

L'ellipsoïde d'erreur. Partie I

Autor(en): **Bachmann, W.K.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières**

Band (Jahr): **38 (1940)**

Heft 9

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-198527>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

und ihren Zweck ebensogut auf dem Revers des Planes erfüllen würden. Auf dem Avers sollten wirklich nur saubere Planschriften sichtbar sein.

In den letzten Jahren sind mir Originalübersichtspläne durch die Hände gekommen, die vor kurzer Zeit aufgenommen und jetzt schon in einem jämmerlichen Zustand sind: Fingerabdrücke, häßliche Flecken, die z. T. von Chemikalien herrühren, verwischte Zeichnung, gefranste Ränder; es geht in einzelnen Fällen so weit, daß eine saubere photographische Reproduktion bereits unmöglich ist.

Das sind Erscheinungen, die von einer mangelhaften Behandlung bei der Aufbewahrung und besonders bei der Weiterverwendung der Originale für die Reproduktion herrühren und leicht vermieden werden können. Jedes einzelne Blatt stellt ein kleines Vermögen dar; es ist Volksgut und dementsprechend zu behandeln.

Plan oder Karte. „Über die Frage, ob das Werk Übersichtsplan oder Übersichtskarte benannt werden sollte, finde ich folgende Anmerkung: „Im Plan soll die Darstellung aller darin enthaltenen Gegenstände maßstabgetreu, ohne Verzerrung und Verschiebung möglich sein, in der Karte ist das nicht mehr der Fall. Die Grenze wird ungefähr bei 1 : 10 000 liegen, deshalb besser Plan als Karte.“

Das waren im großen und ganzen die Überlegungen, die zur Erstellung der Anleitung von 1919 und den dazugehörigen Musterplänen führten. Seither fanden Änderungen statt (offizielle und versteckte!), ob zum Vor- oder Nachteil dieses großen Werkes, mögen andere entscheiden. Eines kann aber mit aller Sicherheit aus den langjährigen Erfahrungen mit unseren offiziellen Kartenwerken gesagt werden: Wenn die ständige, fortlaufende à jour-Haltung eines Kartenwerkes nicht von Anfang an sichergestellt und durchgeführt werden kann, so veraltet es innerhalb weniger Dezennien so sehr, daß es vorerst unzuverlässig und dann ganz unbrauchbar wird. Dies wird am ehesten erreicht, je größer die Anforderungen an unnützem Detail sind. Durch solche Maßnahmen werden die Karten zu Tode ausgebildet und das vom Volk hierfür anvertraute Geld verschwendet. Das gilt für Karten genau so wie für die Grundbuchpläne. Dem ist nur noch beizufügen, daß die Redaktion einer guten Karte ein äußerst schwieriges Gewerbe ist, die sinnlose Darstellung aller Erscheinungen zu irgendeinem Kartenbilde dagegen ein kindisches Spiel.

Bern, im Mai 1940.

L'ellipsoïde d'erreur.

Par *W. K. Bachmann*, géomètre officiel, licencié ès sciences.

L'ellipsoïde d'erreur est certainement l'une des créations les plus intéressantes de la théorie des erreurs. Elle trouve une application fréquente dans les calculs de triangulation d'ordre supérieur. Notons qu'il existe une littérature très complète traitant ce sujet, ce qui prouve déjà

l'intérêt général que ces questions présentent. La théorie de l'ellipsoïde d'erreur peut être abordée de trois manières différentes, à savoir:

- a) La méthode la plus immédiate est certainement celle qui a été développée dans l'ouvrage de Czuber intitulé « Theorie der Beobachtungsfehler ». L'auteur de cet ouvrage part directement de la loi de Gauss, et détermine ensuite, dans l'espace et dans le plan, les lieux de même probabilité, ce qui le conduit à l'ellipsoïde resp. à l'ellipse d'erreur.
- b) La seconde méthode consiste en une application de la théorie des équivalences partielles. Nous la trouvons sous une forme assez condensée dans l'ouvrage de Helmert « Ausgleichungsrechnung ». Cette théorie est en outre traitée avec un soin tout particulier dans le cours de M. le Professeur Baeschlin, intitulé « Ausgleichungsrechnung ».
- c) La troisième méthode se base sur la formule qui donne l'erreur moyenne sur une inconnue. On aboutit alors à la notion de l'ellipse d'erreur en imprimant une rotation au système des coordonnées, et en examinant la variation de l'erreur moyenne en fonction de l'angle de rotation.

La méthode que je suivrai dans cet exposé ressemble en bien des points à celle indiquée dans l'ouvrage de Czuber, mentionnée sous lettre a. Cependant, je suis arrivé à certaines simplifications qui méritent d'être signalées. En outre, je développerai dans la seconde partie une théorie nouvelle, s'appliquant à un nombre quelconque de variables et non seulement à deux ou trois. La théorie de l'ellipsoïde d'erreur à n dimensions ($n > 3$) n'a guère été envisagée jusqu'à présent et ceci pour la raison bien simple qu'elle ne semble trouver des applications pratiques. Ce dernier point de vue n'est toutefois pas du tout fondé; l'ellipsoïde d'erreur à n dimensions peut être appliqué à l'étude des réseaux trigonométriques. D'autre part, il introduit une certaine homogénéité dans les résultats. En effet, la théorie des moindres carrés nous fournit par exemple une formule toute prête pour le calcul de l'erreur moyenne d'une fonction des inconnues. Comme il s'agit de développements essentiellement analytiques, nous ne possédons aucune signification géométrique de cette formule. La méthode que je développerai donnera par contre une interprétation géométrique très simple de tous ces résultats.

