Die Lösung der Normalgleichungen nach der Methode von Prof. Dr. T. Banachiewicz : sogenannte "Krakovianenmethode" [Schluss]

Autor(en): **Kamela, Czeslaw**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières**

Band (Jahr): **41 (1943)**

Heft 10

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-200756

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Die Lösung der Normalgleichungen nach der Methode von Prof. Dr. T. Banachiewicz

(sogenannte «Krakovianenmethode»)

Dipl. Ing. *Czesław Kamela*

(Schluß)

Zahlenbeispiel:

Man löse folgende Normalgleichungen auf:

$$\begin{aligned}
38{,}85x + 4{,}42y - 4{,}41z + 2{,}41t + 28{,}95 &= 0\\
+4{,}42x + 38{,}64y + 5{,}98z - 33{,}49t - 10{,}55 &= 0\\
-4{,}41x + 5{,}98y + 38{,}61z - 1{,}58t + 17{,}65 &= 0\\
+2{,}41x - 33{,}49y - 1{,}58z + 54{,}74t + 11{,}13 &= 0\\
\text{und } \underline{[pll] = 45{,}7665.}
\end{aligned}$$

Die ganzen Berechnungen können durch folgendes Schema dargestellt werden:

Tabelle I

In jeder Zeile steht oben A, unten H.

					S_A	S_H
+ 38,85	+ 4,42	— 4,41	+ 2,41	+ 28,95	+ 70,220	+ 70,220
″ ·	+ 38,64 + 38,137	+ 5,98 + 6,482	— 33,49 — 33,764	— 10,55 — 13,844	+ 5,000	— 2,989
″ ·	″ ·	+ 38,61 + 37,008	— 1,58 + 4,442	+ 17,65 + 23,290	+ 56,250	+ 64,730
″ ·	″ ·	″ ·	+ 54,74 + 24,167	+ 11,13 — 5,712	+ 33,210	+ 18,455
″ ·	″ ·	″ ·	″ ·	+ 45,7665 + 3,1613	+ 92,946	+ 3,161

$$\Sigma S_A = + 257{,}626$$

Tabelle II

Über der Trennungslinie I–G, unter dieser Linie G^{-1}.

					S_G	S_G^{-1}
1	−0,113771	+0,113541	−0,062033	−0,745174	+1,807437	+1,000000
−0,113771	1	−0,169966	+0,885334	+0,363007	−0,078365	+0,886229
+0,132851	−0,169966	1	−0,119758	−0,629323	+1,749081	+0,962885
−0,178668	+0,905689	−0,119758	1	−0,236338	+0,763662	+1,607263
$x =$ −0,912306	$y =$ +0,684019	$z =$ −0,657626	$t =$ +0,236338	1	+1,000000	+0,350424

Tabelle III wie (23)

+0,025740	1	.	.	.	$Q_{11} =$ +0,027877
+0,026221	+0,012944	1	.	.	$Q_{22} =$ +0,060944
+0,027021	+0,017649	+0,028888	1	.	$Q_{33} =$ +0,027614
+0,041379	+0,031922	+0,820273	+0,014342	.	$Q_{44} =$ +0,041379

$$G^{-1} \cdot S_G = \{ 0{,}9999 + 1{,}0000 + 1{,}0000 + 1{,}0000 + 1{,}0000 \}$$

$$H \cdot S_G = I \cdot S_A = \begin{Bmatrix} +\ 70{,}219 \\ +\ \ 5{,}000 \\ +\ 56{,}251 \\ +\ 33{,}209 \\ +\ 92{,}945 \end{Bmatrix} .$$

$$S_H \cdot S_G = S_A = 257{,}625 \text{ (soll sein } 257{,}626)$$

Eine etwas andere Methode der Lösung der Normalgleichungen unter Anwendung der Krakovianen ist folgende: Hierin ist der Krakovian A, ohne Absolutglieder

$$A = \begin{Bmatrix} [paa] & [pab] & [pac] \\ [pba] & [pbb] & [pbc] \\ [pca] & [pcb] & [pcc] \end{Bmatrix} \tag{38}$$

