{,}4506 \qquad \sin\varphi_2 = -\ 0{,}3888$$

$$\cos\varphi_1 = +\ 0{,}8927 \qquad \cos\varphi_2 = -\ 0{,}9213$$

$$\frac{\rho^{cc}}{s_1} = +\ 1{,}1540 \qquad \frac{\rho^{cc}}{s_2} = +\ 1{,}6716$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\varphi_1 = +\ 0{,}52\ \delta x + 1{,}03\ \delta y \\ \delta\varphi_2 = +\ 0{,}65\ \delta x - 1{,}54\ \delta y \end{array} \right.$$

Nous envisageons dès lors trois méthodes différentes pour la détermination du point P.

1ère méthode:

Si nous plaçons en P_1 et P_2 deux théodolites que nous orientons à l'aide de directions connues $Q_1 P_1$, $Q_2 P_2$ (voir fig. 1), après introduction des gisements φ_1 et φ_2, l'intersection des deux visées $P_1 P$, $P_2 P$, nous donne le point P. Il suffit donc de faire placer un jalon de façon qu'il se trouve simultanément sur les deux visées. En procédant ainsi, les gisements φ_1 et φ_2 jouent le rôle de variables primaires qui sont mesurées et observées. Nous sommes donc en présence d'un simple problème d'observations médiates, et nous pouvons calculer les coefficients de poids et de corrélation en appliquant la méthode habituelle des moindres carrés. Les équations aux poids sont par conséquent

$$(24) \qquad \left\{ \begin{array}{l} [\alpha\,\alpha]\ Q_{xx} + [\alpha\,\beta]\ Q_{xy} = 1 \\ [\alpha\,\beta]\ Q_{xx} + [\beta\,\beta]\ Q_{xy} = 0 \\ \\ [\alpha\,\alpha]\ Q_{xy} + [\alpha\,\beta]\ Q_{yy} = 0 \\ [\alpha\,\beta]\ Q_{xy} + [\beta\,\beta]\ Q_{yy} = 1 \end{array} \right.$$

et l'ellipse d'erreur E_1 a pour équation

$$E_1: [\alpha\,\alpha]\,\delta x^2 + 2\,[\alpha\,\beta]\,\delta x\,\delta y + [\beta\,\beta]\,\delta y^2 = \mu^2 \tag{25}$$

En introduisant les valeurs numériques, nous trouvons

$$\text{(I)}\quad \boxed{\begin{array}{c} Q_{xx} = +\,1{,}59 \qquad Q_{xy} = +\,0{,}22 \qquad Q_{yy} = +\,0{,}32 \\ E_1:\ +\,0{,}69\,\delta x^2 - 0{,}93\,\delta x\,\delta y + 3{,}43\,\delta y^2 = 100 \end{array}}$$

Calculons encore les cœfficients de poids $Q_{\varphi_1\varphi_1}$, $Q_{\varphi_2\varphi_2}$ après détermination du point P. En appliquant la méthode symbolique aux équations (23) nous trouvons

$$\text{(26)}\quad \left\{\begin{array}{l} Q_{\varphi_1\varphi_1} = \alpha_1^2\,Q_{xx} + 2\,\alpha_1\,\beta_1\,Q_{xy} + \beta_1^2\,Q_{yy} \\ Q_{\varphi_2\varphi_2} = \alpha_2^2\,Q_{xx} + 2\,\alpha_2\,\beta_2\,Q_{xy} + \beta_2^2\,Q_{yy} \end{array}\right.$$

et en introduisant les valeurs numériques

$$Q_{\varphi_1\varphi_1} = 0{,}27 \cdot 1{,}59 + 1{,}07 \cdot 0{,}22 + 1{,}06 \cdot 0{,}32 = 1{,}00$$
$$Q_{\varphi_2\varphi_2} = 0{,}42 \cdot 1{,}59 - 2{,}00 \cdot 0{,}22 + 2{,}37 \cdot 0{,}32 = 1{,}00$$

Nous constatons que le poids de φ_1 et φ_2 n'a pas changé et que l'erreur moyenne à craindre sur ces gisements est encore $\pm\,\mu$ après la détermination de P. Il s'agit là bien entendu d'une propriété connue des observations médiates sans mesures surabondantes.

