Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 38 (1940)

Heft: 1

Artikel: Eine einfache Herleitung der Flächenverzerrung, des Vergrösserungsverhältnisses und der Azimutreduktionen bei der winkeltreuen Zylinderprojektion

Autor: Kobold, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-198509

Eine einfache Herleitung der Flächenverzerrung, des Vergrößerungsverhältnisses und der Azimutreduktionen bei der winkeltreuen Zylinderprojektion.

Von *F. Kobold*, Dipl.-Ing., Bern.

Das Projektionssystem der schweizerischen Landesvermessung besteht bekanntlich darin, daß die auf dem Ellipsoid gemessenen Größen winkeltreu auf eine Kugel und von dieser wiederum winkeltreu auf einen diese berührenden Zylinder abgebildet werden. Die Herleitung der Formeln für die Übertragung vom Sphäroid auf die Kugel ist in ihrer klassischen, auf Gauß zurückgehenden Form in die Handbücher der Vermessungskunde übergegangen[1]. Dagegen sind zur Herleitung der Formeln, die von der Abbildung auf der Kugel zur Abbildung auf dem Zylinder führen, was uns im folgenden allein beschäftigt, verschiedene Wege möglich.

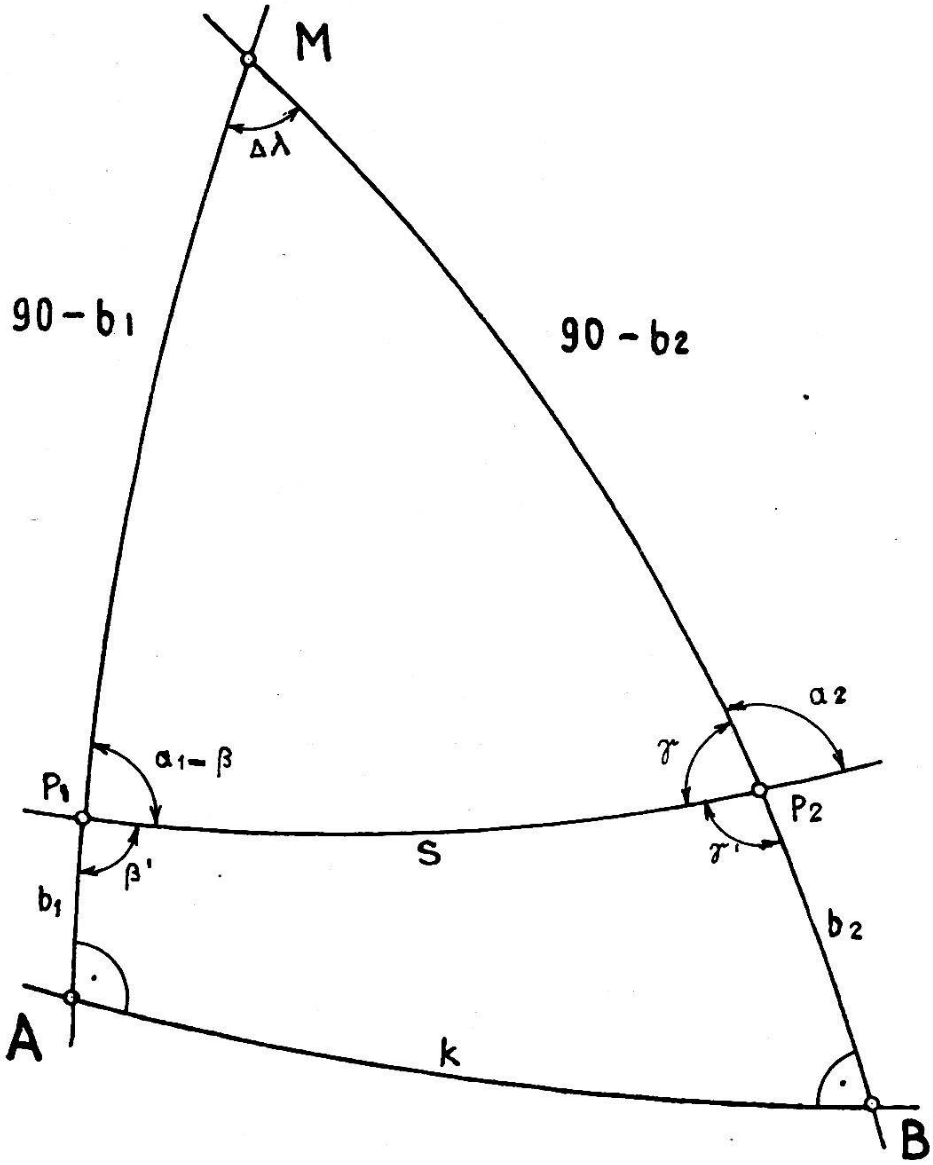
Bekanntlich ersetzen wir die Abbildung der geodätischen Linie auf der Kugel durch den Großkreis, um mit sphärischen Formeln rechnen zu können, und analog benutzen wir als Abbildung dieses Großkreises auf dem abgewickelten Zylindermantel die Gerade zwischen den zwei projizierten Endpunkten, damit wir alle Probleme als ebene behandeln können.

