Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 42 (1944)

Heft: 4

Artikel: L'application à la géodésie d'un théorème de Tchebychef

Autor: Ansermet, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-201824

[5] Donat, Die Saugstrangentfernung bei Dränung in Mineralböden, Wien 1935.
[6] Diserens, Les méthodes scientifiques pour l'étude des nappes souterraines, Marseille 1930.
[7] Hooghoudt, Bijdragen tot de kennis van eenige naturkundige grootheden van den Grond, Groningen 1936.
[8] Regamey, P., Etude de quelques Ecoulements souterrains et superficiels dans les sols assainis, Lausanne 1943.
[9] Erkin, G. D., Minsk, Pedology, Nr. 5, 1937.
[10] Dachler, R., Grundwasserströmung, Wien 1936.
[11] Weber, H., Untersuchungen über die Reichweite von Grundwasserabsenkungen mittels Rohrbrunnen, Julius Springer, Berlin 1928.
[12] Meyer-Peter, Hydraulik (Vorlesung).
[13] Meyer-Peter, Grundbau (Vorlesung).
[14] Ramser, E., Bewässerung und Entwässerung (Vorlesung).
[15] Schroeder, G., Landwirtschaftlicher Wasserbau, Berlin 1937.

L'application à la géodésie d'un théorème de Tchebychef

par *A. Ansermet*

Dans un mémoire consacré à la théorie des projections Tchebychef a étudié un intéressant problème relatif aux cartes géographiques (voir les œuvres complètes de Tchebychef I. p. 283). Limitant ses recherches à la projection conforme et aux surfaces de révolution il a énoncé ce remarquable théorème:

> «Le mode de représentation le plus avantageux, s'il existe, doit être celui pour lequel le rapport de similitude de la carte à la région représentée doit être constant pour tout le contour de la région.»

En géodésie le rapport de similitude est le module de déformation linéaire m; en d'autres termes m donne la variation d'echelle.

Ce beau théorème n'est pas démontré ni même énoncé nettement et Tchebychef n'a malheureusement pas publié le développement de son analyse.

Il appartenait au mathématicien français G. Darboux de reprendre l'étude de la problème et de le traiter de façon magistrale au cours de deux mémoires dont le second surtout est intéressant pour le géodésien.

G. Darboux considère le *gradient* de la fonction m c'est-à-dire la dérivée de la fonction suivant la direction normale à l'isomètre $m =$ constant.

Il substitue ensuite à la fonction elle-même son logarithme. Remarquons qu'en géodésie on peut poser dans un champ relativement étendu autour de l'origine des coordonnées

$$\log_e m \cong m - 1.$$

Considérant ensuite que l'expression qui donne la valeur moyenne du gradient n'est pas rationnelle, G. Darboux est amené à rendre *mini-*

mum la valeur moyenne du carré du gradient de log m pour la région considérée

$$J = \int\int \left\{\left(\frac{\partial lg\, m}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial lg\, m}{\partial y}\right)^2\right\} dx\, dy = \text{minimum?}$$

$$dx \cdot dy = d\sigma = \text{élément de surface. } lg = \log_e$$

Interprétation géométrique.

Considérons en un point donné de la région à projeter un arc élémentaire ds de géodésique d'azimut variable z. La courbure de ds est nulle dans une direction normale à l'isomètre $m =$ const. et maximum dans uns direction tangente à cette courbe. Il s'agit ici de la projection plane de l'arc ds à partir de la sphère de courbure moyenne $R = \sqrt{MN}$ couramment utilisée en géodésie. Cette valeur maximum s'appelle la *dérivée principale* de l'échelle au point donné ([1] p. 38). Il résulte de ce qui précède que le carré du gradient calculé par G. Darboux est égal au carré de cette dérivée; géométriquement c'est donc le carré de la courbure de l'arc de géodésique tangent à l'isomètre au point considéré. En faisant varier l'azimut z de l'arc de géodésique projeté dans le plan on engendre le lieu des centres de courbure de cet arc ds. Ce lieu est une droite parallèle à la tangente à l'isomètre au point donné ([1], p. 38).