Weiter berechnen wir die Krakovianen $I-G$, H und G^{-1} und die Kontrollsumme S_A, S_H, S_{I-G} und S_{G-1}, den Krakovian M mit den Koeffizienten

$$\frac{1}{[paa]}, \quad \frac{1}{[pbb \cdot 1]}, \quad \frac{1}{[pcc \cdot 2]}$$ und den Krakovian N mit Koeffizienten

$$\sqrt{\frac{1}{[paa]}}, \quad \sqrt{\frac{1}{[pbb \cdot 1]}}, \quad \sqrt{\frac{1}{[pcc \cdot 2]}} \tag{39}$$

Hierauf berechnen wir die Krakovianen P und S_p.

$$P = \begin{Bmatrix} \frac{1}{[paa]} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{[pbb \cdot 1]} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{[pcc \cdot 2]} \end{Bmatrix} \cdot G^{-1*} \tag{40}$$

$$P = \begin{Bmatrix} \frac{1}{[paa]} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{[pbb \cdot 1]} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{[pcc \cdot 2]} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} g_{11}^{-1} & g_{21}^{-1} & g_{31}^{-1} \\ 0 & g_{22}^{-1} & g_{32}^{-1} \\ 0 & 0 & g_{33}^{-1} \end{Bmatrix} \tag{40*}$$

$$S_p = \begin{Bmatrix} S_{p11} \\ S_{p21} \\ S_{p31} \end{Bmatrix} \quad \text{wo} \quad \begin{aligned} S_{p11} &= p_{11} \\ S_{p21} &= p_{21} + p_{22} \\ S_{p31} &= p_{31} + p_{32} + p_{33} \end{aligned} \tag{40**}$$

Weiter berechnen wir den Krakovian R.

$$R = L \cdot P^* \tag{41}$$

$$R = \begin{Bmatrix} -[pal] \\ -[pbl] \\ -[pcl] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ 0 & p_{22} & p_{32} \\ 0 & 0 & p_{33} \end{Bmatrix} \tag{41*}$$

Die Unbekannten x_1, x_2, x_3 berechnen wir aus $X = R \cdot P$ (42)

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{Bmatrix} \tag{42*}$$

Nun berechnen wir die Koeffizienten Q und S_Q:

$$\underline{Q = P \cdot P} \tag{43}$$

$$Q = \begin{Bmatrix} q_{11} & 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} & 0 \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{Bmatrix} \tag{43*}$$

$$S_Q = \begin{Bmatrix} S_{Q11} \\ S_{Q21} \\ S_{Q31} \end{Bmatrix} \quad \text{wo} \quad \begin{aligned} S_{Q11} &= Q_{11} + Q_{12} + Q_{13} \\ S_{Q21} &= Q_{21} + Q_{22} + Q_{23} \\ S_{Q31} &= Q_{31} + Q_{32} + Q_{33} \end{aligned} \tag{43**}$$

Zur Kontrolle dienen uns:

$$\underline{S_{I-G} \cdot S_G^{-1} = \Sigma g_{ik}} \tag{44}$$

(ohne Koeffizienten g_{ik} für $i = k$)

Zweite Kontrolle:

$$\underline{\Sigma r^2_{ik} = [pll] - [pll \cdot k]} \tag{45}$$

(k = Anzahl der Unbekannten)

$$\underline{S_A \cdot X = - \{[pal] + [pbl] + [pcl]\}} \tag{46}$$

$$\underline{- [pal]\, x - [pbl]\, y - [pcl]\, z = \Sigma r^2_{ik} = [pll] - [pll \cdot k]} \tag{47}$$

$$\underline{\Sigma SQ_{ik} = \Sigma S^2_{pik}} \tag{48}$$

$$S_A \cdot S_Q = \text{Anzahl der Unbekannten} \tag{49}$$

also ist

$$\underline{S_{A11} \cdot S_{Q11} + S_{A21} \cdot S_{Q21} + S_{A31} \cdot S_{Q31}} \tag{49*}$$