Durch die Projektion und durch die Verwendung der Geraden an Stelle der Großkreisbilder entstehen Verzerrungen an der Länge des Bogenstückes und an den Winkeln zwischen Großkreis und Meridian (sogenannte Azimutreduktionen). Außerdem treten Verzerrungen an durch Großkreise begrenzten Flächen auf, wobei es zur Erfassung einer beliebigen Verzerrung genügt, diejenige eines sogenannten Kugeltrapezes zu kennen. Jordan und Rosenmund geben keine Anhaltspunkte für die Flächenverzerrung des Trapezes. Die Herleitungen für die Längenverzerrungen und Azimutreduktionen gehen bei Jordan von den Differentialformeln für die abgebildete Linie aus, während Rosenmund, in Anlehnung an Schreiber (Zeitschrift für Vermessungswesen, 1899) alle Formeln streng aus dem sphärischen Dreieck herleitet. Die Entwicklungen beider Autoren sind jedoch sehr langwierig.

Die hier gezeigte Entwicklung geht ebenfalls vom sphärischen Dreieck aus, benutzt aber andere Formeln als Rosenmund. Diese erlauben, höhere Glieder, die Rosenmund berücksichtigt, von Anfang an wegzulassen, weil sich leicht zeigen läßt, daß sie auf die Endformeln ohne jeden Einfluß sind. Dadurch werden alle Herleitungen wesentlich kürzer.

---

[1] Jordan-Eggert, III. Band; speziell für das Projektionssystem der Schweiz: Rosenmund: Die Änderung des Projektionssystems der schweizerischen Landesvermessung, 1903.



In der folgenden Herleitung wird vom sphärischen Dreieck P_1P_2M (s. Figur), gebildet durch ein Großkreisbogenstück s und die durch dessen Endpunkte, normal zum Berührungskreis k gelegten Großkreise, ausgegangen. Die Großkreisstücke AP_1 und BP_2 haben die Größen b_1 und b_2 (Breiten); ihre Winkel mit dem Großkreis P_1P_2 seien a_1 und a_2; der Längenunterschied auf dem Großkreis k sei $\Delta\lambda$ (Länge). In dem sphärischen Dreieck sind für unsere Untersuchung daher b_1, b_2 und $\Delta\lambda$ als bekannt vorauszusetzen. Aus ihnen lassen sich die gesuchten Größen (sphärischer Exzeß ε, Großkreisbogenlänge s, Azimute in P_1 und P_2) nach dem Formeln der sphärischen Trigonometrie bestimmen, wobei sich die Halbwinkelsätze am besten eignen. Da Breiten und Längen kleine Größen sind, dürfen ihre Funktionen in Reihen entwickelt werden. In den so erhaltenen Formeln werden die Kugelkoordinaten durch Projektionskoordinaten ersetzt, entsprechend den Gesetzen der winkeltreuen Zylinderprojektion, nämlich

$$\Delta\lambda = y_1 - y_2 = \Delta y$$

$$b = x - \frac{x^3}{6} \ldots.$$

Durch geeignete Zusammenfassung der Ausdrücke läßt sich erreichen, daß die entstehenden Hauptglieder eine geometrische Bedeutung in der ebenen Projektion erhalten, so daß die übrig bleibenden kleinen Glieder als Projektionsverzerrungen anzusprechen sind.

