Utilisation de la mire en invar pour la polygonation

Es darf also

$$\frac{(\Delta^2{}_{12})^2}{86\,400} \leqq 0.0005$$

$$(\Delta^2{}_{12})^2 \leqq 43.2$$

$$\Delta^2{}_{12} \leqq 6.^s5$$

Bis zu einem täglichen Gang von $\pm 6.^s5$ ergibt also die Differenz der täglich bestimmten Uhrkorrektionen auf Tausendstelsekunden korrekt den Gang der Uhr gegen mittlere Zeit.

Utilisation de la mire en invar pour la polygonation.

Par *W. K. Bachmann*, géomètre officiel, licencié ès sciences.

La mire horizontale en invar, fabriquée par la maison Wild, est utilisée depuis un certain nombre d'années en photogrammétrie pour la mesure optique de bases. Les parties essentielles de cette mire sont deux marques triangulaires, reliées par un fil en invar. Au moyen de ressorts, ce fil est tendu et la distance entre les deux marques triangulaires est toujours rigoureusement égale à 2 m. L'angle parallactique, qui permet la détermination de la distance, est mesuré au moyen du théodolite Wild T 2, qui donne directement la seconde centésimale.

Cet équipement n'a pour ainsi dire jamais été utilisé en Suisse pour la polygonation, et il me semble intéressant d'indiquer ici les résultats obtenus.

En ce qui concerne la précision de la détermination des distances au moyen de cet équipement, la maison Wild indique les formules suivantes:

$$\mu = \pm \frac{d}{4} \quad \text{pour} \quad 10 \leqq d \leqq 100 \text{ m}$$

$$\mu = \pm \frac{d^2}{400} \quad \text{pour} \quad d > 100 \text{ m}$$

qui supposent l'angle parallactique mesuré deux fois et où l'on a

d = distance, exprimée en mètres

μ = erreur moyenne, exprimée en mm

J'indique ici ces formules uniquement à titre de renseignement, étant donné qu'elles devraient être établies autrement pour les besoins de la pratique. D'autre part, le praticien ne se contente généralement pas de l'erreur μ, mais il préfère connaître une valeur approchée de l'erreur de fermeture des polygonales.

Le réseau polygonométrique servant de base à cette discussion a été établi en vue d'un lever topographique. Il en résulte que les polygonales ont en général une forme absolument arbitraire. Pour le genre de travail envisagé, la longueur des côtés varie entre 20 et 250 m. En dehors des zones bâties, les côtés sont généralement supérieurs à 100 m. L'expérience a cependant montré que des distances de 250 mètres peuvent sans autre être mesurées directement, sans qu'il soit nécessaire de sectionner le côté, ce qui ne peut être évité en utilisant un théodolite duplicateur. Dans ce cas, l'angle parallactique doit être déterminé 4 à 6 fois, ce qui nous donne une précision largement suffisante. Pour les côtés de longueur normale (50 m $< d <$ 150 m), il suffit de mesurer l'angle parallactique quatre fois; dans le but d'obtenir un contrôle rigoureux, il est indiqué de le mesurer deux fois en chaque sommet de polygone. Pour ce qui concerne les côtés inférieurs à 50 m, deux déterminations de l'angle parallactique seront largement suffisantes.

S'il est procédé de cette façon, et si l'opérateur travaille consciencieusement, *l'erreur linéaire de fermeture ne dépassera qu'exceptionnellement le 50 % de la tolérance II.* (Tables des tolérances de la mensuration cadastrale suisse.) Nous constatons en conséquence que la précision obtenue est très grande.

