Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik =

Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 42 (1944)

Heft: 5

Artikel: Beitrag zur Berechnung der geodätischen Linie und der

geographischen Koordinaten

Autor: Eika, T.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-201828

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

²/₃ de la superficie du territoire cantonal à mensurer. 46 communes ou fractions de communes possèdent le feuillet fédéral du grand livre de la propriété foncière.

Et maintenant, nous poursuivons cette œuvre d'intérêt national en espérant qu'un jour toutes nos communes seront dotées d'une mensuration et d'un registre foncier conformes à notre législation civile en cette matière, ce qui constituera un réel progrès technique, économique et social.

Ls. H.

Beitrag zur Berechnung der geodätischen Linie und der geographischen Koordinaten

Von T. Eika, Trondheim

Für die Lösung der zwei geodätischen Hauptaufgaben sind bekanntlich viele Berechnungsmethoden angegeben worden. Für Abstände, welche die Länge der gewöhnlichen Dreiecksseiten eines Netzes 1. Ordnung nicht wesentlich übersteigen, kann man einfache Berechnungen benutzen, aber nicht, wenn die Abstände groß sind. Im folgenden ist eine Methode angewendet worden, welche auf die Benutzung des Legendreschen Satzes bei Lösung des entsprechenden sphäroidischen Dreiecks aufbaut. Sie führt zu direkter Berechnung, wenn die geographischen Koordinaten $(\varphi_1 \ \lambda_1), \ (\varphi_2 \ \lambda_2)$ der betreffenden Punkte P_1 und P_2 gegeben, während die Azimute und Länge der geodätischen Linie gesucht sind. Diese Aufgabe soll deshalb zuerst behandelt werden.

In Fig. 1 ist N der Nordpol. Der Parallelkreis durch P_1 schneidet die Meridiane rechtwinklig in P_1 und P'_1 ; die Länge der geodätischen Linie P_1 P'_1 sei a. Der Winkel δ zwischen dem Parallelkreis und der geodätischen Linie und die Länge des Meridianbogens P'_1 P_2 lassen sich leicht finden. Aus dem Längenunterschied $l = \lambda_2 - \lambda_1$ und der geographischen Breite φ_1 erhält man a. Im sphäroidischen Dreieck P_1 P'_1 P_2 kennen wir dann zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel; wenn man außerdem den sphärischen Exzeß des Dreiecks kennt, steht der Weg für die Lösung des Dreiecks nach Legendre offen.

Der Normalschnitt P_1 P'_1 wird sich der entsprechenden geodätischen Linie sehr nahe anschließen. Nach Helmert: Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie I, S. 344, ist der Winkel zwischen Normalschnitt und geodätischer Linie gleich

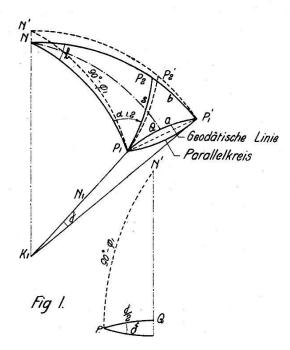
$$\frac{1}{48} e^2 \frac{a^3}{a_0^3} \sin 2 \varphi_1 + \ldots,$$

wo a die Länge des Normalschnittes, a_0 der Äquatorhalbmesser sind. Für $a_0 = 128$ km und $\varphi_1 = 45^0$ ist er gleich 0,0002". Es handelt sich hier um einen azimutalen Winkel, und wir können ohne

weiteres von diesem Unterschied absehen, also das Azimut der geodätischen Linie dem Azimut des Normalschnittes gleichsetzen.

Eine Kugel mit dem Zentrum in K_1 und dem Halbmesser N_1 berührt das Ellipsoid längs des Parallelkreises P_1 P'_1 und schneidet die Erdachse in N'. Q ist der Punkt in der Mitte der geodätischen Linie P_1 P'_1 ; aus dem bei Q rechtwinkligen Dreieck P_1 N' Q erhält man

$$tg \delta = tg \frac{l}{2} \cdot \sin \varphi_1 \tag{1}$$



Im allgemeinen sind die Winkel $\frac{l}{2}$ und δ klein und wir können tg δ und tg $\frac{l}{2}$ in eine Reihe entwickeln, wo es genügt, die Glieder bis zur 3. Ordnung mitzunehmen. Wir erhalten

$$\delta + \frac{\delta^3}{3} \ldots = \left(\frac{l}{2} + \frac{l^3}{24} \ldots\right) \sin \varphi_1.$$