Dies ist der Gedanke der nun folgenden Untersuchungen.

1. *Die Flächenverzerrung des Kugeltrapezes ABP_1P_2.*

Führt man in der Figur die Hilfsgrößen β, γ, β' und γ' ein, und bezeichnet man mit ε den sphärischen Exzeß des Kugeltrapezes ABP_1P_2, so wird

(a) $$\beta' + \gamma' = 2\,R + \varepsilon$$ und daraus

(b) $$\varepsilon = 2\,R - (\beta + \gamma)$$ oder

(c) $$\underline{\varepsilon = a_1 - a_2}$$

Der sphärische Exzeß des Kugeltrapezes ist also gleich der Differenz der Azimute in den Punkten P_1 und P_2. Bildet man jetzt zur Berechnung von ε auf Grund der Gleichung (b)

$$\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{\cos\frac{\Delta\lambda}{2}\cdot\cos\frac{(90-b_2)-(90-b_1)}{2}}{\sin\frac{\Delta\lambda}{2}\cdot\cos\frac{(90-b_2)+(90-b_1)}{2}}$$

und setzt

$$\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\varepsilon}{2}$$

so gilt in aller Strenge für den sphärischen Exzeß des Kugeltrapezes

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sin\frac{\Delta\lambda}{2}\cdot\sin\frac{b_2+b_1}{2}}{\cos\frac{\Delta\lambda}{2}\cdot\cos\frac{b_2-b_1}{2}} \tag{1}$$

Da $\Delta\lambda$ und b kleine Größen sind, darf dieser Ausdruck bei gliedweiser Entwicklung in Reihen geschrieben werden

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^3 = \frac{\left(\frac{\Delta\lambda}{2} - \frac{\Delta\lambda^3}{48}\right)\left(\frac{b_1+b_2}{2} - \frac{(b_1+b_2)^3}{48}\right)}{\left(1 - \frac{\Delta\lambda^2}{8}\right)\left(1 - \frac{(b_1-b_2)^2}{8}\right)}$$

oder durch Ausmultiplizieren der Glieder auf der rechten Seite

$$\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^3=\frac{\Delta\lambda}{4}(b_2+b_1)-\frac{\Delta\lambda}{96}(b_2^3+3\,b_1\,b_2^2+3\,b_1^2\,b_2+b_1^3)-\frac{\Delta\lambda^3}{96}(b_2+b_1)$$

$$-\frac{\Delta\lambda}{96}(-3b_2^3+3b_1b_2^2+3b_1^2b_2-3b_1^3)+\frac{\Delta\lambda^3}{32}(b_2+b_1)$$

$$\varepsilon+\frac{2}{3}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^3=\frac{\Delta\lambda}{2}(b_2+b_1)+\frac{\Delta\lambda}{24}(b_2^3-3b_1b_2^2-3b_1^2b_2+b_1^3)+\frac{\Delta\lambda^3}{24}(b_2+b_1) \quad (2)$$

Das Glied mit $\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^3$ würde auf der rechten Seite zu Ausdrücken sechster Ordnung führen; es kann daher vernachlässigt werden. Setzt man nun in (2) an Stelle der sphärischen die Projektionskoordinaten, so wird

$$\varepsilon=\frac{\Delta y}{2}(x_2+x_1)+\frac{\Delta y}{24}(x_2^3-3\,x_1\,x_2^2-3\,x_2\,x_1^2+x_1^3)+\frac{\Delta y^3}{24}(x_2+x_1)$$

$$+\frac{\Delta y}{24}(-2\,x_2^3 \qquad\qquad -2\,x_1^3)$$

$$\varepsilon=\frac{\Delta y}{2}(x_2+x_1)-\frac{\Delta y}{24}(x_2+x_1)^3+\frac{\Delta y^3}{24}(x_2+x_1) \quad (3)$$

Dies ist der endgültige Wert für den sphärischen Exzeß des Kugeltrapezes, oder auch — wie bereits gesagt — die Differenz der Azimute in P_1 und P_2.

Bekanntlich ist der sphärische Exzeß der Flächeninhalt des Trapezes selbst. Da aber das erste Glied in (3) nichts anderes als den Flächeninhalt des ebenen Trapezes darstellt, bilden die zwei letzten Glieder die Flächenverzerrung. Auf dem Wege über die Azimutreduktionen hat in dieser Zeitschrift Herr Kantonsgeometer Leemann dieselbe Formel hergeleitet (Jahrgang 1934) und ich habe sie später durch unmittelbare Integration bestätigt.