Formules préliminaires.

A la base des calculs se trouve la formule bien connue qui exprime le module m; les termes au delà du 2e ordre sont négligés par hypothèse

$$m - 1 = \frac{1}{4R^2}\left\{(1 - n\cos 2\alpha)\, x^2 - 2\, n \cos 2\,\alpha \cdot xy + (1 + n \cos 2\alpha)\, y^2\right\} + \ldots\ldots$$

$$\text{où } R = \sqrt{MN}$$

Le paramètre n, qui joue un rôle fondamental, est fonction de l'aplatissement de l'ellipse-isomètre $-1 < n < +1$

$$n = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \qquad \left(\frac{1}{2}\ \text{axes } a,\, b;\ a^2 \gtrsim b^2\right)$$

L'angle α donne l'orientation de l'ellipse. Le méridien passant par l'origine n'est en général plus un axe de symétrie de la projection. La valeur $n = 0$ définit un cercle (α est éliminé). Si $n = \pm 1$ il y a un axe *neutre* ($m - 1 = 0$).

Lorsque $\alpha = \pm 45^0$ les axes $x = 0$ ou $y = 0$ sont les lieux des points pour lesquels le module m est indépendant du paramètre n.

Entre les 3 coefficients de x^2, xy, y^2 on a la relation connue: $(1 - n \cos 2a)(1 + n \cos 2a) - (n \sin 2a)^2 = F$ qui est indépendante de a.

Enfin si n varie l'ellipse-isomètre $m - 1 =$ const engendre un faisceau ponctuel de coniques circonscrit à un carré.

Il est aisé maintenant de calculer la valeur moyenne du carré du gradient de log. m en s'écartaut un peu de la voie suivie par G. Darboux dont le mémoire était destiné à des mathématiciens. Dans son calcul l'auteur considère en outre une surface à double courbure.

Valeur moyenne du carré du gradient de log m.

Il faut rendre minimum cette valeur, qui est fonction du paramètre n, pour une région donnée c'est-à-dire calculer n.

$$J = \int\int \left\{ \left(\frac{\partial lg\, m}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial lg\, m}{\partial y} \right)^2 \right\} d\sigma = \text{minimum?}$$

$$\frac{\partial lg\, m}{\partial x} = \frac{1}{4 R^2} \left\{ (1 - n \cos 2a)\, 2\, x - 2n \sin 2a \cdot y \right\} = \frac{1}{4 R^2} \cdot A$$

$$\frac{\partial lg\, m}{\partial y} = \frac{1}{4 R^2} \left\{ (1 + n \cos 2a)\, 2y - 2n \sin 2a \cdot x \right\} = \frac{1}{4 R^2} \cdot B$$

$$A^2 + B^2 = 4x^2 (1 + n^2 \cos^2 2a - 2n \cos 2a) + 4n^2 \sin^2 2a\, (x^2 + y^2)$$
$$+ 4y^2 (1 + n^2 \cos^2 2a + 2n \cos 2a) - 16xy \cdot n \sin 2a$$

Appliquons les formules connues

$$\int\int (x^2 + y^2)\, d\sigma = J_{yy} + J_{xx} = J_p$$

où J_{yy}, J_{xx} et J_p sont respectivement des moments d'inertie rectangulaires et polaire.