Im zweiten Glied können wir $\delta = \frac{l}{2} \sin \varphi_1$ setzen. Dann wird

$$\delta = \frac{l}{2} \sin \varphi_1 \left(1 + \frac{1}{12} \frac{l^2}{\rho^2} \cos^2 \varphi_1 \right)$$

$$\log (2 \delta) = \log l + \sin \varphi_1 + \frac{M}{12} \cdot \frac{l^2}{\rho^2} \cos^2 \varphi_1 \qquad (2)$$

Das letzte kleine Korrektionsglied wird mit K_1 bezeichnet, wo

$$K_1 = (0.553 \cdot l \cdot \cos \varphi_1)^2 \cdot 10^{-8}$$

wenn l in Minuten ausgedrückt ist. Es kann mit dem Rechenschieber ausgewertet werden.

Die nächste Stufe ist die Bestimmung von a. Wird die Länge der geodätischen Linie durch den entsprechenden Normalschnitt ersetzt, so ist der Fehler bei Linien von dieser Länge vollständig bedeutungslos. Aber weiter kann man die Länge des Normalschnittes als einen Kreisbogen über der Sehne P_1 P'_1 mit dem Halbmesser N_1 berechnen. Der Längenunterschied zwischen Ellipsenbogen und Kreis ist nach Jordan-Eggert III, 2 (1941), S. 10 (12)

$$a - N_1 \cdot \gamma = -\frac{1}{6} N_1 \cdot \gamma^3 \cdot \eta_1^2 \cdot \sin^2 \delta + \frac{1}{8} N_1 \cdot \gamma^4 \cdot \eta_1^2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \sin \delta$$

wo γ der Zentriwinkel für den Kreisbogen ist. Für a=128 km und $\varphi=60^{\circ}$ ist der Unterschied nur 0,002 mm. Man erhält also a durch die Gleichung

$$a = \gamma \cdot N_1 \tag{3}$$

Im sphärischen Dreieck $P_1 N'_1 Q$ (Fig. 1) ist $P_1 Q = \frac{\gamma}{2}$. Es besteht die Gleichung

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sin \frac{l}{2} \cdot \cos \varphi_1.$$

Wir benutzen hier eine ähnliche Reihenentwicklung.

$$\frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma^3}{48} \cdot \ldots = \left(\frac{l}{2} - \frac{l^3}{48} \cdot \ldots\right) \cos \varphi_1$$

woraus

$$\gamma = l \cos \varphi_1 \left(1 - \frac{1}{24} l^2 \sin^2 \varphi_1 \ldots \right)$$

$$\log \gamma = \log l + \log \cos \varphi_1 - \frac{M}{24} \frac{l^2}{\rho^2} \sin^2 \varphi$$

und weiter

$$\log a = \log l + \log \frac{N_1}{\rho} + \log \cos \varphi_1 - K_2 \tag{4}$$

Das kleine Glied K_2 kann mit dem Rechenschieber berechnet werden und ist gleich $(0,391\ l\cdot\sin\varphi_1)^2\cdot 10^{-8}$ wenn l in Minuten ausgedrückt wird. K_2 ist der Logarithmenunterschied für den Parallelkreis und die geodätische Linie.

Die Meridianbogenlänge b erhält man mit großer Annäherung durch die Gleichung

$$b = \Delta \varphi \frac{M_m}{\rho} \left(1 + \frac{1}{8} e^2 \frac{\Delta \varphi^2}{\rho^2} \cos 2 \varphi_m \right) + \ldots$$
 (5)

 M_m ist der Meridiankrümmungshalbmesser für die Mittelbreite

$$\varphi_m = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$$

Mit logarithmischer Rechnung wird

$$\log b = \log \Delta \varphi'' + \log \frac{M_m}{\rho} + M \cdot \frac{1}{8} e^2 \frac{\Delta \varphi^2}{\rho^2} \cos 2 \varphi_m$$

$$= \log \Delta \varphi'' + \log \frac{M_m}{\rho} + K_3$$

Das Glied K_3 wird gleich $1,1\cdot\varDelta\varphi^2\cdot\cos2\,\varphi_m\cdot10^{-7}$ wenn $\varDelta\varphi$ in Graden ausgedrückt wird.