2. *Das Vergrößerungsverhältnis der Seite s.*

Aus demselben sphärischen Dreieck folgt

$$\cos\frac{s}{2}=\frac{\cos\frac{\Delta\lambda}{2}\cdot\cos\frac{(90-b_2)-(90-b_1)}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}} \qquad \text{oder}$$

$$\cos\frac{s}{2}=\frac{\cos\frac{\Delta\lambda}{2}\cdot\cos\frac{b_1-b_2}{2}}{\cos\frac{\varepsilon}{2}} \qquad (4)$$

Für kleines s, $\varDelta\lambda$ und b ergibt die Reihenentwicklung bis zu Gliedern vierter Ordnung

$$1-\frac{s^2}{8}+\frac{s^4}{16\cdot 24}=\frac{\left(1-\frac{\varDelta\lambda^2}{8}+\frac{\varDelta\lambda^4}{16\cdot 24}\right)\left(1-\frac{(b_1-b_2)^2}{8}+\frac{(b_1-b_2)^4}{16\cdot 24}\right)}{1-\frac{\varDelta\lambda^2}{32}(b_2+b_1)^2} \tag{4a}$$

worin $\cos\varepsilon$ aus (3) gebildet wurde. Um auf der linken Seite nur den Ausdruck

$$1-\frac{s^2}{8}$$

zu behalten, wird

$$s^4=(s^2)^2\sim[\varDelta\lambda^2+(b_1-b_2)^2]^2$$

entsprechend der Gleichung (4) gesetzt und von der rechten Seite subtrahiert, so daß

$$1-\frac{s^2}{8}=1-\frac{(b_1-b_2)^2}{8}+\frac{(b_1-b_2)^4}{16\cdot 24}-\frac{\varDelta\lambda^2}{8}+\frac{\varDelta\lambda^2}{64}(b_1-b_2)^2+\frac{\varDelta\lambda^4}{16\cdot 24}+\frac{\varDelta\lambda^2}{32}(b_2+b_1)^2$$
$$-\frac{(b_1-b_2)^4}{16\cdot 24}\qquad -\frac{\varDelta\lambda^2}{192}(b_1-b_2)^2-\frac{\varDelta\lambda^4}{16\cdot 24}$$

$$-s^2=-(b_1-b_2)^2\qquad -\varDelta\lambda^2+\frac{\varDelta\lambda^2}{12}(b_1-b_2)^2\qquad +\frac{\varDelta\lambda^2}{4}(b_2+b_1)^2$$

[(5)

wird. Ersetzt man hier die b und $\varDelta\lambda$ durch die Projektionskoordinaten, so entsteht

$$-s^2=-(x_1-x_2)^2+\frac{x_1^4}{3}-\frac{x_2^4}{3}-\frac{x_2x_1^3}{3}-\frac{x_1x_2^3}{3}-\varDelta y^2+\frac{\varDelta y^2}{12}(x_1^2-2x_1x_2+x_2^2)$$
$$+\frac{\varDelta y^2}{12}(3x_1^2+6x_1x_2+3x_2^2)$$

$$-s^2=-(x_1-x_2)^2-\varDelta y^2+\frac{(x_1-x_2)^2}{3}(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+\frac{\varDelta y^2}{3}(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$$

Damit ist die Länge des Großkreisbogens durch die Projektionskoordinaten ausgedrückt. Man erkennt nun ohne weiteres, daß die zwei ersten Glieder der rechten Seite nichts anderes als das Quadrat der projizierten Länge bedeuten. Bezeichnet man diese mit s', so wird

$$-s^2=-s'^2+\frac{s'^2}{3}(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$$