2me méthode:

Soit P_0 un point voisin de P (voir fig. 1). A l'aide d'une boussole, nous déterminons en P_0 des parallèles aux axes de coordonnées $0x$, $0y$. Sur la fig. 1, celles-ci sont désignées par d_x et d_y. Introduisons en outre un système de coordonnées rectangulaires $P\,\xi\,\eta$, ayant son origine en P et dont les axes sont respectivement parallèles à $0x$ et $0y$. La droite d_x étant déterminée sur le terrain, l'aide devra se déplacer de telle sorte que le jalon qu'il porte reste constamment sur cette droite. Plaçons le théodolite successivement en P_1 et P_2 en introduisant les gisements φ_1 et φ_2. Nous pouvons ainsi déterminer les points d'intersection de la droite d_x avec les visées P_1P, P_2P. Désignons ces points par A et B, et soient ξ_A, ξ_B leurs abscisses dans le système $P\,\xi\,\eta$. La distance $\overline{AB} = \xi_B - \xi_A$ étant mesurée sur le terrain, nous pouvons calculer la position du point d'intersection Q des droites d_x et $P\eta$. Les formules (23) nous donnent en effet

pour A: $\delta\varphi_2 = 0$ d'où $0 = \alpha_1\,\xi + \beta_1\,\delta y$

pour B: $\delta\varphi_2 = 0$ d'où $0 = \alpha_2\,\xi_B + \beta_2\,\delta y$

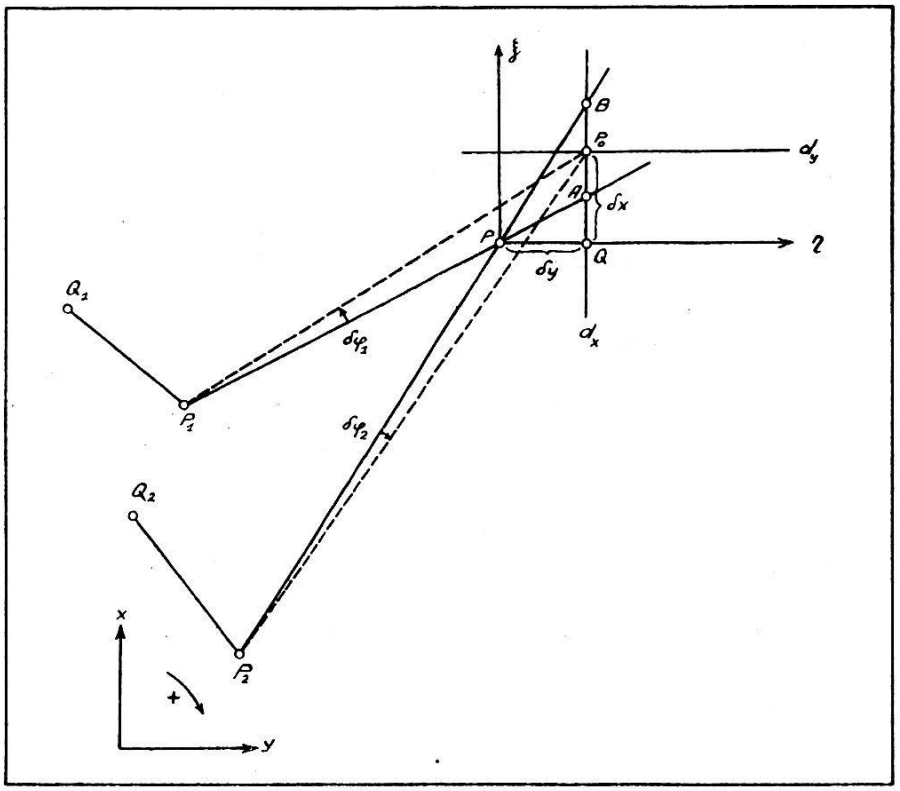

Fig. 1

et nous déterminons maintenant ξ_A en fonction de $(\xi_B - \xi_A)$ *en éliminant l'inconnue* δy entre les deux équations que nous venons d'écrire. Ceci nous donne

$$\alpha_1 \beta_2 \xi_A = \alpha_2 \beta_1 \xi_B$$

et en ajoutant des deux côtés le terme $- \alpha_2 \beta_1 \xi_A$

$$(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \xi_A = \alpha_2 \beta_1 (\xi_B - \xi_A). \tag{27}$$

