**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

**Herausgeber:** Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

**Band:** 41 (1943)

**Heft:** 9

**Artikel:** Die Lösung der Normalgleichungen nach der Methode von Prof. Dr. T. Banachiewicz : sogenannte "Krakovianenmethode"

**Autor:** Kamela, Czeslaw

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-200751

1 : 50 000 ist dringlich und duldet keine Verzögerung. Die Landestopographie ist an die heute geltenden gesetzlichen Erlasse und Verfügungen gebunden. Diese Regelung schließt eine spätere Überprüfung und Neuordnung der Kartennomenklatur, sei es für die Landeskarte 1 : 50 000 oder für die topographische Detailkarte 1 : 25 000, keineswegs aus. Sollten sich neue Namen und Schreibformen im Laufe der Zeit endgültig durchsetzen, so wird die Landestopographie diese Änderungen in die Neuauflagen der betreffenden Kartenblätter übernehmen und damit der Aufgabe der Kartennomenklatur und den Bedürfnissen der Kartenbenützer Genüge leisten. (Schluß folgt.)

# Die Lösung der Normalgleichungen nach der Methode von Prof. Dr. T. Banachiewicz

(sogenannte «Krakovianenmethode»)

Dipl. Ing. *Czesław Kamela*

Praktisch erfolgt die Lösung von linearen Gleichungen mit einer kleinen Anzahl von Unbekannten durch folgende Methoden: 1. a) die Eliminationsmethode, b) Substitution und c) Vergleichsmethode. 2. mittels Determinanten. 3. mittels Matrizen. 4. Gaußscher Algorithmus. Wenn wir lineare Gleichungen mit einer größeren Anzahl von Unbekannten lösen müssen, so wenden wir praktisch die Gaußsche Methode an, denn sie ist von den vier erwähnten die beste, obwohl sie große Aufmerksamkeit bei der Arbeit und noch mehr Zeit verlangt.

Es gelang Prof. Dr. T. Banachiewicz in Krakau eine neue Methode der Lösung von linearen Gleichungen mittels sogenannten „Krakovianen“ zu finden. Er hat über diese Methode eine Anzahl von Publikationen in den Acta Astronomica veröffentlicht. (Einige von diesen werden am Ende dieses Artikels im Literaturverzeichnis angegeben.) Prof. Dr. Banachiewicz hielt auch eine Anzahl von Vorträgen über die Anwendung der Krakovianen in der Astronomie und in der Geodäsie, unter anderen während des Kongresses der Baltischen Geodätischen Kommission in Helsinki 1933 und in der Geodätischen Sektion in Lemberg 1938. Auch der Professor für höhere Geodäsie in Warschau, Dipl.-Ing. E. Warchałowski (1939), hielt einen Vortrag über die Anwendung der Krakovianen.

Weil Normalgleichungen auch lineare Gleichungen sind, so sind sie auch mit Hilfe der Krakovianen lösbar. Einige Staaten haben zur Lösung von linearen Gleichungen die Krakovianenmethode in der Praxis eingeführt (z. B. Polen, Italien usw.).

Auch haben einige Autoren in ihren Lehrbüchern über Vermessungskunde und Ausgleichungsrechnung die Krakovianen berücksichtigt.

Zunächst seien die Hauptsätze der Krakovianenrechnung, die auch später verwendet werden, kurz angegeben. Mathematisch stellen die Krakovianen eine Art von Cayleyschen Matrizen dar, jedoch mit dem Unterschied, daß die letzteren sich für eine unmittelbare rechnerische

Operation nicht eignen, während das Krakovianensystem eine unmittelbare Berechnung erlaubt, denn es besitzt ein fertiges Rechnungsschema. Der analytische Fundamentalunterschied ist der, daß die Krakovianenprodukte im allgemeinen nicht nur kommutativ (wie die Matrizenprodukte), sondern auch nicht assoziativ sind. Die Krakovianentheorie unterscheidet sich von derjenigen der Cayleyschen Matrizen durch die Art der Multiplikation.