I^{re} Partie.

Théorie géométrique de l'ellipse d'erreur.

1^o Rappel de quelques notions relatives à la théorie des erreurs.

La loi de Gauss s'écrit

$$dP = \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon;$$

dP est la probabilité pour que l'erreur vraie se trouve entre ε et $\varepsilon + d\varepsilon$. Par conséquent, la probabilité pour que l'erreur soit comprise entre ε_1 et ε_2 est donnée par

$$P_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon$$

Considérons N mesures affectées des erreurs vraies $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$. Par définition, l'erreur moyenne est

$$(1) \quad m^2 = \frac{\sum \varepsilon^2}{N} \quad \text{ou bien} \quad m^2 = \frac{\sum \varepsilon_i^2 n_i}{N} \quad \text{si } n_i$$

est le nombre des erreurs égales à ε_i dans les N mesures. Remarquons que le nombre $\frac{n_i}{N}$ représente la probabilité pour l'erreur ε_i dans l'ensemble des N mesures. En passant à la limite, la probabilité pour que l'erreur soit comprise entre ε et $\varepsilon + d\varepsilon$ est donnée par $\varphi(\varepsilon) d\varepsilon$, et l'on a ainsi pour l'erreur moyenne

$$m^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{2h^2}$$

Nous obtenons donc la relation suivante entre le paramètre de précision h et l'erreur moyenne m :

$$(2) \quad m^2 = \frac{1}{2h^2}$$

2. Introduction directe de l'ellipse d'erreur (Rappel).

Soit dans le plan un système quelconque de coordonnées rectilignes. Reportons un point au moyen de ses coordonnées X et Y . Ces coordonnées étant entachées de certaines erreurs, il y aura une certaine erreur à craindre sur la position du point ainsi reporté. Nous admettrons que l'erreur sur chacune de ces coordonnées suive la loi de Gauss. Ainsi, la probabilité pour que l'erreur vraie sur X soit comprise entre x et $x + dx$ est donnée par

$$dp_1 = \frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 x^2} dx$$

où les x sont comptés à partir de la position vraie du point. Nous avons de même pour Y

$$dp_2 = \frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2 y^2} dy$$

comme probabilité pour que l'erreur sur Y se trouve entre y et $y + dy$. Par conséquent, la probabilité pour que le point soit situé dans le parallélogramme $(x, y, x + dx, y + dy)$ est

$$dP = dp_1 \cdot dp_2 = \frac{h_1 h_2}{\pi} e^{-(h_1^2 x^2 + h_2^2 y^2)} dx dy$$

En tenant compte de l'équation (2), nous obtenons

$$(3) \quad dP = \frac{1}{2 \pi m_1 m_2} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{m_1^2} + \frac{y^2}{m_2^2} \right)} dx dy$$

Considérons le lieu des points pour lesquels on a $\frac{dP}{dx dy} = \text{constante}$; nous avons

$$(4) \quad \frac{x^2}{m_1^2} + \frac{y^2}{m_2^2} = \text{constante}, = \omega^2$$

Nous trouvons des ellipses homocentriques, ayant le point vrai pour centre, et qui sont rapportées à deux diamètres conjugués. Par définition, on appelle l'ellipse particulière

$$(5) \quad E: \boxed{\frac{x^2}{m_1^2} + \frac{y^2}{m_2^2} = 1}$$

l'ellipse d'erreur moyenne. Cette définition devient immédiatement plausible, si l'on remarque qu'elle intercepte sur les axes de coordonnées les segments m_1 et m_2 .

Il est intéressant de constater que tous les éléments, figurant au second membre de l'équation (3), ont une signification géométrique. En effet, soit φ l'angle compris entre les deux axes de coordonnées. Dans ce système, l'élément de surface est donné par

$$dA = dx \cdot dy \cdot \sin \varphi$$

Soit S la surface de l'ellipse d'erreur moyenne; nous avons

$$S = \pi \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \sin \varphi \quad \text{d'où}$$

$$(6) \quad dP = \frac{1}{2S} e^{-\frac{\omega^2}{2}} dA$$

ω admet également une interprétation géométrique. On montre en effet facilement que l'on a $\omega = \frac{\overline{PQ}}{\overline{PN}}$ (voir fig. 1).