$$\underline{= \text{Anzahl der Unbekannten}}$$

Als Schlußkontrolle dient

$$\underline{[pll \cdot k] = [pvv]} \tag{50}$$

Zahlenbeispiel:

$$\begin{aligned}
+ 459{,}00x - 308{,}00y - 389{,}00z + 244{,}00t - 507{,}00 &= 0\\
- 308{,}00x + 464{,}00y + 408{,}00z - 269{,}00t + 695{,}00 &= 0\\
- 389{,}00x + 408{,}00y + 676{,}00z - 331{,}00t + 653{,}00 &= 0\\
+ 244{,}00x - 269{,}00y - 331{,}00z + 469{,}00t - 283{,}00 &= 0
\end{aligned}$$

und $\underline{[pll] = + 1129{,}00}$

Die ganzen Berechnungen können durch nebenstehendes Schema dargestellt werden.

Beide Zahlenbeispiele wurden vom Verfasser während der Übungen über Ausgleichsrechnung an der ETH. unter Leitung von Herrn Prof. Dr. Baeschlin durchgeführt.

Wir wollen nun zur Untersuchung der Anzahl der Operationen schreiten, die bei der Lösung der Normalgleichungen mittels des Gaußschen Algorithmus, mittels der ersten und mittels der zweiten Krakovianenmethode durchgeführt werden. Diese ganze Untersuchung kann in Tabellen zusammengestellt werden unter der Bedingung, daß bei keiner Operation eine Rechenmaschine angewendet, bei der Krakovianenmethode Multiplikationen mit der Zahl eins nicht berücksichtigt werden und auch die Kontrollrechnung nicht eingerechnet wird.

Diese Zusammenstellung wurde so durchgeführt, daß in der ersten Tabelle nur die Operationen bei der Berechnung der Unbekannten x, y, z angegeben wurden, in der zweiten Tabelle jene Operationen, die bei der Berechnung der Koeffizienten Q benötigt wurden und in der dritten Tabelle die Summe aller Operationen (d. h. die Summe der Operationen aus der Tabelle I und Tabelle II).

Nr.	Tabelle I In jeder Zeile steht oben A, unten H				S_A S_H	M N	Tabelle II $J - G$				S_{I-G}	Tabelle III G^{-1}			S_{G-1}
1	+ 459,00	— 308,00	— 389,00	+ 244,00	+ 6,00 + 6,00	0,0021786 0,0466675	1	+ 0,671024	+ 0,847494	— 0,531590	+ 0,986928	1			
2	″ ·	+464,00 +257,325	+408,00 +146,972	—269,00 —105,270	+295,00 +299,026	0,003861 0,062338		1	— 0,571153	+ 0,409094	— 0,162059	+ 0,612024	1		
3	″ ·	″ ·	+676,00 +262,381	—331.00 — 64,086	+364,00 +198,295	0,0038112 0,061735			1	+ 0,244248	+ 0,244248	+ 0,464237	— 0,571153	1	
4	″ ·	″ ·	″ ·	+469,00 +280,574	+113,00 +280,574	0,00356412 0,059703				1		— 0,143689	+ 0,269591	+ 0,244248	1

Summe = + 0,934258 Aus Kontr. +0,934,258

Nr.	R	Tabelle IV P				S_P	X	Q				S_G
1	+ 23,664225	+ 0,046675	·	·	·	+ 0,046675	$x =$ + 0,212800	+ 0,004824				+ 0,007435
2	— 22,117100	+ 0,041830	+ 0,062338	·	·	+ 0,104168	$y =$ — 1,465084	+ 0,001459	+ 0,0053888			+ 0,005866
3	— 1,276635	+ 0,028660	— 0,035260	+ 0,061735	·	+ 0,055135	$z =$ — 0,197827	+ 0,001644	— 0,001942	+ 0,004023		+ 0,004595
4	— 8,161675	— 0,008579	+ 0,016095	+ 0,014582	+ 0,059703	+ 0,081801	$t =$ — 0,487276	— 0,000512	+ 0,000961	+ 0,000870	+ 0,000364	+ 0,004883
	L =	—[pal] = + 507,00	—[pbl] = —695,00	—[pcl] = —653,00	—[pdl] = + 283,00							ΣS_Q = 0,022779 Aus Kontr. = 0,022761