Die linearen Gleichungen von der Form:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

nennen wir lineare symmetrische Gleichungen, wenn $a_{ik} = a_{ki}$ (für alle Koeffizienten). „Krakovian A" nennen wir einen solchen Ausdruck, dessen Elemente aus den Koeffizienten der linearen Gleichungen bestehen und wir schreiben ihm, um ihn von den Determinaten und Matrizen unterscheiden zu können in der Form:

$$\mathrm{A} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{Bmatrix} \tag{2}$$

Das Produkt von zwei Krakovianen mit den Elementen $a$ und $b$ gibt einen Krakovianen des Elementes $c$, was wir wie folgt darstellen können:

$$\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{Bmatrix} \tag{3}$$

wobei wir die einzelnen Elemente $c_{ik}$ nach folgender Formel berechnen:

$$\underline{c_{ik} = a_{k1} \cdot b_{i1} + a_{k2} \cdot b_{i2} + a_{k3} \cdot b_{i3} + \ldots} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \text{also ist } c_{11} &= a_{11} \cdot b_{11} + a_{21} \cdot b_{21} + a_{31} \cdot b_{31} \\ c_{32} &= a_{13} \cdot b_{12} + a_{23} \cdot b_{22} + a_{33} \cdot b_{32} \end{aligned} \tag{4*}$$

Wenn in einem Krakovian A die Anzahl der Zeilen gleich derjenigen der Spalten ist, so nennen wir einen solchen Krakovian „quadratischer Krakovian" wie in (5).

$$\mathrm{A} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Bmatrix} \tag{5}$$

Wenn wir in einem Krakovian die Zeilen mit den Spalten vertauschen, dann erhalten wir einen neuen, den sogenannten „transponierten Krakovian", den wir mit $A^*$ bezeichnen.

$$A^* = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{Bmatrix} \tag{6}$$

Der symmetrische, quadratische Krakovian hat die Eigentümlichkeit, daß:

$$\underline{A = A^*} \tag{7}$$

Hauptdiagonale des Krakovians nennen wir jene Diagonale, welche durch die Elemente $a_{11}$ $a_{22}$ $a_{33}$ ... $a_{jj}$ läuft, wie in (8):

$$\left\{\begin{matrix} a_{11} & & & & & & \\ & a_{22} & & & & & \\ & & a_{33} & & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & a_{jj} \end{matrix}\right\} \tag{8}$$

$$I = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \tag{9}$$

Einheitskrakovian $I$ nennen wir jenen Krakovian, welcher die Koeffizienten $i_{jj} = 1$ und $i_{jk} = 0$ für $j \neq k$ hat. (9)

Für den symmetrischen quadratischen Krakovian gilt die Gleichung:

$$I \cdot A = A \tag{10}$$

Für die Krakovianen gelten die Regeln der Addition und Subtraktion.

Wenn wir zwei Krakovianen $L$ und $M$ besitzen, so erhalten wir durch ihre Addition (oder Subtraktion) einen neuen Krakovian $N$, wobei die Elemente $n$ nach folgender Regel berechnet werden.

$$n_{ij} = l_{ij} + m_{ij} \text{ (Addition)} \tag{11}$$

oder

$$n_{ij} = l_{ij} - m_{ij} \text{ (Subtraktion)} \tag{11*}$$

also

$$\begin{Bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{Bmatrix} \tag{11**}$$

und

$$\begin{Bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{Bmatrix} \tag{11***}$$

Gültig ist dieses Gesetz nur dann, wenn die Krakovianen dieselbe Dimension, d. h. dieselbe Höhe und Breite haben.