La fig. 1 nous donne

$$\left(\frac{PQ}{PN}\right)^2 = \frac{x^2}{\xi^2} \quad \frac{\xi^2}{m_1^2} + \frac{\eta^2}{m_2^2} = 1 \quad \frac{y}{x} = \frac{\eta}{\xi} = k$$

$$\eta^2 = k^2 \xi^2$$

$$\frac{\xi^2}{m_1^2} + \frac{k^2 \xi^2}{m_2^2} = 1 \quad \xi^2 (m_2^2 + k^2 m_1^2) = m_1^2 m_2^2$$

$$\frac{x^2}{\xi^2} = \frac{x^2 (m_2^2 + k^2 m_1^2)}{m_1^2 m_2^2} = \frac{x^2}{m_1^2} + \frac{y^2}{m_2^2} = \omega^2 \text{ cqfd.}$$

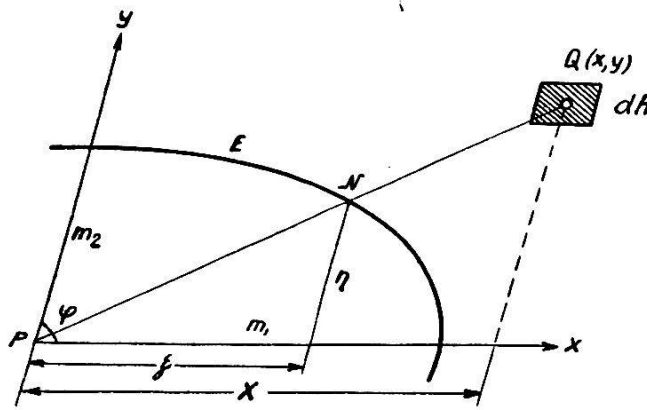


Fig. 1.

Nous déterminons maintenant la probabilité pour que le point P soit situé en dehors de l'ellipse d'erreur d'équation $\frac{x^2}{m_1^2} + \frac{y^2}{m_2^2} = \omega^2$. Dans ce but, nous considérons premièrement le secteur elliptique compris entre les ellipses ω et $\omega + d\omega$; nous avons

$$(6) \quad dP = \frac{1}{2S} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{m_1^2} + \frac{y^2}{m_2^2} \right)} dA$$

Posons maintenant

$$\frac{x^2}{m_1^2} + \frac{y^2}{m_2^2} = \omega^2 \quad \text{ou bien} \quad \frac{x^2}{\omega^2 m_1^2} + \frac{y^2}{\omega^2 m_2^2} = 1$$

Nous obtenons donc la représentation paramétrique

$$(7) \quad \begin{cases} x = m_1 \omega \cos \alpha \\ y = m_2 \omega \sin \alpha \end{cases}$$

Le point P décrit toute l'ellipse, si nous faisons varier le paramètre α de 0 à 2π . Au lieu des variables x et y , nous introduisons maintenant les nouvelles variables α et ω . L'expression (6) devient

$$dP = \frac{1}{2S} e^{-\frac{1}{2}\omega^2} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\omega, \alpha)} \right| d\omega \cdot d\alpha \cdot \sin \varphi$$

Calculons le jacobien

$$\frac{\partial x}{\partial \omega} = m_1 \cos \alpha \quad \frac{\partial y}{\partial \omega} = m_2 \sin \alpha$$

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = -m_1 \omega \sin \alpha \quad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = +m_2 \omega \cos \alpha$$

$$J = \begin{vmatrix} m_1 \cos \alpha & m_2 \sin \alpha \\ -m_1 \omega \sin \alpha & m_2 \omega \cos \alpha \end{vmatrix} = m_1 m_2 \omega$$

Nous trouvons

$$(8) \quad dP = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\omega^2} \omega d\omega d\alpha$$

Intégrons

$$Q = \frac{d\alpha}{2\pi} \int_0^\omega \omega e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega = -\frac{d\alpha}{2\pi} \left| e^{-\frac{\omega^2}{2}} \right|_0^\omega = \frac{d\alpha}{2\pi} \left(1 - e^{-\frac{\omega^2}{2}} \right)$$

$$P = \frac{1}{2\pi} \left(1 - e^{-\frac{\omega^2}{2}} \right) \int_0^{2\pi} d\alpha = 1 - e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

La probabilité pour que le point se trouve hors de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{m_1^2} + \frac{y^2}{m_2^2} = \omega^2$ est donc

$$(9) \quad P_{\omega, \infty} = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

Pour l'ellipse d'erreur moyenne, on a $\omega = 1$. La probabilité pour que le point tombe hors de l'ellipse d'erreur moyenne est donc

$$e^{-\frac{1}{2}} = 0,6065307$$

ce qui est un résultat bien connu.

3. Décomposition de l'ellipse d'erreur.

D'après ce qui précède, l'équation de l'ellipse d'erreur moyenne, rapportée à deux diamètres conjugués est

$$\frac{x^2}{m_1^2} + \frac{y^2}{m_2^2} = 1$$

Considérons maintenant un autre système de diamètres conjugués, et choisissons-le comme nouveau système de coordonnées x', y' (voir fig. 2). Dans ce nouveau système de coordonnées, l'ellipse d'erreur considérée aura pour équation