Quant à l'erreur angulaire, les résultats obtenus sont également très satisfaisants. La petite erreur angulaire de fermeture provient essentiellement du fait que le théodolite ainsi que la mire possèdent le centrage forcé. Ce dispositif nous permet d'obtenir un centrage parfait, même dans les cas où les sommets de polygones ne sont pas rigoureusement déterminés (milieu de piquets, etc.). Vu la grande précision du théodolite, il va sans dire qu'il serait absurde de mesurer les angles dans les deux positions de la lunette. Si les côtés de polygones ne sont pas trop courts (supérieurs à 20 m), l'erreur angulaire de fermeture ne dépassera rarement 2′ à 4′ et même avec des côtés inférieurs à 20 m, il sera toujours facile d'obtenir une erreur angulaire inférieure aux tolérances II, à condition de procéder avec soin.

Après ces considérations d'ordre pratique, il est indispensable d'ajouter quelques observations théoriques.

La maison Wild fournit avec la mire une table donnant directement la distance en fonction de l'angle parallactique. L'emploi de cette table est très simple et très rapide. Je ferai toutefois quelques observations à ce sujet. Pour les angles inférieurs à $0^g\,55'$ (c'est-à-dire pour les distances supérieures à 231 m), les centimètres ne figurent plus dans la table. Il est facile de concevoir les raisons théoriques qui ont amené le calculateur à procéder de cette façon. J'estime cependant que les centimètres devraient être indiqués jusqu'à une distance maximum de 250 m au moins, c'est-à-dire jusqu'à l'angle $0^g\,50'$. Ce n'est pas uniquement une question de précision, mais surtout une question de calcul. Nous savons en effet que lorsqu'il faut chercher une centaine ou davantage de valeurs dans une table, on procède finalement d'une façon tout à fait mécanique, et dans ce cas, la table doit contenir partout le même nombre de décimales. En outre, cette table indique les millimètres pour les distances inférieures à 101.86 m, c'est-à-dire pour les angles supérieurs à $1^{gr}25'$. Pour les mêmes raisons, il me semble indiqué de supprimer les mm étant donné qu'ils embrouillent le calculateur sans être d'aucune utilité pour les calculs.

La mire est rendue perpendiculaire à la ligne de visée au moyen d'un dioptre. Ce dernier est ajusté par la fabrique et ne peut être réglé par l'opérateur. Il est donc utile de savoir calculer l'influence d'une orientation imparfaite de la mire sur la mesure des distances. Dans ce qui suit, nous allons établir une formule pratique permettant de déterminer très rapidement l'erreur sur la distance en fonction de l'erreur d'orientation de la mire.

Par la suite, nous désignerons l'erreur d'orientation de la mire par φ (voir fig. 1); quoique nous la considérerons toujours assez petite, nous préférons ne pas introduire la notation différentielle afin d'éviter des confusions.

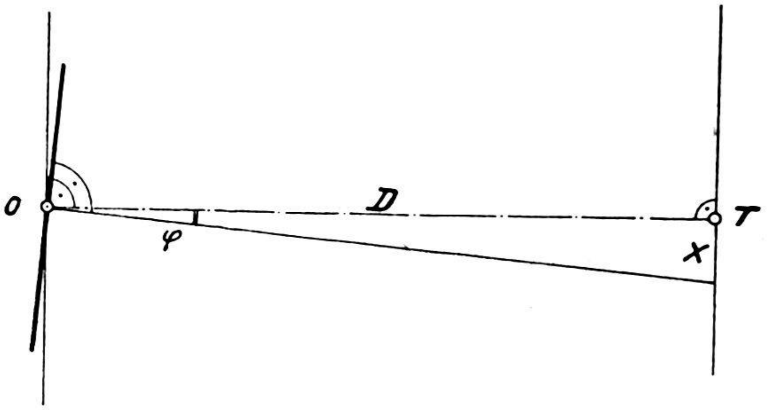

Fig. 1.

M = mire
T = théodolite
φ = erreur angulaire d'orientation
X = erreur linéaire d'orientation

Pour des raisons d'ordre pratique, nous introduirons dans la formule définitive à la place de φ la grandeur X que nous appellerons « erreur linéaire d'orientation ». Il est indiqué de procéder de cette façon vu que l'erreur linéaire d'orientation X peut facilement être estimée au moyen du dioptre, tandis que φ ne peut se déterminer directement.