$\{ -[pal] - [pbl] - [pcl] - [pdl] = -558{,}00$
Aus Kontr. = —557,99

Kontr.: $-[pal]x - [pbl]y - [pcl]z - [pdl]t = [r^2] = +1117{,}404$

Kontr. = 3,999 (soll sein 4,000 = Anzahl der Unbekannten)

$[pll] = +1129{,}00$

$[r^2] = +1117{,}404 \quad [pvv] = 1129{,}00 - 1117{,}404 = +11{,}596$

Kontr.: $[pvv] = [pll \cdot k] = 1129{,}00 - 1117{,}404 = +11{,}596$

Tabelle I

Methode nach Gauß. Anzahl der Operationen bei der Berechnung der Unbekannten x, y, z...

Anzahl der Unbek.	Anzahl der Divisionen	Anzahl der Multiplikat.	Anzahl der Addit. u. Subtrakt.	Summe der Operationen
3	9	14	14	37
4	14	30	30	74
5	20	55	55	130
6	27	91	91	209
7	35	140	140	315
8	44	204	204	452
9	54	285	285	624
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
n	$\frac{n}{2}(n+3)$	$\sum_{i=1}^{i=n} n_i^2$	$\sum_{i=1}^{i=n} n_i^2$	$2\sum_{i=1}^{i=n} n_i^2 + \frac{n}{2}(n+3)$

Tabelle II

Methode nach Gauß. Anzahl der Operationen bei der Berechnung der Koeffizienten Q

Anzahl der Unbek.	Anzahl der Divisionen	Anzahl der Multiplik.	Anzahl der Addit. u. Subtrakt.	Summe der Operationen
3	6	8	5	19
4	10	20	14	44
5	15	40	30	85
6	21	70	55	146
7	28	112	91	231
8	36	168	140	344
9	45	240	204	489
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
n	$\frac{n}{2}(n+1)$	$\sum_{i=1}^{i=n} n_i(n_i-1)$	$\sum_{i=1}^{i=n} (n_i-1)^2$	$\sum_{i=1}^{i=n} \{2n_i(n_i-1)+1\}$

Tabelle III = Tabelle I + Tabelle II

Methode nach Gauß. Anzahl der Operationen

Anzahl der Unbek.	Anzahl der Divisionen	Anzahl der Multiplikat.	Anzahl der Addit. u. Subtrakt.	Summe der Operationen
3	15	22	19	56
4	24	50	44	118
5	35	95	85	215
6	48	161	146	355
7	63	252	231	546
8	80	372	344	796
9	99	525	489	1113
.	.	.	.	.
n	$n(n+2)$	$\sum_{i=1}^{i=n} n_i(2n_i-1)$	$\sum_{i=1}^{i=n}(2n_i^2-2n_i+1)$	$\sum_{i=1}^{i=n}\{n_i(4n_i-1)+2\}$

Tabelle I

Erste Krakovianenmethode. Anzahl der Operationen bei der Berechnung der Unbekannten $x, y, z \ldots$

Anzahl der Unbek.	Anzahl der Divisionen	Anzahl der Multiplikat.	Anzahl der Addit. u. Subtrakt.	Summe der Operationen
3	6	14	14	34
4	10	30	30	70
5	15	55	55	125
6	21	91	91	203
7	28	140	140	308
8	36	204	204	444
9	45	285	285	615
.	.	.	.	.
n	$\frac{n}{2}(n+1)$	$\sum_{i=1}^{i=1} n_i^2$	$\sum_{i=1}^{i=n} n_i^2$	$2\sum_{i=1}^{i=n} n_i^2 + \frac{n}{2}(n+1)$