En introduisant encore le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}, \tag{28}$$

nous trouvons finalement

$$\xi_A = \frac{\alpha_2 \beta_1}{\Delta} (\xi_B - \xi_A). \tag{29}$$

La formule (29) nous donne le moyen de déterminer le point Q en reportant sur le terrain la distance ξ_A à partir de A sur d_x.

Le point Q étant déterminé, l'aide déplacera le jalon sur la droite $Q\eta$ jusqu'à ce qu'il se trouve sur la visée P_1P, ce qui nous donne le point P que nous cherchons.

Dans cette seconde méthode, ξ et η jouent le rôle de variables primaires, tandis que les gisements φ_1 et φ_2 sont des variables secondaires. Il s'agit donc d'un problème d'observation de variables secondaires, qui est représenté par les équations (18), dans lesquelles nous avons $p_1 = p_2 = 1$. Les *observations médiates équivalentes* sont par conséquent

$$(30)\qquad \begin{array}{ll} p = 1 & \varepsilon_1' = \alpha_1\,\delta x + \beta_1\,\delta y \\ p = [\alpha\,\alpha \cdot 1] & \varepsilon_2' = \delta x. \end{array}$$

Les équations aux poids deviennent ainsi

$$(31)\qquad \left\{ \begin{array}{r} \left\{\alpha_1^2 + [\alpha\,\alpha \cdot 1]\right\} Q_{xx} + \alpha_1\,\beta_1\,Q_{xy} = 1 \\ \alpha_1\,\beta_1\,Q_{xx} + \beta_1\,\beta_1\,Q_{xy} = 0 \\ \left\{\alpha_1^2 + [\alpha\,\alpha \cdot 1]\right\} Q_{xy} + \alpha_1\,\beta_1\,Q_{yy} = 0 \\ \alpha_1\,\beta_1\,Q_{xy} + \beta_1\,\beta_1\,Q_{yy} = 1 \end{array} \right.$$

et l'ellipse d'erreur E_2 a pour équation

$$(32)\qquad E_2 : \left\{\alpha_1^2 + [\alpha\,\alpha \cdot 1]\right\} \delta x^2 + 2\,\alpha_1\beta_1\,\delta x\,\delta y + \beta_1^2\,\delta y^2 = \mu^2.$$

L'introduction des valeurs numériques nous donne

$$(\mathrm{II})\qquad \boxed{\begin{array}{c} Q_{xx} = +\,1{,}59 \qquad Q_{xy} = -\,0{,}80 \qquad Q_{yy} = +\,1{,}35 \\ E_2 :\ +\,0{,}90\,\delta x^2 + 1{,}07\,\delta x\,\delta y + 1{,}06\,\delta y^2 = 100 \end{array}}$$

Les cœfficients de poids $Q_{\varphi_1\varphi_1}$, $Q_{\varphi_2\varphi_2}$ après détermination de P deviennent

$$(33)\qquad \begin{array}{l} Q_{\varphi_1\varphi_1} = 0{,}27 \cdot 1{,}59 - 1{,}07 \cdot 0{,}80 + 1{,}06 \cdot 1{,}35 = 1{,}00 \\ Q_{\varphi_2\varphi_2} = 0{,}42 \cdot 1{,}59 + 2{,}00 \cdot 0{,}80 + 2{,}37 \cdot 1{,}35 = 5{,}47 \end{array}$$

et nous constatons que $Q_{\varphi_2\varphi_2}$ est supérieur à l'unité. Il en résulte que l'erreur moyenne à craindre sur φ_2, après détermination de P, est égale à

$$\pm\sqrt{5{,}47}\,\mu;$$

elle est donc plus grande que μ en valeur absolue.