Für die Berechnung des sphärischen Exzesses aus den beiden Seiten a, b und dem eingeschlossenen Winkel = 90° \pm δ erhält man

$$\epsilon = \frac{a b}{2 M N} \cos \delta \left(1 + \frac{a^2 + b^2}{12 M N} \right)$$

$$\log \epsilon = \log a + \log b + \log \cos \delta + \log \frac{\rho}{2 M N} + \frac{mod}{12} \frac{a^2 + b^2}{M N}$$
 (5)

Das letzte kleine Korrektionsmitglied wird mit K_4 bezeichnet und wir können setzen

$$K_4 = 0.00089 (a^2 + b^2) \cdot 10^{-6} = (0 \cdot 0.0298 \cdot s)^2 \cdot 10^{-6}$$

wo a, b und s in km ausgedrückt sind. Im allgemeinen wird K_4 so klein, daß es überflüssig ist, das Glied mitzunehmen. Für die Lösung des ebenen Dreiecks, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind, kann man verschiedene Formeln benutzen. Da ein fehlender Winkel β und eine Seite s zu berechnen sind, und da die vorhergehende Rechnung die Logarithmen der Seiten a und b gibt, ist die Einführung eines Hilfswinkels λ -vorteilhaft (Fig. 2).

$$tg \lambda = \frac{b \cdot \sin \sigma}{a}$$

$$tg \beta = \frac{\sin \sigma \cdot \sin \lambda}{\sin (\sigma - \lambda)}$$

$$s = \frac{a \cdot \sin \sigma}{\sin a} = \frac{b \cdot \sin \sigma}{\sin \beta}$$
(6)

Fig. 2

Wenn der Dreieckswinkel β bekannt ist, können die Azimute $\alpha_{1\cdot 2}$ und $\alpha_{2\cdot 1}$ leicht berechnet werden. Zwischen diesen beiden besteht nämlich die einfache Beziehung

$$\alpha_{2.1} = \alpha_{1.2} \pm 2 \delta \pm \epsilon \pm 180^{\circ} \tag{7}$$

Die Vorzeichen sind davon abhängig, in welchem Quadranten $a_{1\cdot 2}$ liegt. Um die Übersicht für einzelne Berechnungen zu erleichtern, ist eine Tafel zusammengestellt. Die Winkelwerte richten sich nach der gegenseitigen Lage der Punkte P_1 und P_2 .

α _{1·2} im Quadrant	sin σ	$a_{1\cdot 2}$		a_{2} .
1.	$\left \cos\left(\delta + \frac{1}{3}\epsilon\right)\right $	90° — (β + -	$\frac{1}{3} \epsilon + \delta$	$\boxed{a_{1\cdot 2}+180^{0}+(2\delta+\epsilon)}$
2.	$\left \cos\left(\delta-\frac{1}{3}\epsilon\right)\right $	$90^{\circ} + (\beta + -$	$\frac{1}{3}\epsilon - \delta$	$a_{1\cdot 2} + 180^{0} + (2\delta - \epsilon)$
3.	$\left \cos\left(\delta-rac{1}{3}\;\epsilon ight) ight $	270° — $\left(eta+rac{1}{3} ight)$	$\frac{1}{3}\epsilon - \delta$	$a_{1\cdot 2}-180^{\circ}-(2\delta-\epsilon)$
4.	$\left \cos\left(\delta + \frac{1}{3}\epsilon\right)\right $	$270^{\circ} + \left(eta + rac{1}{3} ight)$	$\left(\frac{1}{3}\epsilon + \delta\right)$	$a_{1\cdot 2} - 180^{0} - (2\delta + \epsilon)$
a _{1·2} im Quadrant	sin β		sin α	
1.	$\cos \left(\alpha_{1} \cdot {}_{2} + \left[\delta \right] + \right)$	$-\frac{1}{3}\epsilon$	$\sin \left(\alpha_1 \right)$	$\left[2\delta + \frac{2}{3}\epsilon\right]$
2.	$\sin\left(\alpha_{1\cdot 2} - 90^{\circ}\right)$	$+\left[\delta-rac{1}{3}\;\epsilon ight]$	$\cos\left(\alpha_{1}\right)$	$= 90^{\circ} + \left[2\delta - \frac{2}{3}\epsilon\right]$
3.	$\cos\left(\alpha_{1\cdot 2}-180^{\circ}\right)$	$-\left[\delta - \frac{1}{3} \epsilon\right]$	$\sin\left(\alpha_{1}\right)$	$2 - 180^{\circ} - \left[2\delta - \frac{2}{3}\epsilon\right]$
4.	$\sin\left(\alpha_12-270^{\circ}\right)$	$- iggl[\delta + rac{1}{3} \; \epsilon iggr] iggr) iggr $	$\cos\left(\alpha_{1}\right)$	$\left[2 - 270^{\circ} - \left[2\delta + rac{2}{3} \epsilon \right]\right]$