Erste Krakovianenmethode

Tabelle II

Anzahl der Operationen bei der Berechnung der Koeffizienten Q

Anzahl der Unbek.	Anzahl der Divisionen	Anzahl der Multiplikat.	Anzahl der Addit. u. Subtrakt.	Summe der Operationen
3	3	8	3	14
4	4	15	6	25
5	5	24	10	39
6	6	35	15	56
7	7	48	21	76
8	8	63	28	99
9	9	80	36	125
.	.	.	.	.
n	n	$n^2 - 1$	$\frac{n}{2}(n-1)$	$\frac{n}{2}(3n+1) - 1$

Tabelle III

= Tabelle I + Tabelle II

Anzahl der Unbek.	Anzahl der Divis.	Anzahl der Multiplikat.	Anzahl der Additionen und Subtrakt.	Summe der Operationen
3	9	22	17	48
4	14	45	36	95
5	20	79	65	164
6	27	126	106	259
7	35	188	161	384
8	44	207	232	543
9	54	365	321	740
.	.	.	.	.
n	$\frac{n}{2}(n+3)$	$\sum_1^n n_i^2 + (n^2-1)$	$\sum_1^n n_i^2 + \frac{n}{2}(n-1)$	$2\sum_1^n n_i^2 + n(2n+1) - 1$

Zweite Krakovianenmethode

Tabelle I

Anzahl der Operationen bei der Berechnung der Unbekannten x, y, z

Anzahl der Unbek.	Anzahl der Divis.	Anzahl der Multiplikat.	Anzahl der Addit. u. Subtrakt.	Anzahl der Wurzel-ausziehg.	Summe der Operationen
3	6	20	10	3	39
4	10	40	26	4	80
5	15	70	50	5	140
6	21	110	83	6	220
7	28	160	126	7	314
8	36	220	180	8	436
9	45	290	246	9	581
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
n	$\frac{n}{2}(n+1)$	$10\left\{\sum_1^n n_i^2-2n_{i-1}\right\}$	$\sum_1^n S_i+\frac{3n}{2}(n-3)$ wo $S_i=1+2+3+..+i$	n	$\sum_1^n S_i+10\left\{\sum_1^n n_i^2-2n_{i-1}\right\}+n(2n-3)$

Tabelle II

Anzahl der Operationen bei der Berechnung der Koeffizienten Q

Anzahl der Unbek.	Anzahl der Divisionen	Anzahl der Multiplikat.	Anzahl der Additionen u. Subtrakt.	Summe der Operationen
3	–	10	4	14
4	–	20	10	30
5	–	35	20	55
6	–	56	35	91
7	–	84	56	140
8	–	120	84	204
9	–	165	120	285
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
n	—	$\sum_1^n S_i$	$\sum_1^{n-1} S_i$	$\sum_1^n n_i^2$

Zweite Krakovianenmethode

Tabelle II = Tabelle I + TabelleII

Anzahl der Unbek.	Anzahl der Divis.	Anzahl der Multiplikat.	Anzahl der Addit. u. Subtrakt.	Anzahl der Wurzel-auszieh.	Summe der Operationen
3	6	30	14	3	53
4	10	60	36	4	110
5	15	105	70	5	195
6	21	166	118	6	311
7	28	244	182	7	461
8	36	340	264	8	648
9	45	455	366	9	875
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
n	$\frac{n}{2}(n+1)$	$10\left\{\sum_1^n n_i^2-2n_{i-1}\right\}+\sum_1^n S_i$	$\sum_1^n S_i+\frac{3n}{2}(n-3)+\sum_1^{n-1} S_i$	n	$\sum_1^n n_i^2+n(2n-3)+\sum_1^n S_i+10\left\{\sum n_i^2-2n_{i-1}\right\}$

Sehr großen Einfluß auf die Genauigkeit der Berechnung der Unbekannten x, y, z... haben die nachfolgenden Operationen: Multiplikation, Division und Wurzelausziehung. Wenn wir die erste Tabelle für die Gaußsche Methode mit der ersten Tabelle für die erste Krakovianenmethode vergleichen, dann sehen wir sofort, daß die Anzahl der Multiplikationen gleich sind, gleichzeitig sind aber bei der ersten Krakovianenmethode weniger Divisionen als bei der Gaußschen Methode.