oder

$$\frac{s}{s'}=1-\frac{x_1^2+x_1x_2+x_2^2}{6} \tag{6}$$

Diese Formel gibt das Vergrößerungsverhältnis in natürlichen Zahlen. Meistens wird es in logarithmischer Form dargestellt (Jordan III und Rosenmund). Die Herleitung in diesen Werken berücksichtigt auch Glieder vierter Ordnung. In den Schlußformeln muß allerdings nur noch eines dieser Glieder zur Berechnung von $\frac{s}{s'}$ mitgenommen werden. Auch dieses dürfte für die Ausdehnung des Schweizerischen Koordinatennetzes ohne weiteres vernachlässigt werden; macht es doch für Punkte weit außerhalb der Landesgrenzen $[(x_1 + x_2) = 300$ km$]$ nicht einmal 0.1 Einheiten der siebenten Mantissenstelle aus, die bekanntlich als letzte mitzuführende Ziffer gilt. Die Formel (6) ist demnach für alle praktisch auftretenden Seitenlängen genau genug.

3. *Die Azimutreduktionen.*

In (3) ist der Ausdruck für $a_1 - a_2$ bereits gebildet; in ganz analoger Weise wird zunächst eine Formel für

$$\operatorname{tg}(a_2 + a_1)$$

gesucht. Aus dem sphärischen Dreieck folgt

$$\operatorname{tg}\frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{\cos\frac{\Delta\lambda}{2}\cdot\sin\frac{(90 - b_1) - (90 - b_2)}{2}}{\sin\frac{\Delta\lambda}{2}\cdot\sin\frac{(90 - b_1) + (90 - b_2)}{2}}$$

worin

$$\frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{a_1 + a_2}{2} - \frac{\pi}{2}$$

ist, so daß

$$\operatorname{tg}\frac{\beta - \gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{a_1 + a_2}{2}$$

wird. Daraus folgt

$$\operatorname{tg}\frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{\sin\frac{\Delta\lambda}{2}\cdot\cos\frac{b_2 + b_1}{2}}{\cos\frac{\Delta\lambda}{2}\cdot\sin\frac{b_2 - b_1}{2}} \tag{7}$$

Diese Formel ist in aller Strenge richtig; ersetzt man wieder die Funktionen der kleinen Winkel durch Reihen, so wird

$$\operatorname{tg}\frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{\Delta\lambda\left(1 - \frac{(b_1 + b_2)^2}{8} - \frac{\Delta\lambda^2}{24} + \frac{(b_1 + b_2)^4}{16\cdot 24}\right)}{(b_2 - b_1)\left(1 - \frac{\Delta\lambda^2}{8} - \frac{(b_2 - b_1)^2}{24}\right)}$$

oder in Projektionskoordinaten ausgedrückt

$$\operatorname{tg}\frac{a_1+a_2}{2}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\left(1-\frac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}{8}-\frac{\Delta y^2}{24}+\frac{(x_1+x_2)^4}{16\cdot 24}\right)}{\left(1-\frac{x_1^2+x_1x_2+x_2^2}{6}\right)\left(1-\frac{\Delta y^2}{8}-\frac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}{24}\right)}.$$

Die Multiplikation der Klammerausdrücke im Nenner ergibt

$$\begin{array}{r}1-\frac{\Delta y^2}{8}-\frac{x_1^2}{24}+\frac{x_1x_2}{12}-\frac{x_2^2}{24}\\ -\frac{x_1^2}{6}-\frac{x_1x_2}{6}-\frac{x_2^2}{6}\\ \hline 1-\frac{\Delta y^2}{8}-\frac{5x_1^2}{24}-\frac{x_1x_2}{12}-\frac{5x_2^2}{24}\end{array}$$

und daraus folgt für

$$\operatorname{tg}\frac{a_1+a_2}{2}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\left(1-\frac{x_1^2}{8}-\frac{x_1x_2}{4}-\frac{x_2^2}{8}-\frac{\Delta y^2}{24}+\frac{5x_1^2}{24}+\frac{x_1x_2}{12}+\frac{5x_2^2}{24}+\frac{\Delta y^2}{8}\right) \tag{8}$$

$$=\frac{\Delta y}{\Delta x}\left(1+\frac{x_1^2}{12}-\frac{x_1x_2}{6}+\frac{x_2^2}{12}+\frac{\Delta y^2}{12}\right)$$