Die Reziproke des Krakovians $A$ nennt man einen neuen Krakovian, der durch $A^{-1}$ bezeichnet wird und folgende Bedingung erfüllt:

$$A^{-1} \cdot A = I \tag{12}$$

Man kann jeden Krakovian $A$ als Produkt von zwei Krakovianen $H$ und $G$ erhalten. Die Krakovianen $H$ und $G$ nennen wir „kanonische Krakovianen", welche dadurch charakterisiert werden, daß alle Elemente unter der Hauptdiagonale gleich Null sind:

$$\underline{A = H \cdot G} \tag{13}$$

$$A = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ 0 & h_{22} & h_{23} \\ 0 & 0 & h_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ 0 & g_{22} & g_{23} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{Bmatrix} \tag{13*}$$

wo $H = \begin{Bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ 0 & h_{22} & h_{23} \\ 0 & 0 & h_{33} \end{Bmatrix}$ und $G = \begin{Bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ 0 & g_{22} & g_{23} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{Bmatrix}$ (13**)

Unter Berücksichtigung der Normalgleichungen (symmetrische Lineargleichungen), kann man den Karkovian $A$ nach der Regel (13) in $H$ und $G$ zerlegen.

$$A = \begin{Bmatrix} [paa] & [pab] & [pac] & [pal] \\ [pba] & [pbb] & [pbc] & [pbl] \\ [pca] & [pcb] & [pcc] & [pcl] \\ [pla] & [plb] & [plc] & [pll] \end{Bmatrix} = \left\{ \underbrace{\begin{matrix} [paa] & [pab] & [pac] & [pal] \\ 0 & [pbb\cdot 1] & [pbc\cdot 1] & [pbl\cdot 1] \\ 0 & 0 & [pcc\cdot 2] & [pcl\cdot 2] \\ 0 & 0 & 0 & [pll\cdot 3] \end{matrix}}_{\substack{\parallel \\ H}} \right\} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \underbrace{\begin{matrix} 1 & \frac{[pab]}{[paa]} & \frac{[pac]}{[paa]} & \frac{[pal]}{[paa]} \\ 0 & 1 & \frac{[pbc\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]} & \frac{[pbl\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{[pcl\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\substack{\parallel \\ G}} \right\} \tag{14}$$

(15)

Nach Gleichung 11*) ist: $I - G = \begin{Bmatrix} -\frac{[pab]}{[paa]} & -\frac{[pac]}{[paa]} & -\frac{[pal]}{[paa]} \\ 0 & -\frac{[pbc\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]} & -\frac{[pbl\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]} \\ 0 & 0 & -\frac{[pcl\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]} \end{Bmatrix}$

Der Krakovian $G^{-1}$ hat alle Elemente über der Hauptdiagonale gleich Null.

$$G^{-1} = \begin{Bmatrix} \overset{-1}{g}_{11} & 0 & 0 \\ \overset{-1}{g}_{21} & \overset{-1}{g}_{22} & 0 \\ \overset{-1}{g}_{31} & \overset{-1}{g}_{32} & \overset{-1}{g}_{33} \end{Bmatrix} \tag{16}$$

Nach Gleichung (12) muß sein:

$$\begin{Bmatrix} \overset{-1}{g}_{11} & 0 & 0 \\ \overset{-1}{g}_{21} & \overset{-1}{g}_{22} & 0 \\ \overset{-1}{g}_{31} & \overset{-1}{g}_{32} & \overset{-1}{g}_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ 0 & g_{22} & g_{23} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \tag{17}$$

wobei
$$g_{jj}^{-1} = \frac{1}{g_{jj}} \tag{17*}$$

Zwecks Berechnung des Krakovians $H$, rechnen wir die erste Zeile des Krakovians $I - G$, also:

$$-\frac{[pab]}{[paa]} \quad -\frac{[pac]}{[paa]} \quad -\frac{[pab]}{[paa]}$$

Auf Grund der berechneten ersten Zeile des Krakovians $I - G$ berechnen wir die zweite Zeile des Krakovians $H$ durch Anwendung des Zusammenhanges:

$$\left\{[pbb \cdot 1] \; [pbc \cdot 1] \; [pbl \cdot 1]\right\} = \left\{\begin{matrix} [pab] & [pac] & [pal] \\ [pbb] & [pbc] & [pbl] \end{matrix}\right\} \left\{-\frac{[pab]}{[paa]}\right\} \tag{18}$$