$$\frac{x'^2}{m_1'^2} + \frac{y'^2}{m_2'^2} = 1$$

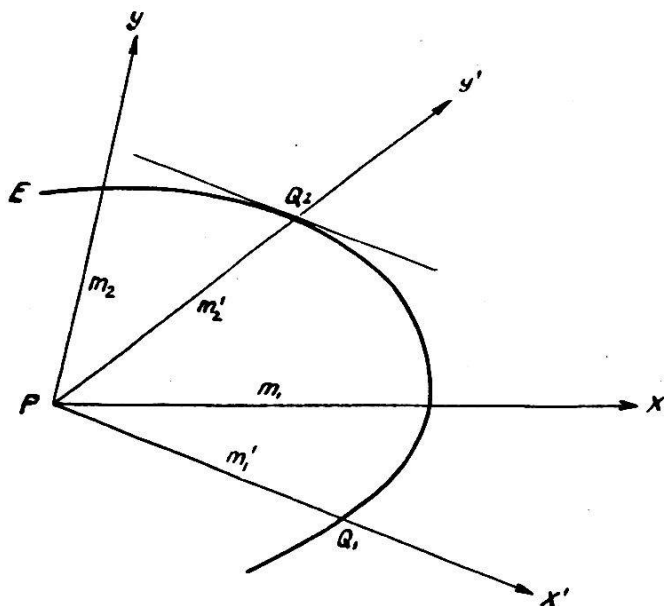


Fig. 2.

Si nous supposons maintenant que l'on ait reporté le point P , non pas dans le système x, y , avec les erreurs moyennes m_1 et m_2 , mais dans le nouveau système x', y' , avec les erreurs moyennes m_1' et m_2' , nous trouvons alors la même ellipse d'erreur moyenne. Il en résulte que le second report est, au point de vue des erreurs, équivalent au premier. Cette dernière propriété est d'une importance capitale pour toute la théorie géométrique de l'ellipse d'erreur.

Nous avons ainsi la possibilité de décomposer une loi de probabilité à deux dimensions en deux lois à une dimension. Réciproquement, nous pouvons déduire de deux lois à une dimension une loi unique à deux dimensions; dans ce dernier cas, on parle volontiers l'addition de deux vecteurs. On entend alors par l'expression « vecteur », le vecteur d'erreur

moyenne. Sur la fig. 2, \vec{PQ}_1 et \vec{PQ}_2 sont par exemple deux vecteurs et leur addition donne l'ellipse E . Le lecteur remarquera que cette addition diffère totalement de l'addition ordinaire de deux vecteurs.

4. Addition de vecteurs parallèles.

Si nous mesurons une grandeur X plusieurs fois avec des précisions différentes, et si x_1, x_2, \dots sont les valeurs obtenues, la valeur moyenne de l'inconnue est alors donnée par

$$(10) \quad X = \frac{[px]}{[p]}$$

et l'erreur moyenne sur X est

$$(11) \quad M = \pm \frac{m}{\sqrt{[p]}}$$

Dans la relation (11) m représente l'erreur moyenne sur l'unité de poids. Remarquons que nous avons

$$\frac{p_1}{1} = \frac{m^2}{m_1^2}$$

et (11) devient par conséquent

$$(12) \quad M^2 = \frac{1}{\sum \frac{1}{m_i^2}} \quad \text{d'où}$$

$$\frac{1}{M^2} = \sum \frac{1}{m_i^2}$$

Fort de ce qui précède, nous pouvons considérer les m_i comme vecteurs ayant tous la même direction et la même origine, et dont les longueurs sont respectivement $|m_i|$. La relation (12) nous définit alors l'addition de ces vecteurs parallèles. En désignant par P le poids de la moyenne X , nous avons

$$(13) \quad P = [p]$$

La relation (13) nous montre que l'addition de vecteurs parallèles s'effectue très rapidement, si l'on introduit non pas les erreurs moyennes, mais les poids.

5. Addition des ellipses d'erreur.

Nous allons montrer comment on peut additionner deux ou plusieurs ellipses d'erreur. Pour fixer les idées, supposons que l'on ait reporté un point P dans une première opération au moyen des coordonnées x et y ,

ce qui nous donne l'ellipse d'erreur moyenne E_1 . Reportons ensuite ce même point dans un autre système de coordonnées x', y' ; nous obtenons alors une seconde ellipse d'erreur moyenne E_2 . Dès lors, le problème que nous envisageons est le suivant: nous considérons simultanément les deux reports, et nous déterminons l'ellipse d'erreur moyenne E , relative aux deux reports en sachant que les vecteurs parallèles s'additionnent d'après la relation (12). La solution est immédiate. Il suffit en effet, pour obtenir l'ellipse E , de décomposer les deux ellipses suivant leurs diamètres conjugués communs et d'additionner ensuite les vecteurs parallèles en appliquant la relation (12). Nous obtenons ainsi deux diamètres conjugués de E , ce qui fait que l'ellipse d'erreur cherchée est complètement déterminée. Le problème est ainsi résolu.

S'il s'agit d'additionner un vecteur et une ellipse, nous procédons d'une manière tout à fait analogue; il suffit de décomposer l'ellipse, suivant deux diamètres conjugués, dont l'un coïncide avec le vecteur donné. L'addition des deux vecteurs parallèles s'effectue ensuite comme indiqué plus haut.

Il résulte de ce qui précède, que nous sommes maintenant en état d'additionner un nombre quelconque d'ellipses et de vecteurs; le problème se trouve ainsi complètement résolu au point de vue géométrique.

6. Application:

Détermination graphique de l'ellipse d'erreur dans le cas de l'intersection.

Nous allons montrer comment on peut déterminer graphiquement l'ellipse d'erreur moyenne, relative à deux visées extérieures, dans le cas où l'erreur moyenne sur les directions est connue. Le cas général, comportant n ($n > 2$) visées extérieures, se ramène immédiatement au cas de $n = 2$ comme il est facile de le voir.