Bei Angabe der geographischen Breite und Länge der Dreieckspunkte und des Azimutes für die Seiten muß man so viele Dezimalstellen mitnehmen, wie es der Genauigkeit entspricht, mit der die Punkte gegenseitig bei der Triangulation festgelegt sind. Wir können z. B. damit rechnen, daß Nachbarpunkte mit einer relativen Genauigkeit von 5 mm bestimmt sind. Die entsprechenden Größen $d\varphi$, dl und da sind durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$M d\varphi = N \cos \varphi \cdot dl = s \cdot d\alpha = 5 \text{ mm}$$

Wird ein Punkt um 5 mm verschoben, so kann es Veränderungen $d\varphi$, dl, $d\alpha$ in Breite, Länge und Azimut geben, die durch die obenstehenden Gleichungen bestimmt sind. Es wird für $\varphi = 60^{\circ}$ und s = 100 km

$$d\varphi = 0.00016$$
", $dl = 0.00032$ ", $d\alpha = 0.01$ ".

Man muß also die Breite und Länge mit 4, das Azimut mit 2 oder 3 Dezimalstellen der Sekunde angeben, trotzdem die direkte astronomische Messung eine weit geringere Genauigkeit verlangt.

Um diese Genauigkeit zu erreichen, müssen die Hauptrechnungen sieben- oder achtstellig ausgeführt werden.

Zusammenstellung von Gebrauchsformeln

$$\begin{array}{lll} \log a & = & \log l + \log \frac{N_1}{\rho} + \log \cos \varphi_1 - K_2 \\ \\ \log b & = & \log 2\varphi + \log \frac{M_m}{\rho} + K_3 \\ \\ \log 2 \delta & = & \log l + \log \sin \varphi_1 + K_1 \\ \\ \log \epsilon & = & \log a + \log b + \log \cos \delta + \log \frac{\rho}{2 M N} + K_4 \\ \\ \log \operatorname{tg} \lambda & = & \log b - \log a + \log \sin \sigma \\ \\ \log \operatorname{tg} \beta & = & \log \sin \sigma + \log \sin \lambda + \log \frac{1}{\sin (\sigma - \lambda)} \\ \\ \log \operatorname{tg} \beta & = & \log a + \log \sin \sigma + \log \frac{1}{\sin \alpha} \\ \\ & = & \log b + \log \sin \sigma + \log \frac{1}{\sin \beta} \end{array}$$

Beispiel (vgl. Jordan-Eggert III, 2, S. 94)

Gegeben:
$$\varphi_1 = 49^{\circ} 30'$$
, $\varphi_2 = 50^{\circ} 30'$, $l = 1^{\circ} = 3600''$

Gesucht: $a_{1\cdot 2}$, $a_{2\cdot 1}$, s

$$\log \Delta \varphi = 3.556 \ 3025.0 \qquad K_3 = -0.2 \cdot 10^{-7}$$

$$\log \frac{M_m}{q} = 1.489 \ 8664.7 \qquad K_1 = 463 \cdot 10^{-8}$$

Bei der umgekehrten Aufgabe sind die Lage von $P_1(\varphi_1 \lambda_1)$, das Azimut $a_{1\cdot 2}$ und die Länge s der geodätischen Linie gegeben. Die geographischen Koordinaten von $P_2(\varphi_2 \lambda_2)$ und das Azimut $a_{2\cdot 1}$ von P_2P_1 sind gesucht.

Die angegebene Methode verlangt die Berechnung von δ , welche wieder voraussetzt, daß l bekannt sein muß. Es ist deshalb notwendig, zuerst einen angenäherten Wert von l zu finden. Dazu könnte man z. B. eine Reihenentwicklung wie bei Jordan-Eggert III, 2, S. 72, benutzen, die aber wesentlich abgekürzt werden kann. Es ist indessen einfacher, in folgender Weise vorzugehen: der Näherungswert l' wird aus einem

sphärischen Dreieck $N'P_1P'_2$ berechnet, wo die zwei Seiten $P_1P'_2=s$, $P_1N'=90^{\circ}-\varphi_1$ und der eingeschlossene Winkel $N'P_1P'_2=\alpha_{1\cdot 2}$ gegeben sind. Da wir nur den unbekannten Winkel l' brauchen, führen wir einen Hilfswinkel u ein.

$$tg u = tg \frac{\rho}{N_1} s \cos \alpha_1._2$$

$$tg l' = \frac{tg \alpha_1._2 \cdot \sin u}{\cos (\varphi_1 + u)}$$
(8)

Bei logarithmischer Auswertung der Gleichungen erhält man

$$\log u = \log s + \log \frac{\rho}{N_1} + \log \cos a_{1 \cdot 2} + \left(0,3805 \frac{s}{N_1} \sin a\right)^2$$

$$\log l' = \log u + \log \lg a_{1 \cdot 2} + \log \frac{1}{\cos (\varphi_1 + u)} + S_u - T_{e'},$$
(9)

wo die Größen S_u und $T_{e'}$ aus der Logarithmentafel zu entnehmen sind. Mit siebenstelliger Rechnung kann man im allgemeinen damit rechnen, daß der Fehler Δl für s=128 km den Wert 0.002'' nicht überschreitet.