Dann berechnen wir die zweite Zeile des Krakovians $I - G$:

$$-\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} \quad -\frac{[pbl \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}$$

Weiter berechnen wir die zweite Zeile des Krakovians $H$ aus:

$$\left\{[pcc \cdot 2] \; [pcl \cdot 2]\right\} = \left\{\begin{matrix} [pac] & [pal] \\ [pbc \cdot 1] & [pbl \cdot 1] \\ [pcc] & [pcl] \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} -\frac{[pac]}{[paa]} \\ -\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} \\ 1 \end{matrix}\right\} \tag{19}$$

Jetzt rechnen wir die dritte Zeile von Krakovian $I - G$:

$$-\frac{[pcl \cdot 2]}{[pcc \cdot 2]}$$

und schließlich:
$$\left\{[pll \cdot 3]\right\} = \left\{\begin{matrix} [pal] \\ [pbl \cdot 1] \\ [pcl \cdot 2] \\ [pll] \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} -\frac{[pal]}{[paa]} \\ -\frac{[pbl \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} \\ -\frac{[pcl \cdot 2]}{[pcc \cdot 2]} \\ 1 \end{matrix}\right\} \tag{20}$$

Wenn wir mehr als drei Unbekannte besitzen, ist die Rechnung dieselbe wie im obigen Beispiel mit drei Unbekannten.

Nach der Berechnung des Krakovians $H$, welcher mit den reduzierten Normalgleichungen identisch ist, könnten wir sukzessive die Unbekannten $x, y, z, \ldots$ wie mittels des Gaußschen Algorithmus berechnen. Bei Anwendung der Krakovianenmethode berechnen wir aber die Unbekannten $x, y, z \ldots$ mit Hilfe des Krakovians $I - G$, denn die Elemente der Hauptdiagonale des Krakovians $G$ sind gleich 1, also werden auch auf der Hauptdiagonale des Krakovians $G^{-1}$ dieselben Werte auftreten.

Berechnung einzelner Elemente des Krakovians $G^{-1}$:

$$
\begin{aligned}
\overset{-1}{g}_{21} &= \left\{ 1 \right\} \left\{ -g_{12} \right\} & \overset{-1}{g}_{32} &= \left\{ 1 \right\} \left\{ -g_{23} \right\} \\
\overset{-1}{g}_{31} &= \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \overset{-1}{g}_{21} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} -g_{13} \\ -g_{23} \end{matrix} \right\} & \overset{-1}{g}_{42} &= \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \overset{-1}{g}_{32} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} -g_{24} \\ -g_{34} \end{matrix} \right\} \\
\overset{-1}{g}_{41} &= \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \overset{-1}{g}_{21} \\ \overset{-1}{g}_{31} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} -g_{14} \\ -g_{24} \\ -g_{34} \end{matrix} \right\} & \overset{-1}{g}_{43} &= \left\{ 1 \right\} \left\{ -g_{34} \right\}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Die letzte Berechnung ergibt, daß die Elemente der ersten unteren Diagonale unter der Hauptdiagonale des Krakovians $G^{-1}$ gleich sind den Elementen der ersten oberen Diagonale über der Hauptdiagonale des Krakovians $I - G$, was man direkt eintragen kann.