Soit RS la mire ayant une longueur de 2 s (voir fig. 2). Le théodolite étant placé en T, il s'agit de calculer l'angle $\omega = \alpha_1 + \alpha_2$. Dans ce but, nous déterminons premièrement le segments $\overline{OM} = s_1$ et $\overline{ON} = s_2$. Nous obtenons

$$\begin{cases} s_1 = s \cdot \cos \varphi + s \sin \varphi \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 \\ s_2 = s \cos \varphi - s \cdot \sin \varphi \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 \end{cases}$$

et d'autre part $\operatorname{tg} \alpha_1 = \dfrac{s_1}{D}$ $\quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \dfrac{s_2}{D}$ ce qui nous donne

$$\left\{\begin{aligned} s_1 &= s \cdot \cos\varphi \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{s \cdot \sin\varphi}{D}} \\ s_2 &= s \cdot \cos\varphi \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{s\ \sin\varphi}{D}} \end{aligned}\right.$$

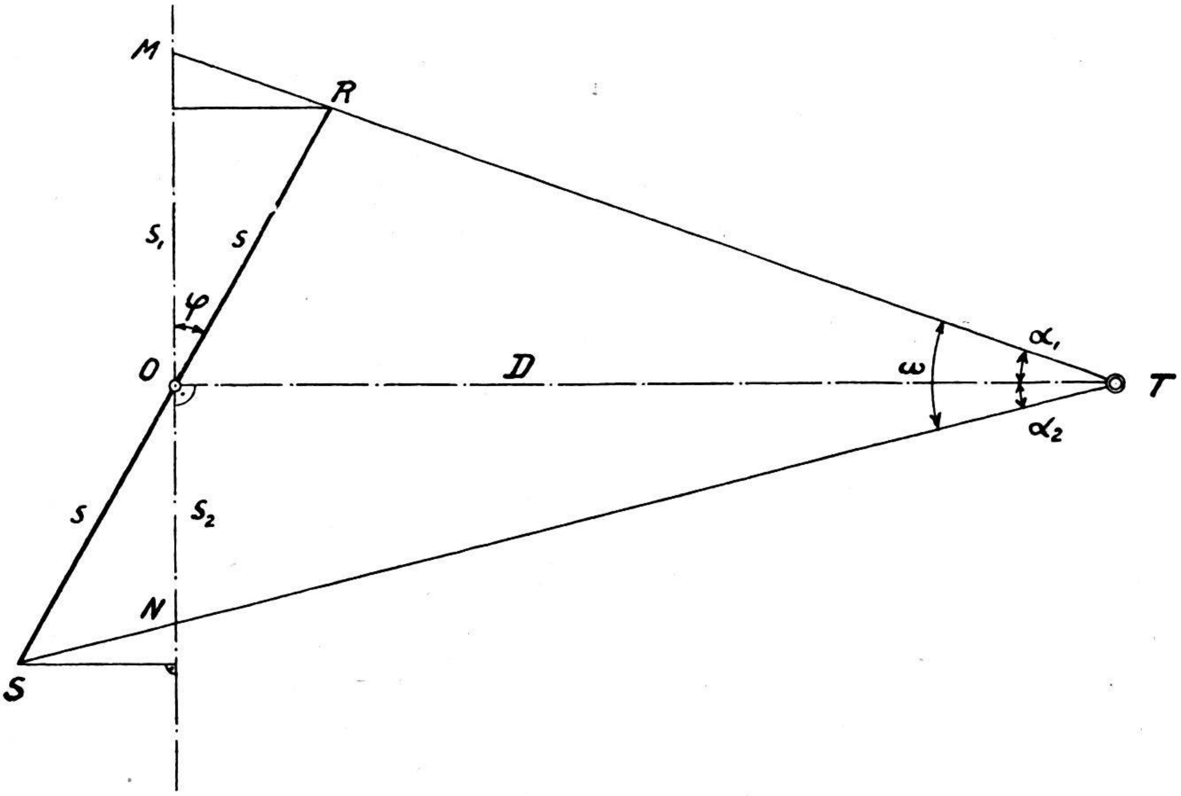

Fig. 2.