Introduisons un système de coordonnées x, y , ayant son origine au point vrai P et dont les axes sont $Q_1 P$ et $Q_2 P$; Q_1 et Q_2 étant les deux stations (voir fig. 3).

Nous obtenons alors

$$dp_1 = \frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 x^2} dx = \frac{1}{m_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2}{m_1^2}} dx$$

$$dp_2 = \frac{1}{m_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{y^2}{m_2^2}} dy$$

$$dP = dp_1 dp_2 = \frac{1}{2\pi m_1 m_2} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{m_1^2} + \frac{y^2}{m_2^2} \right)} dx dy$$

Mais nous avons

$$m_1 = \frac{mr_1}{\cos \Theta} \qquad m_2 = \frac{mr_2}{\cos \Theta} \qquad \text{d'où}$$

$$dP = \frac{\cos^2 \Theta}{2 \pi m^2 r_1 r_2} e^{-\frac{1}{2} \frac{\cos^2 \Theta}{m^2} \left(\frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2} \right)} dx dy$$

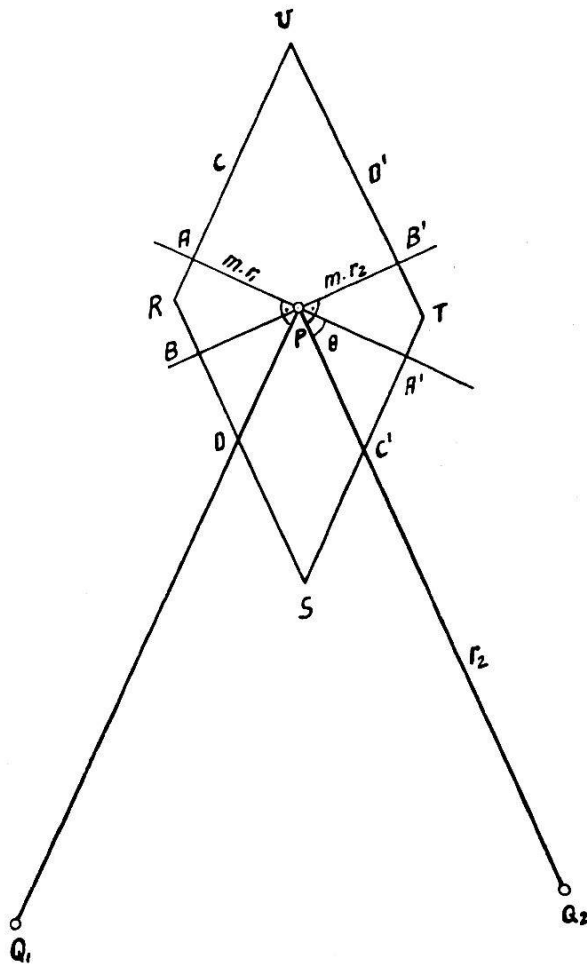


Fig. 3.

Les lieux de même probabilité sont par conséquent les ellipses

$$(14) \quad \frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2} = \omega^2$$

et l'ellipse d'erreur moyenne a pour équation

$$\frac{\cos^2 \Theta}{m^2} \left(\frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2} \right) = 1$$

Nous constatons que la famille d'ellipses (14) en contient une qui passe par les points Q_1 et Q_2 et ayant les droites PQ_1 , PQ_2 pour diamètres conjugués. Il suffit donc de connaître la position approchée du point P et l'erreur moyenne m pour pouvoir indiquer immédiatement la forme et la grandeur de l'ellipse d'erreur. On voit également que cette ellipse ne peut être un cercle que si les deux visées se coupent à angle droit et ont la même longueur.

A l'aide de ces données, il nous est facile de construire l'ellipse d'erreur moyenne. Si de nouvelles visées viennent s'ajouter, nous procédons alors par addition comme nous l'avons montré plus haut.

Dans le cas du relèvement, nous pouvons procéder d'une manière tout à fait analogue en utilisant les segments capables.

7. Détermination numérique de l'ellipse d'erreur moyenne.

Dans ce qui précède, nous avons étudié la constructions géométrique de l'ellipse d'erreur. Ces constructions ont certains avantages sur les

méthodes numériques chaque fois que les éléments du problème sont donnés sous forme graphique; elles fournissent alors immédiatement des renseignements très précieux sur la forme et la grandeur de l'ellipse. Ils existent cependant des cas, où la méthode analytique est plutôt indiquée; ceci aura lieu chaque fois que les éléments seront donnés sous forme numérique.