Für den entsprechenden Fehler in δ kann man $\Delta \delta = \frac{1}{2} \Delta l \cdot \sin \varphi_1$ setzen, und wir sehen, daß dieser Fehler 0,001" nicht übersteigt. Aus dem ebenen Dreieck $P_1 P_1 P_2$, wo die Seite $P_1 P_2 = s$ und die Winkel bekannt sind, erhält man

$$a \approx s \frac{\sin (a_{1\cdot 2} + 2 \delta)}{\cos \delta}$$

$$b \approx s \frac{\cos{(a_1 \cdot a_2 + \delta)}}{\cos{\delta}}$$

wenn $a_{1\cdot 2}$ im 1. Quadranten liegt.

Wir wollen den Fehler in a und b bei gegebenem Fehler $\Delta\delta$ finden. Es wird

$$\frac{\Delta a}{a} = \cot (a_{1\cdot 2} + 2 \delta) 2 \Delta \delta + \tan \delta \Delta \delta \approx 2 \cdot \cot a_{1\cdot 2} \cdot \Delta \delta$$

$$\frac{\Delta b}{b} = - \operatorname{tg} (a_{1 \cdot 2} + \delta) \Delta \delta + \operatorname{tg} \delta \cdot \Delta \delta \approx - \operatorname{tg} a_{1 \cdot 2} \cdot \Delta \delta$$

$$\Delta a \approx b \cdot 2 \Delta \delta$$

$$\Delta b \approx -a \cdot \Delta \delta$$

Für
$$\Delta \delta = \frac{0.001''}{\rho}$$
, $a = b = 128\,000 \,\text{m}$ wird

 $\Delta a \approx 1 \text{ mm}$

 $\Delta b \approx 0.5 \text{ mm}$

(Schluß folgt.)

Société suisse des Géomètres Comité central

Procès-verbal de la séance du 18 mars 1944 à Locarno

Sont présents: Tous les membres du Comité central ainsi que le rédacteur du journal, M. le Dr. Baeschlin, Professeur.

La séance a lieu à l'hôtel Du Lac, elle est ouverte à 14 heures par M. Bertschmann, président central.

- 1º Le procès-verbal de la séance du 27 novembre 1943 à Berne, est lu et adopté.
- 2º Mutations. Sur leur demande, le comité central procède à l'admission comme nouveaux membres de la SSG. des personnes suivantes:

Staub Edmond, ingénieur rural et

géomètre officiel à Meilen

né en 1918, de Hombrechtikon

Schneider Walter, ingénieur rural à

Andelfingen

né en 1916, de Zurich

Gianini Lindo, ingénieur rural à Ro-

veredo

né en 1912, de Corticiasca

Albertini Rodolfo, géomètre officiel

né en 1892, de Ponte Campovasto, à Vacallo

Ramser Ernest, ingénieur rural, pro-

fesseur EPF. à Zurich

né en 1894, de Schnottwil

M. Moret Antoine, géomètre officiel à Martigny-Bourg, est tracé de la liste des membres.

Sont nommés membres vétérans:

nés er	1 , w w w	Membre d	le la société depuis		
1878	Baumgartner Theodor	à Küsnacht/Zurich	1902		
1878	Beyeler Arnold	à Laupen/Berne	1904		
1878	Matthey Charles	à Genève	1910		
1878	Weber Werner	à Frauenfeld	1904		
1878	Winkler Emil	à Russikon/Zurich	1912		
1887	Ritter Emil	à Massagno/Tessin	1909		
(n'exerce plus la profession)					

3º Le rapport annuel pour 1943 est adopté avec remerciements à son auteur M. Bertschmann.

Le caissier Kübler présente son rapport sur les comptes annuels et sur les fonds spéciaux, l'approbation en est recommandée à la conférence des présidents.

Le rédacteur donne des renseignements concernant les pages du journal dépassant le nombre conventionnel; il fait remarquer que