Notons encore que Q_{xx} prend la même valeur pour les deux méthodes — ce que la théorie générale laissait prévoir — tandis que la valeur de Q_{yy} est plus élevée pour la seconde méthode.

3me *méthode :*

Dans ce qui précède, nous avons déterminé l'inconnue ξ moyennant élimination de η. Nous pouvons encore appliquer ce même procédé d'élimination à l'inconnue ξ en vue de la détermination de η. *Les observations médiates équivalentes,* relatives à ces opérations sont données par les équations (16) où nous devons de nouveau poser $p_1 = p_2 = 1$, ce qui nous donne

$$(34)\qquad \begin{array}{ll} p_\xi = [\alpha\,\alpha \cdot 1] & \varepsilon_1' = \xi \\ p_\eta = [\beta\,\beta \cdot 1] & \varepsilon_2' = \eta \end{array}$$

Les coefficients de poids deviennent

$$(35) \qquad Q_{xx} = \frac{1}{[\alpha\,\alpha \cdot 1]} \qquad Q_{xy} = 0 \qquad Q_{yy} = \frac{1}{[\beta\,\beta \cdot 1]}$$

et l'ellipse d'erreur a pour équation

$$(36) \qquad E_3 : \; [\alpha\,\alpha \cdot 1]\;\delta x^2 + [\beta\,\beta \cdot 1]\;\delta y^2 = \mu^2.$$

L'introduction des valeurs numériques nous donne

$$(\mathrm{III}) \qquad \boxed{\begin{array}{c} Q_{xx} = +1{,}59 \qquad Q_{xy} = 0 \qquad Q_{yy} = +0{,}32 \\ E_3 : \; +0{,}63\;\delta x^2 + 3{,}12\;\delta y^2 = 100 \end{array}}$$

et les cœfficients de poids $Q_{\varphi_1\varphi_1}$, $Q_{\varphi_2\varphi_2}$ deviennent après détermination de P:

$$(37) \qquad \begin{aligned} Q_{\varphi_1\varphi_1} &= 0{,}27 \cdot 1{,}59 + 1{,}06 \cdot 0{,}32 = 0{,}77 \\ Q_{\varphi_2\varphi_2} &= 0{,}42 \cdot 1{,}59 + 2{,}37 \cdot 0{,}32 = 1{,}43 \end{aligned}$$

Pour ce qui a trait à la construction graphique des trois ellipses (voir fig. 2) il est indiqué de déterminer leurs axes. En désignant l'angle formé par un axe de l'ellipse et l'axe des x par α, nous avons la formule bien connue

$$\operatorname{ctg} 2\,\alpha = \frac{[aa] - [bb]}{2\,[a\,b]}$$

qui donne les 2 valeurs de α qui diffèrent de 100^g l'une de l'autre. On obtient ensuite les axes correspondants d en appliquant la formule

$$d^2 = \frac{\mu^2}{[bb] + [ab] \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\mu^2}{[aa] + [ab] \operatorname{tg} \alpha}.$$

Ces calculs étant bien connus, nous nous bornons à en donner les résultats

$$E_1 : \begin{cases} \alpha_1 = +\;10^g\,43^c & d_1 = 12{,}7 \text{ cm.} \\ \alpha_2 = +\;110^g\,43^c & d_2 = 5{,}3 \text{ cm.} \end{cases}$$

$$E_2 : \begin{cases} \alpha_1 = -\;45^g\,26^c & d_1 = 15{,}1 \text{ cm.} \\ \alpha_2 = -\;145^g\,26^c & d_2 = 8{,}1 \text{ cm.} \end{cases}$$

$$E_3 : \begin{cases} \alpha_1 = 0^g\,00^c & d_1 = 12{,}6 \text{ cm.} \\ \alpha_2 = 100^g\,00^c & d_2 = 5{,}7 \text{ cm.} \end{cases}$$