Dieses Verhältnis kann mittels folgender Gleichungen ausgedrückt werden: $\frac{n}{2}(n+3)$ für die Gaußsche Methode, $\frac{n}{2}(n+1)$ für die erste Krakovianenmethode. Beim Vergleich der zweiten Tabelle für die Gaußsche Methode mit der zweiten Tabelle der ersten Krakovianenmethode sehen wir, daß wenn die Anzahl der Divisionen für die erste Krakovianenmethode n beträgt, jene für die Gaußsche Methode $\frac{n}{2}(n+1)$ ist. Das Verhältnis bei den Multiplikationen ist $\Sigma ni\ (ni-1)$ für die Gaußsche Methode, n^2-1 für die erste Krakovianenmethode.

Der Vergleich der Tabellen III gibt uns ein Bild darüber, daß die erste Krakovianenmethode viel vorteilhafter ist, weil sie es gestattet,

viel Zeit zu ersparen und die Unbekannten x, y, z wie auch die Koeffizienten Q_{ii} viel genauer zu berechnen.

Beim Vergleich der Tabelle I für die Gaußsche Methode mit der Tabelle I für die zweite Krakovianenmethode bemerken wir, daß die Anzahl der Divisionen für die Gaußsche Methode der Anzahl der Divisionen und der Wurzelausziehungen zusammen für die zweite Krakovianenmethode gleich ist.

Die Anzahl der Multiplikationen bis zu 9 Unbekannten ist kleiner bei der Gaußschen Methode als bei der zweiten Krakovianenmethode, aber schon für mehr als 9 Unbekannte erfordert die zweite Krakovianenmethode weniger Operationen. Beim Vergleich der Tabellen II sehen wir, daß bei der zweiten Krakovianenmethode keine Divisionen vorhanden sind, hingegen ist aber die Anzahl der Multiplikationen bei der zweiten Krakovianenmethode kleiner als bei der Gaußschen Methode.

Dasselbe Ergebnis liefert der Vergleich der Tabellen III.

Die Krakovianenmethode besitzt folgende Vorteile:

a) Die Bestimmung der Unbekannten x, y, z... und der Koeffizienten Q ist genauer.
b) Während der Berechnung ist eine häufige Kontrolle möglich.
c) Wir können die ganze Berechnung in ein praktisches Schema zusammenfassen, ohne Rücksicht auf die Anzahl der Unbekannten.
d) Die Krakovianenmethode bietet eine große Zeitersparnis.
e) Sie eignet sich sehr gut zur Durchführung der Berechnungen mit Hilfe von Doppelrechenmaschinen und kann bei der Ausgleichungsrechnung eine sehr ausgedehnte Anwendung finden.

Der Verfasser möchte es nicht versäumen, Herrn Prof. Dr. C. F. Baeschlin für seine Hilfsbereitschaft bei der Bearbeitung des vorliegenden Themas seinen Dank auszusprechen.

Literatur

Prof. *T. Banachiewicz:* Was sind die Formeln neuer Art? Acta Astronom. c. Mai 1929, Krakau.
– Etudes d'analyse pratique. Cracovie, 1938.
  a) Einfluß der Gewichte auf die Resultate.
  b) Bemerkung zum Zentralblatt für Mathematik, Bd. 17, 416.
  c) Ordinary formulae, cracovians and matrices. Acta Astronom. c. 3, 1938, Juillet, Cracovie.
– On the computation of inverse arrays. Acta Astronom. c. 4. Avril 1939, Cracovie.
– a) Contrôle des opérations avec les cracoviens.
  b) Ein Beispiel der Krakovianentechnik. Acta Astronom. c. Décembre 1938, Cracovie.

Henry Jensen: Herleitung einiger Ergebnisse der Ausgleichungsrechnung mit Hilfe von Matrizen. Kopenhagen 1939.

Prof. Dr. *K. Weigel:* „Geodezja" Warschau, 1938 (in polnischer Sprache).