Die letzte Zeile des Krakovians $G^{-1}$ gibt uns die gesuchten Unbekannten $x, y, z \ldots$

$$
\underline{x = \overset{-1}{g}_{41}, \quad y = \overset{-1}{g}_{42}, \quad z = \overset{-1}{g}_{43}}
\tag{22}
$$

Man überzeugt sich bald, daß die Berechnung des Krakovians $G^{-1}$ uns bei der Berechnung der Koeffizienten $Q_{ii}$ (der Hansenschen Gewichtsgleichungen) große Dienste leistet. Diese Koeffizienten $Q_{ii}$ berechnet man als Produkt der zwei Krakovianen:

$$
\left\{ \begin{matrix} \dfrac{1}{[paa]} \\ \dfrac{1}{[pbb \cdot 1]} \\ \dfrac{1}{[pcc \cdot 2]} \end{matrix} \right\}
\left\{ \begin{matrix} \left(\overset{-1}{g}_{11}\right)^2 & 0 & 0 \\ \left(\overset{-1}{g}_{21}\right)^2 & \left(\overset{-1}{g}_{22}\right)^2 & 0 \\ \left(\overset{-1}{g}_{31}\right)^2 & \left(\overset{-1}{g}_{32}\right)^2 & \left(\overset{-1}{g}_{33}\right)^2 \end{matrix} \right\}
= \left\{ \begin{matrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{33} \end{matrix} \right\}
\tag{23}
$$

Man muß nur zwei neue Krakovianen bilden. Der erste wird aus den Elementen

$$
\frac{1}{[paa]}, \quad \frac{1}{[pbb \cdot 1]}, \quad \frac{1}{[pcc \cdot 2]}
$$

bestehen; der zweite dagegen aus den quadratischen Elementen des Krakovians $G^{-1}$ unter Vernachlässigung der letzten Zeile (d. h. $x$, $y$, $z$ und $i$).

Zur Kontrolle der richtigen Berechnung der kanonischen Krakovianen $H$ und $G$ dient:

$$
H \cdot S_G = I \cdot S_A
\tag{24}
$$

$$\text{wo } S_G = \begin{Bmatrix} S_{G11} \\ S_{G21} \\ S_{G31} \\ S_{G41} \end{Bmatrix} \text{ und } \begin{array}{l} S_{G11} = g_{11} + g_{12} + g_{13} + g_{14} \\ S_{G21} = \quad\; g_{22} + g_{23} + g_{24} \\ S_{G31} = \qquad\quad g_{33} + g_{34} \\ S_{G41} = \qquad\qquad\quad g_{44} \end{array} \tag{25}$$

analog rechnen wir:

$$S_A = \begin{Bmatrix} S_{A11} \\ S_{A21} \\ S_{A31} \\ S_{A41} \end{Bmatrix} \text{ wo } \begin{array}{l} S_{A11} = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ S_{A41} = a_{41} + a_{42} + a_{43} + a_{44} \end{array} \tag{26}$$

Weiter rechnen wir $S_H$ und $S_G — 1$.

Die zweite Kontrolle ist:

$$S_H \cdot S_G = \Sigma S_A \tag{27}$$

wo $$\Sigma S_A = S_{A11} + S_{A21} + S_{A31} + S_{A41} \tag{27*}$$

Zur Kontrolle der Berechnung des Krakovians $G^{-1}$ dient:

$$S_G \cdot S_{G^{-1}} = \text{Anzahl der Zeilen} \tag{28}$$

oder $$G^{-1} \cdot S_G = (1 + 1 + 1 + 1) \tag{28*}$$

Letzte Kontrolle:

$$[pll \cdot k] = [pvv] \tag{29}$$

wo $k$ die Anzahl der Unbekannten ist.

*Ableitung der Formel* (22):

Wenn wie die Krakovianen $X$, $A$ und $L$ wie folgt bezeichnen:

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \qquad A = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Bmatrix} \text{ und } L = \begin{Bmatrix} -[pal] \\ -[pbl] \\ -[pcl] \end{Bmatrix} \tag{30}$$

wo $$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z \tag{31}$$

so ist $X \cdot A = L$ (32)

entsprechend den Normalgleichungen.