Soit Oxy un système de coordonnées rectangulaires (voir fig. 4). Déterminons un point quelconque dans ce système par l'intersection des deux droites

$$d_1 \equiv u_1 x + v_1 y = w_1$$

$$d_2 \equiv u_2 x + v_2 y = w_2$$

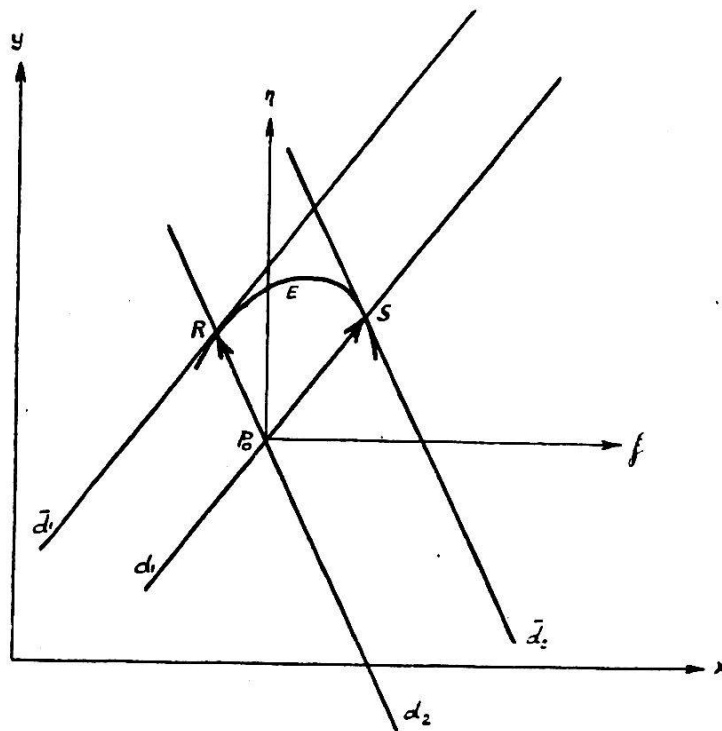


Fig. 4.

u, v, w sont les coordonnées tangentielles des droites. Introduisons un nouveau système de coordonnées ξ, η ayant son origine en P_0 , intersection de d_1 avec d_2 , et dont les axes sont respectivement parallèles à Ox et Oy . Dans ce nouveau système, les droites d_1 et d_2 ont pour équations

$$\begin{aligned} d_1 &\equiv u_1 \xi + v_1 \eta = 0 \\ d_2 &\equiv u_2 \xi + v_2 \eta = 0 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{cc} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{array} \right| \neq 0$$

Supposons maintenant que la coordonnée w de la droite (u, v, w) soit entachée d'une erreur m ; nous admettrons en outre que m suive la loi de Gauss. Les deux droites deviennent alors

$$\begin{aligned}\bar{d}_1 &\equiv u_1 \xi + v_1 \eta = \pm m \\ \bar{d}_2 &\equiv u_2 \xi + v_2 \eta = \pm m\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi deux vecteurs (erreurs) $\vec{P}_0\vec{R}$ et $\vec{P}_0\vec{S}$, ce qui résulte immédiatement de la théorie développée plus haut. Ces deux vecteurs peuvent être additionnés suivant le procédé ci-dessus, et nous obtenons une ellipse d'erreur moyenne E . Les vecteurs $\vec{P}_0\vec{R}$ et $\vec{P}_0\vec{S}$ sont deux diamètres conjugués de cette ellipse. Il s'agit maintenant de déterminer son équation dans le système ξ, η . Dans ce but, nous effectuons la substitution

$$\begin{aligned}\bar{\xi} &= u_1 \xi + v_1 \eta \\ \bar{\eta} &= u_2 \xi + v_2 \eta\end{aligned}$$

transformant l'ellipse E en un cercle. En effet, dans le système $\bar{\xi}, \bar{\eta}$, les droites $d_1, d_2, \bar{d}_1, \bar{d}_2$ ont pour équations

$$\begin{aligned}d_1' &\equiv \bar{\xi} = 0 \\ d_2' &\equiv \bar{\eta} = 0 \\ \bar{d}_1' &\equiv \bar{\xi} = \pm m \\ \bar{d}_2' &\equiv \bar{\eta} = \pm m\end{aligned}$$

et l'ellipse E a pour transformé le cercle

$$\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2 = m^2 \quad (\text{voir fig. 5}).$$

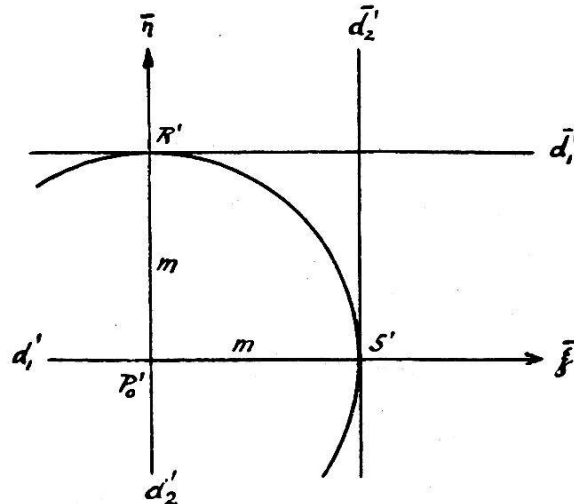


Fig. 5.

L'équation de E devient alors dans le système ξ, η

$$[uu] \xi^2 + 2 [uv] \xi \eta + [vv] \eta^2 = m^2$$

ce qui est l'équation cherchée.