Développons maintenant ces expressions en séries en négligeant les termes d'ordre supérieur au second par rapport à φ. Remarquons que les séries que nous obtiendrons seront nécessairement convergentes, ce qui résulte du reste immédiatement du caraétère pratique du problème. Nous avons

$$\frac{1}{1 - \dfrac{s\ \sin\varphi}{D}} = 1 - \frac{s\ \sin\varphi}{D} + \frac{s^2}{D^2}\sin^2\varphi + \ldots = 1 - \frac{s}{D}\varphi + \frac{s^2}{D^2}\varphi^2 + \ldots$$

$$\frac{1}{1 + \dfrac{s\ \sin\varphi}{D}} = 1 + \frac{s}{D}\sin\varphi + \frac{s^2}{D^2}\sin^2\varphi + \ldots = 1 + \frac{}{D}\varphi + \frac{s^2}{D^2}\varphi^2 + \ldots$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} s_1 &= s\left(1 - \frac{\varphi^2}{2} + \ldots\right)\left(1 - \frac{s}{D}\varphi + \frac{s^2}{D^2}\varphi^2 + \ldots\right) \\ s_2 &= s\left(1 - \frac{\varphi^2}{2} + \ldots\right)\left(1 + \frac{s}{D}\varphi + \frac{s^2}{D^2}\varphi^2 + \ldots\right) \end{aligned}\right.$$

Développons ces expressions en négligeant toujours les termes supérieurs au second ordre:

$$(1) \qquad \begin{cases} s_1 = s\left[1 - \frac{s}{D}\,\varphi + \left(\frac{s^2}{D^2} - \frac{1}{2}\right)\varphi^2 + \ldots\right] \\ s_2 = s\left[1 + \frac{s}{D}\,\varphi + \left(\frac{s^2}{D^2} - \frac{1}{2}\right)\varphi^2 + \ldots\right] \end{cases}$$

La fig. 2 nous donne

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{s_1}{D} \qquad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{s_2}{D} \qquad \text{d'où}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{s_1}{D}\right) = \frac{s_1}{D} - \frac{1}{3}\left(\frac{s_1}{D}\right)^3 + \ldots \\ \alpha_2 = \operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{s_2}{D}\right) = \frac{s_2}{D} - \frac{1}{3}\left(\frac{s_2}{D}\right)^3 + \ldots \end{cases}$$

En négligeant les termes du 3e ordre en $\left(\frac{s_1}{D}\right)$ et en $\left(\frac{s_2}{D}\right)$, et en tenant compte des relations (1), nous trouvons

$$\omega = \alpha_1 + \alpha_2 = 2\,\frac{s}{D} + 2\,\frac{s}{D}\left(\frac{s^2}{D^2} - \frac{1}{2}\right)\varphi^2 + \ldots$$

$$= 2\,\frac{s}{D} - \frac{s}{D}\,\varphi^2 + \ldots$$

d'où

$$(2) \qquad \omega = \frac{s}{D}\,(2 - \varphi^2)$$

Supposons maintenant $\varphi = 0$ et soit α l'angle parallactique dans ce cas; nous avons