$$\int\int xy \cdot d\sigma = C_{xy} \text{ (moment centrifuge.)}$$

Ce moment s'annule pour les directions *principales* 1, 2 ($C_{22} = o$) definies par l'angle θ:

$$\operatorname{tg} 2\,\theta = \frac{2\, C_{xy}}{J_{yy} - J_{xx}}; \qquad J_1 \text{ et } J_2 \text{ sont des extrêmums}$$

$$J_{xx} + J_{yy} = J_2 + J_2 = J_p \qquad J_{xx} - J_{yy} = \cos 2\,\theta\, (J_1 - J_2)$$

$$\int\int (A^2 + B^2)\, d\sigma = 4 \left\{ J_p + n^2 \cdot J_p + 2n \cos 2a\, (J_{xx} - J_{yy}) - \right.$$
$$\left. - 4\, n \sin 2a \cdot C_{xy} \right\} = 4 \left\{ J_p + n^2 \cdot J_p + 2n \cos 2a\, (J_{xx} - J_{yy}) \right.$$
$$\left. - 2n \sin 2a)\, (J_{yy} - J_{xx}) \operatorname{tg} 2\,\theta \right\}$$

Si le champ à projeter est limité par une ellipse, les directions principales 1, 2 coïncident avec les axes de cette courbe et on a donc $\theta = a$.

La fonction (F) de n à rendre *minimum* devient alors:

$$F(n) = n^2 J_p + 2n \cos^2 2\alpha (J_1 - J_2) + 2n \sin^2 2\alpha (J_1 - J_2)$$

$$= n^2 J_p + 2n (J_1 - J_2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial n} = 2n J_p + 2 (J_1 - J_2) = 0 \qquad n \cdot J_p = J_2 - J_1$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial n^2} = 2 J_p \, (> 0) \qquad n \cdot \frac{\pi ab}{4} (a^2 + b^2) = \frac{\pi ab}{4} (a^2 - b^2)$$

$$n = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

L'isomètre definie par le paramètre n coïncide donc avec l'ellipse qui limite le champ projeté.

Le calcul qui précède est élémentaire et adapté à la géodésie tandis que la théorie de G. Darboux est générale; elle n'est pas limitée à la projection plane de la sphère ni à une région dont la périphérie est de forme elliptique.

(A suivre.)

Schweizerischer Geometerverein

Geschäftsbericht für das Jahr 1943

1. Allgemeines

In in- und ausländischen Zeitungen und Zeitschriften ist schon viel über die Nachkriegsprobleme geschrieben worden. Wenn wir uns an die realen Grundlagen halten und nach ihnen die Aussichten unseres Berufsstandes in der ersten Nachkriegsperiode beurteilen, dann dürfen wir einen gedämpften Optimismus walten lassen. Unsere Güterversorgung wird uns infolge unzureichender Einfuhrmöglichkeiten und der dadurch bedingten Warenknappheit noch wohl schwierige Zeiten bringen. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit, weiter aus eigenem Boden zu gewinnen, was nur möglich ist. Die Güterzusammenlegungen und Meliorationsarbeiten werden also konsequent weiter geführt werden müssen zur Sicherung unserer Landesversorgung mit Lebensmitteln. Aber auch zur Bekämpfung allfälliger Arbeitslosigkeit bietet die Anhandnahme solcher Arbeiten ein nutzbringendes Mittel. Die Hochkonjunktur in Meliorationen brachte eine Einschränkung in der Durchführung der Grundbuchvermessungen. So hat sich eine Arbeitsreserve gebildet, die nur schon im Umfange der Vermessungen über die fertiggestellten Meliorationswerke ein großes Aktivum bedeutet.

Wir glauben also, daß der Geometerstand nicht den Kategorien Berufsangehöriger zuzuzählen ist, die Arbeitslosigkeit zu befürchten haben. Was uns aber trotzdem nur einen „gedämpften Optimismus" huldigen läßt, ist die Frage des Preises für die geleistete Arbeit. Ohne Zweifel wird auch beim Übergang von der Kriegs- zur Friedenswirtschaft noch lange eine Preisüberwachung funktionieren müssen, die festsetzt, wie in Berücksichtigung der Teuerung das Verhältnis von Vorkriegs- zu Kriegs- und Nachkriegsansätzen zu gestalten ist. Die Erfahrungen, die wir im Berichtsjahre bei den Verhandlungen mit der eidg. Preiskontrollstelle sammeln konnten, lassen uns für die Zukunft eine