8. *Addition numérique de deux ou plusieurs ellipses.*

Nous considérons premièrement deux ellipses et allons déterminer une règle d'addition très simple. Ces deux ellipses ayant le même centre, nous pouvons toujours déterminer deux diamètres conjugués communs. Cette propriété est évidente au point de vue géométrique; sa démonstration est du reste facile. Choisissons maintenant ces deux diamètres comme axes de coordonnées; ce système sera généralement oblique, mais cela est sans importance pour la suite des calculs. Nous rapportons alors ces deux ellipses à ce système de coordonnées et elles auront pour équations

$$E_1 \equiv A_1 \xi^2 + B_1 \eta^2 = m^2 \quad E_2 \equiv A_2 \xi^2 + B_2 \eta^2 = m^2$$

Sous cette forme, l'addition est immédiate puisque les diamètres conjugués s'additionnent d'après la formule

$$\frac{1}{M^2} = \sum \frac{1}{m_i^2}$$

Nous avons

$$E_1 \equiv \frac{\xi^2}{\frac{m^2}{A_1}} + \frac{\eta^2}{\frac{m^2}{B_1}} = 1 \quad E_2 \equiv \frac{\xi^2}{\frac{m^2}{A_2}} + \frac{\eta^2}{\frac{m^2}{B_2}} = 1$$

$$E \equiv \frac{\xi^2}{\frac{m^2}{A_1 + A_2}} + \frac{\eta^2}{\frac{m^2}{B_1 + B_2}} = 1$$

et par conséquent l'ellipse d'erreur résultante est donnée par l'équation

$$E \equiv (A_1 + A_2) \xi^2 + (B_1 + B_2) \eta^2 = m^2$$

Nous apercevons une règle très simple pour former l'équation de l'ellipse résultante; il suffit en effet d'additionner les premiers membres de leurs équations.

On peut se demander si cette propriété aura encore lieu pour un système d'axes quelconque. La réponse en est affirmative. En effet, rapportons ces deux ellipses à un système de coordonnées quelconque; soient

$$\varphi(\xi, \eta) = m^2 \quad \psi(\xi, \eta) = m^2$$

leurs équations. Formons ensuite le faisceau

$$\varphi(\xi, \eta) + \lambda \psi(\xi, \eta) = m^2$$

et tâchons de déterminer le paramètre λ de telle sorte que cette dernière équation nous donne l'ellipse résultante E . Dans ce but, nous introduisons une transformation des coordonnées permettant de passer du système

adopté au système formé par les deux diamètres conjugués communs. Soient x et y les nouvelles coordonnées. Les équations de ces deux ellipses deviennent alors

$$\bar{\varphi}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = m^2 \quad \bar{\psi}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = m^2$$

et le faisceau devient

$$\bar{\varphi}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) + \lambda \bar{\psi}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = m^2$$

Dans cette dernière équation, la valeur de λ doit être $= 1$ pour E , et par conséquent ce paramètre garde encore la même valeur dans l'ancien système cqfd. La règle énoncée est donc valable pour tout système de coordonnées rectilignes.

9. Addition d'un vecteur et d'une ellipse.

Ce dernier cas se traite très simplement, si nous appliquons les résultats obtenus dans le paragraphe précédent. En effet, soit la droite

$$ux + vy = \pm m$$

où m est l'erreur moyenne sur la coordonnée w . Cette droite peut être considérée comme ellipse dégénérée ayant pour équation

$$u^2 x^2 + v^2 y^2 + 2uvxy = m^2$$

Il en résulte que la règle d'addition énoncée plus haut reste encore valable dans le cas qui nous occupe: il suffit d'additionner les premiers membres des équations et de considérer la droite comme ellipse dégénéré. Nous aboutissons ainsi au *théorème fondamental* suivant: L'addition de deux ou plusieurs ellipses s'effectue par addition des premiers membres de leurs équations, le second membre étant m^2 .

10. Résumé des résultats obtenus.

Considérons un problème de compensation d'observations médiates; soient x et y les deux inconnues et

$$p_i = 1 \quad v_i = a_i x + b_i y + l_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

les équations aux erreurs. L'ellipse d'erreur moyenne a dans ce cas pour équation

$$[aa] \xi^2 + 2[ab] \xi \eta + [bb] \eta^2 = m^2$$

où ξ et η sont les erreurs vraies des inconnues.

Dans le cas d'observations d'inégale précision, nous trouvons

$$[paa] \xi^2 + 2 [pab] \xi \eta + [pbb] \eta^2 = m^2$$

Ce dernier résultat est immédiat, et il me semble superflu de donner d'autres détails à ce sujet.

11. Détermination de l'erreur moyenne des inconnues.

1^{re} méthode.

Soient X et Y les inconnues et ξ, η les erreurs vraies; nous portons de l'ellipse d'erreur moyenne

$$E \equiv [aa] \xi^2 + 2 [ab] \xi \eta + [bb] \eta^2 = m^2$$

Décomposons cette ellipse en prenant comme premier diamètre l'axe des η ; le diamètre conjugué $O \xi'$ est alors parfaitement déterminé (voir fig. 6).

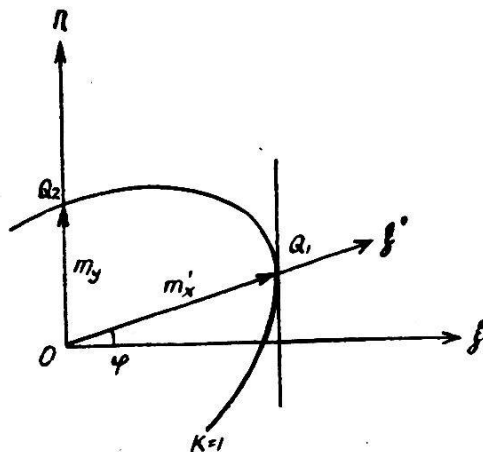


Fig. 6.