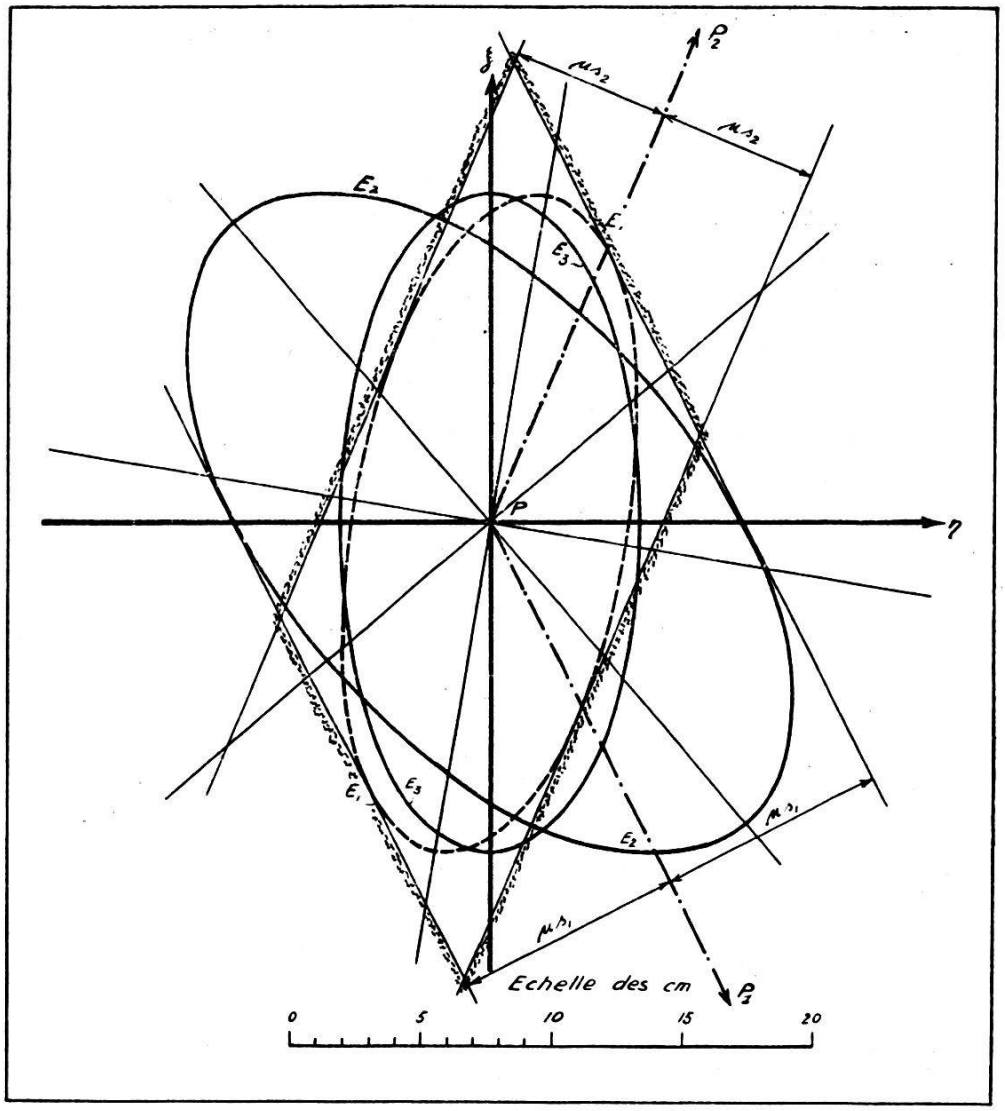

Fig. 2

Conclusions

Nous constatons que les trois méthodes envisagées donnent lieu à des ellipses d'erreur différentes (voir fig. 2). Il en résulte que la méthode d'observation doit être donnée avec précision si l'on ne veut pas être amené à des résultats erronés en calculant les erreurs. Si les erreurs moyennes μ_1, μ_2 après détermination de P, ne doivent pas dépasser μ en valeur absolue, la suite des opérations doit être répétée plusieurs fois lorsqu'on applique les méthodes II ou III.

Terminons ces remarques en ajoutant que tous ces résultats peuvent également être obtenus par voie géométrique, ce qui facilite parfois considérablement la compréhension de ces problèmes de nature assez subtile.