Damit ist ein Ausdruck für

$$\operatorname{tg}\frac{a_1+a_2}{2}$$

gefunden; nicht aber für

$$\frac{a_1+a_2}{2},$$

das allein sich mit

$$\frac{a_2-a_1}{2}$$

vergleichen läßt, um die Azimute a_1 und a_2 zu bestimmen. Nun bedeutet aber in (8) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nichts anderes als das ebene Azimut, das gegenüber dem mittlern $\frac{a_1+a_2}{2}$ nur geringe Abweichungen aufweisen wird. Es darf daher gesetzt werden

$$\operatorname{tg}a'=\frac{\Delta y}{\Delta x}\qquad\qquad \operatorname{tg}\frac{a_1+a_2}{2}=\operatorname{tg}a'+\frac{\Delta a}{\cos^2 a'} \tag{8a}$$

wo Δa die Differenz zwischen ½ (a_1+a_2) und a' bedeutet. Damit wird

$$\underline{\Delta a}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x^2}{s'^2}\left(\frac{x_1^2}{12}-\frac{x_1x_2}{6}+\frac{x_2^2}{12}+\frac{\Delta y^2}{12}\right)=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x^2}{s'^2}\cdot\frac{s'^2}{12}=\underline{\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{12}} \tag{9}$$

Setzt man nun (3), (8a) und (9) zusammen, so wird

$$\frac{a_2 - a_1}{2} = \frac{1}{4}(y_2 - y_1)(x_2 + x_1) - \frac{1}{48}(y_2 - y_1)(x_2 + x_1)^3 + \frac{1}{48}(y_2 - y_1)^3(x_2 + x_1)$$

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = a' + \frac{1}{12}(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)$$

$$a_1 - a' = -\frac{1}{4}(y_2 - y_1)(x_2 + x_1) + \frac{1}{12}(y_2 - y_1)(x_2 - x_1) + \frac{1}{48}(y_2 - y_1)(x_2 + x_1)^3$$

$$a_2 - a' = \frac{1}{4}(y_2 - y_1)(x_2 + x_1) + \frac{1}{12}(y_2 - y_1)(x_2 - x_1) - \frac{1}{48}(y_2 - y_1)(x_2 + x_1)^3 \quad (10)$$

Diese Ausdrücke für die Azimutreduktionen stehen in vollständiger Übereinstimmung mit den von Jordan III und Rosenmund gegebenen Formeln.

Lehrlingsprüfung 1940.

Vermessungslehrlinge, deren Lehrzeit beendet ist, oder in der ersten Hälfte des Jahres 1940 zu Ende geht, werden darauf aufmerksam gemacht, daß im April 1940 in Zürich eine Lehrlingsprüfung stattfinden wird. Für die im Kanton Zürich wohnhaften Lehrlinge ist sie obligatorisch. Lehrlinge aus anderen Kantonen können an der Prüfung ebenfalls teilnehmen, sofern sie die Kurse für Vermessungslehrlinge in Zürich besucht haben; die Prüfungskosten für diese betragen zirka Fr. 15.—, welche anläßlich der Prüfung zu entrichten sind.

Sämtliche Kandidaten haben sich bei ihrer zuständigen kantonalen Prüfungsstelle zur interkantonalen Lehrlingsprüfung für Vermessungstechniker in Zürich anzumelden mit dem Ersuchen, die Anmeldung mit den Prüfungsakten an die Abteilung für Gewerbewesen der Volkswirtschaftsdirektion Zürich weiterzuleiten.

Die Anmeldungen haben bis spätestens 31. Januar 1940 zu erfolgen.

Zürich, den 28. Dezember 1939.

Geometerverein Zürich-Schaffhausen:
Der Präsident: *L. Vogel.*

Kleine Mitteilung.

Hochschulnachrichten. Eidg. Technische Hochschule, Zürich.

Herr Dipl.-Ing. *E. Ramser*, Adjunkt des Eidg. Meliorationsamtes, Bern, hat für das Wintersemester 1939/40 vom Schweiz. Schulrat einen Lehrauftrag für die folgenden Fächer erhalten: Alpwirtschaft 1 Stunde, Kulturtechnische Alpverbesserungen 1 Stunde, Landwirtschaftliches Meliorationswesen 2 Stunden und Organisation und Durchführung der Meliorationen 1 Stunde. Die einstündigen Fächer werden an der Abt. VIII für Kulturingenieur- und Vermessungswesen, die zweistündige Vorlesung an der Abt. VII für Landwirtschaft gehalten.