Nous obtenons ainsi les deux vecteurs \vec{OQ}_1 et \vec{OQ}_2 , ayant pour valeur absolue respectivement m_x , et m_y . Mais du même coup, nous obtenons aussi l'erreur moyenne sur X ; nous avons en effet

$$m_x = m_x' \cdot \cos \varphi$$

ce qui est immédiat.

Il s'agit par conséquent de déterminer le point Q_1 , intersection de l'ellipse avec l'axe des ξ' . On peut également déterminer l'angle φ . Nous pouvons toutefois procéder plus simplement, en remarquant qu'au point Q_1 la tangente à E est parallèle à l'axe des η . Pour trouver l'erreur moyenne m_x , il suffit de considérer l'ellipse d'erreur moyenne et de déterminer le ξ du point Q_1 , point où la tangente est parallèle à l'axe des η . Nous avons

$$([aa] \xi + [ab] \eta) d\xi + ([ab] \xi + [bb] \eta) d\eta = 0$$

Pour Q_1 , on a $\frac{d\eta}{d\xi} = \infty$ donc $[ab] \xi + [bb] \eta = 0$

Nous devons alors éliminer η entre les équations

$$[ab] \xi + [bb] \eta = 0$$

$$[aa] \xi^2 + 2 [ab] \xi \eta + [bb] \eta^2 = m^2$$

ce qui nous donne immédiatement

$$[aa \cdot 1] \xi^2 = m^2 \quad \text{d'où}$$

$$m_x^2 = \frac{m^2}{[aa \cdot 1]}$$

Nous aboutissons ainsi à un résultat bien connu.

12. Détermination de l'erreur moyenne d'une fonction des inconnues.

Soit l'ellipse d'erreur moyenne

$$E : [aa] \xi^2 + 2 [ab] \xi \eta + [bb] \eta^2 = m^2$$

Effectuons la substitution

$$\begin{aligned} \xi &= A \bar{\xi} + B \bar{\eta} \\ \eta &= P \bar{\xi} + Q \bar{\eta} \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{vmatrix} A & B \\ P & Q \end{vmatrix} \neq 0$$

L'ellipse E se transforme alors en

$$\bar{E} \equiv L \bar{\xi}^2 + 2 M \bar{\xi} \bar{\eta} + N \bar{\eta}^2 = m^2$$

et cette dernière équation nous permet de calculer la valeur maximum des variables $\bar{\xi}$ et $\bar{\eta}$. Les coefficients de la substitution étant arbitraires, $\bar{\xi}$ et $\bar{\eta}$ sont des fonctions linéaires arbitraires de ξ et de η . Il en résulte que nous sommes ainsi en état de calculer l'erreur moyenne sur une fonction linéaire quelconque des variables. Mais dans le calcul des erreurs, toute fonction peut être remplacée par une fonction linéaire; il suffit en effet de la développer en série au voisinage du point envisagé et de négliger ensuite les termes d'ordre supérieur au premier. Dès lors, le procédé indiqué nous permet de calculer l'erreur moyenne sur toute fonction des variables considérées.

13. Détermination de l'erreur moyenne des inconnues.

II^e méthode.

La méthode que nous allons indiquer est une simple application du paragraphe précédent.

Considérons la substitution linéaire

$$T \begin{cases} \xi = \bar{\xi} + B\bar{\eta} \\ \eta = \bar{\eta} \end{cases}$$

et calculons le transformé de l'ellipse

$$E : [aa] \xi^2 + 2 [ab] \xi \eta + [bb] \eta^2 = m^2$$

En déterminant B de telle sorte que le terme rectangle devienne nul

($B = -\frac{[ab]}{[aa]}$), nous trouvons

$$\bar{E} : [aa] \bar{\xi}^2 + [bb \cdot 1] \bar{\eta}^2 = m^2$$

L'erreur moyenne sur Y est ainsi

$$m_y^2 = \frac{m^2}{[bb \cdot 1]}$$

ce qui est également un résultat bien connu.

(A suivre.)

Bekanntmachung.

Das deutsche Formular zum Abschluß des Lehrvertrages über die Ausbildung zum Vermessungstechniker ist nunmehr gedruckt und kann beim unterzeichneten Zentralkassier zum Preise von Fr. 1.— pro Exemplar bezogen werden. Die Konferenz der deutschschweizerischen Lehrlingsämter hat das Vertragsformular genehmigt, es kann daher in allen deutschsprachigen Kantonen verwendet werden.

Die vom Verband aufgestellten Richtlinien über die Ausbildung des Hilfspersonals werden ebenfalls vom Zentralkassier zum Preise von Fr. —,50 pro Exemplar abgegeben.

Bern, im Juli 1940.

Der Zentralkassier:

P. Kübler

P. S. Dès que les cantons romands se seront également mis d'accord, une formule du contrat d'apprentissage sera imprimée en langue française. Les comités des sections romandes sont invités à s'entendre à ce sujet.