Aus (32) haben wir

$$X = L \cdot A^{-1} \tag{33}$$

Auf Grund der Beziehung

$$A^{-1} \cdot A = I \text{ und } A^{-1} = H^{-1} \cdot G^{-1} \tag{34}$$

ist also $$X = L \cdot I \cdot H^{-1} \cdot G^{-1} \tag{35}$$

weil

$$L \cdot I \cdot H^{-1} = \left\{ \begin{array}{c} -\dfrac{[pal]}{[paa]} \\ -\dfrac{[pbl \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} \\ -\dfrac{[pcl \cdot 2]}{[pcc \cdot 2]} \end{array} \right\} \qquad (36)$$

(36) ist identisch mit der letzten Spalte des Krakovians $I$–$G$.

$$X = \left\{ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -\dfrac{[pal]}{[paa]} \\ -\dfrac{[pbl \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} \\ -\dfrac{[pcl \,.\, 2]}{[pcc \cdot 2]} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} g_{11}^{-1} & 0 & 0 \\ g_{21}^{-1} & g_{22}^{-1} & 0 \\ g_{31}^{-1} & g_{32}^{-1} & g_{33}^{-1} \end{array} \right\} \qquad (37)$$

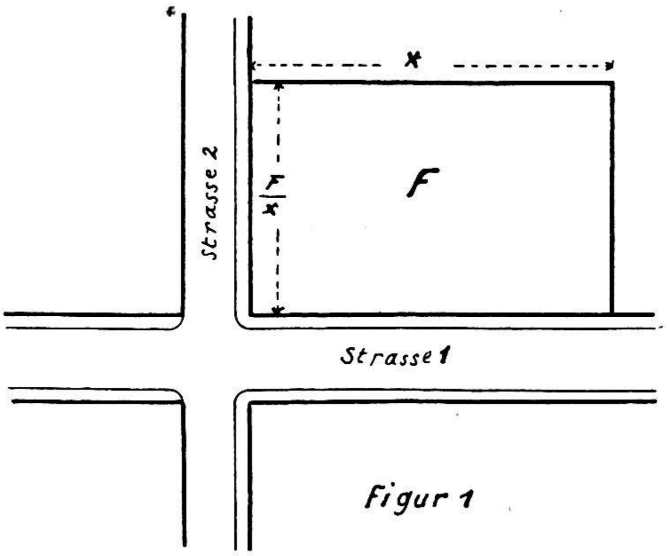
Auf gleiche Weise kann man die Formel (23) ableiten. (Fortsetzung folgt.)

# Verschiedenartige Auflösungen einer Minimumsaufgabe

Von *W. Leemann*, alt Kantonsgeometer

Ein *Grundstück*, welches an zwei sich rechtwinklich kreuzende Straßen zu liegen kommt, soll *Rechtecksform* mit *bestimmtem Flächeninhalt* $F$ erhalten. Es wird mit *Trottoirbeiträgen*, die pro Laufmeter $B_1$ bzw. $B_2$ Franken betragen, belastet werden. Der Geometer soll nun Länge und Tiefe des Grundstückes so bestimmen, daß die *Summe der beiden Trottoirbeiträge ein Minimum* wird.

*1. Auflösung.* Als naheliegendste Auflösung möge diejenige mit Hilfe der Differentialrechnung an die Spitze gestellt werden.



Figur 1

Setzt man die Länge des Grundstückes gleich $x$, so beträgt die Tiefe $\dfrac{F}{x}$.

Der Trottoirbeitrag an der Längsseite sei $B_1$, an der Tiefenseite $B_2$ pro Laufmeter. Setzt man die Summe der beiden Trottoirbeiträge gleich $y$, so ist

$$y = B_1 x + B_2 \frac{F}{x}$$

Das Minimum von $y$ wird bekanntlich so gefun-