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{s}{D} \qquad \text{d'où}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \operatorname{Arc\,tg}\frac{s}{D} = \frac{s}{D} + \ldots$$

et en première approximation

$$(3) \qquad \alpha = 2\,\frac{s}{D}$$

Nous posons maintenant

$$(4) \qquad \Delta\alpha = \alpha - \omega$$

ce qui nous donne

$$(5) \qquad \Delta\alpha = \frac{s}{D}\,\varphi^2$$

(5) représente la formule d'erreur cherchée; pour l'application pratique, nous préférons la transformer dans le sens indiqué plus haut. Intro-

duisons à la place de φ l'erreur d'orientation linéaire X. La fig. 1 nous donne en première approximation

$$\varphi = \frac{X}{D}$$

Nous avons d'autre part pour la distance la formule approchée

$$a \cdot D = 2\,s$$

d'où en faisant varier a et D:

$$\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta D}{D} = 0$$

ce qui nous donne

$$\Delta a = -\frac{\Delta D}{D} \cdot a = -\frac{\Delta D}{D} \cdot \frac{2\,s}{D} = -2\,\frac{s}{D^2}\,\Delta D$$

La relation (5) devient par conséquent

$$(6) \qquad \boxed{\Delta D = -\frac{X^2}{2\,D}}$$

ce qui est la relation cherchée.

Afin de faciliter l'emploi de cette formule, nous avons construit le nomogramme indiqué sur la fig. 3, donnant immédiatement l'erreur sur la distance en fonction de l'erreur d'orientation linéaire X.

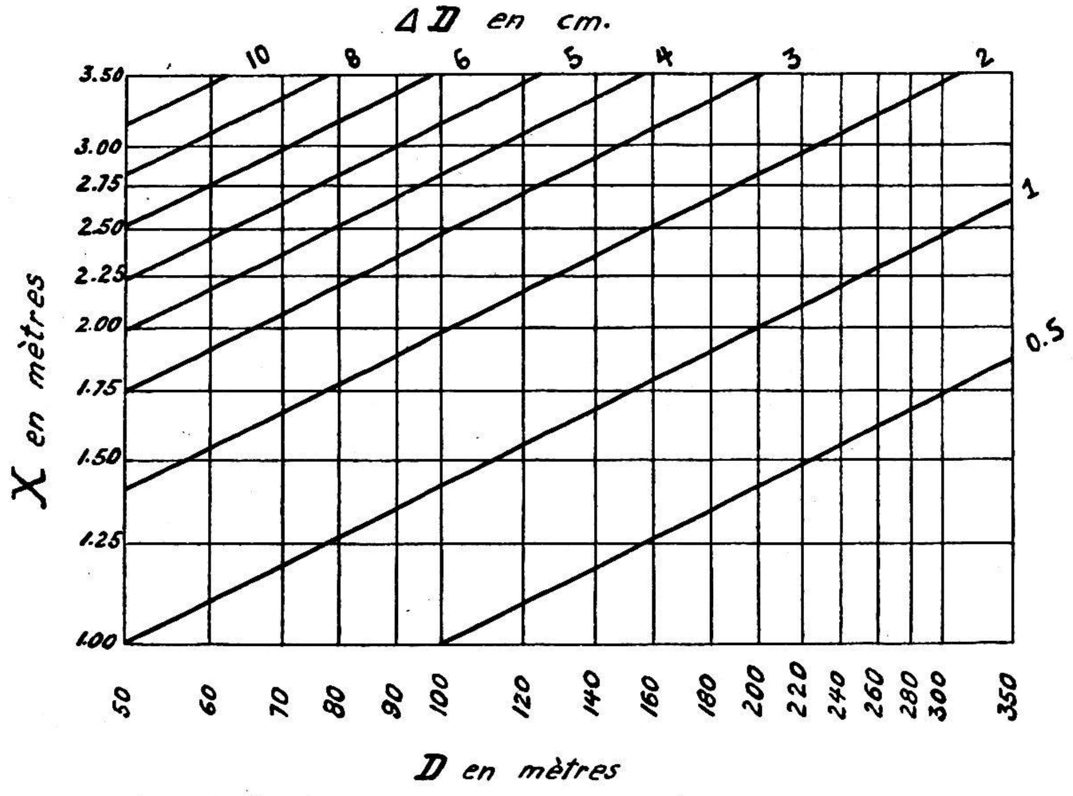

Fig. 3.