Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 36 (1938)

Heft: 12

Artikel: L'adaptation d'n réseau trigonométrique au moyen de projections conformes

Autor: Bachmann, W.K.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-197323

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

(51) *Siegrist, R.* und *Gessner, A.*, Die Auenwälder des Tessin. (Festschr. f. Carl Schröter, Zürich 1925.)
(52) *Schweiz. Wasserwirtschaftsamt*, Statistik der Wasserkräfte in der Schweiz: A. Ausnützbare Wasserkräfte (1916). B. Ausgenützte Wasserkräfte (1928).
(53) *Staub, R.*, Zur Tektonik der südöstlichen Schweizeralpen. Beiträge zur geol. Karte der Schweiz. Bern 1916.
(54) *Derselbe*, Der Bau der Schweizeralpen. (B. N. F. G. Lief. 1924.)
(55) *Straßer, E.*, Geologie der Pizzo di Claro-Torrone-Alto-Kette. Diss. Zürich 1928.
(56) *Trezzinis, C.*, Artikel im Historisch-Biographischen Lexikon der Schweiz, 7 Bände. Neuenburg 1920/34.
(57) *Ulrich, R.*, Die Gräberfelder in der Umgebung von Bellinzona. 2 Bde. Zürich 1914.
(58) *Viollier, D.*, Il Cantone Ticino nelle epoche preistoriche. Rivista archeol. della Prov. et antica diocesi di Como, 1927, p. 8 ecc.
(59) *Wanner, M.*, Geschichte des Baues der Gotthardbahn. Nach den Quellen dargestellt. Luzern 1885.
(60) *Winkler, E.*, Skizze zu einer Landschaftskunde der tessinischen Riviera. (Schweizer Geograph, IX. Jg. 1932, S. 120 ff.)
(61) *Wirth, W.*, Zur Anthropogeographie von Stadt und Landschaft Schaffhausen. Diss. Zürich. Zürich 1918.
(62) *Zaugg*, Die schweizerische Glasindustrie. Diss. Zürich 1930.
(63) *Zschokke, Fr.*, Die Tierwelt des Cantone Ticino. Basel 1928.

Karten.

(1) Die Blätter des *Topographischen Atlasses* der Schweiz in 1 : 50 000.

und zur Übersicht die

(2) „Reliefkarte des Kantons Tessin und des Gebietes der oberitalienischen Seen" (i. M. 1 : 200 000), von *Jul. Frey* (Kümmerly & Frey, Bern).

L'adaptation d'un réseau trigonométrique au moyen de projections conformes.

Par *W. K. Bachmann*, Lausanne.

1° *Généralités.*

Le problème de l'adaptation d'un réseau trigonométrique a été traité dans l'un des derniers numéros de la « Revue Suisse des Mensurations Cadastrales ». Dans cet exposé, l'auteur nous fait remarquer que l'adaptation conforme d'un réseau conduit à des calculs laborieux, et que les côtés transformés apparaissent courbes. Nous trouvons cette même remarque dans les « Allg. Vermessungsnachrichten 1932 ». En examinant l'étude de Krüger traitant cette question, qui a été publiée dans la «Zeitschrift für Vermessungswesen 1896», nous constatons que la remarque faite par Mr. Ansermet, dans son article, est absolument fondée. Jordan examine dans la «Zeitschrift für Vermessungswesen 1898» cette même question au point de vue pratique, en se servant des for-

mules développées par Krüger et Schols. Dans cet exposé, les calculs sont seulement esquissés, de sorte que l'on ne voit pas immédiatement le travail, assez considérable du reste, qu'ils occasionnent. Jordan arrive cependant à la conclusion que la projection conforme pourrait être appliquée pratiquement dans beaucoup de cas.

En conséquence, il semble intéressant d'examiner si les calculs numériques sont aussi laborieux que certains auteurs le prétendent. Pour ce qui concerne la courbure des côtés transformés, nous devons avouer qu'elle est gênante dans certains cas, mais nous ne pouvons demander l'impossible. Si l'ensemble des droites doit être transformé en un ensemble de droites, la projection ne peut être conforme, exception faite des transformations linéaires. Il est cependant toujours possible d'établir une correspondance conforme entre deux triangles arbitrairement donnés. Mais cette méthode, très intéressante au point de vue théorie, ne peut malheureusement pas s'appliquer au problème qui nous occupe ici, attendu qu'elle nous conduit à des expressions que nous ne savons intégrer. Nous savons toutefois que ces intégrales existent, et le fait de ne pouvoir les calculer directement ne nous empêche pas d'espérer de trouver un jour ou l'autre une méthode pratique permettant d'appliquer cette méthode au problème considéré. Ce procédé est du reste déjà appliqué dans l'hydraulique ainsi que dans certaines questions d'électricité; mais dans ces domaines, il ne s'agit généralement que de la projection du demi-plan sur un rectangle ou de problèmes analogues; dans le cas du rectangle, nous sommes conduits à des intégrales elliptiques que nous savons calculer.

Considérons un réseau trigonométrique, et soient $P_1' \; P_2' \ldots$ des points de celui-ci. Soient $P_1 \; P_2 \ldots$ les points correspondants dans un nouveau réseau. Le problème consiste à trouver une projection conforme amenant les points $P_1' \; P_2' \ldots$ du réseau primitif aux points correspondants du nouveau réseau. Au point de vue pratique, les deux réseaux ont généralement à peu près la même orientation; s'il n'en est pas ainsi, il faudra faire subir une rotation au réseau primitif. Si nécessaire, il lui sera également imprimé une translation afin que les écarts entre les points P_1', P_1, P_2', P_2, etc. soient petits.

Nous désignons les coordonnées des points

$$P_1' \; P_2' \ldots \text{ par } z_1 \; z_2 \ldots \text{ où } z_j = x_j + i \cdot y_j$$

$$P_1 \; P_2 \ldots \text{ par } Z_1 \, Z_2 \ldots \text{ où } Z_j = X_j + i \cdot Y_j$$

La formule, habituellement employée pour ces transformations, est celle de Lagrange

$$(1) \quad \begin{aligned} Z = {} & \frac{(z-z_2)(z-z_3)\ldots(z-z_n)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)\ldots(z_1-z_n)} Z_1 + \frac{(z-z_1)(z-z_3)\ldots(z-z_n)}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)\ldots(z_2-z_n)} Z_2 \\ & + \ldots + \frac{(z-z_1)\;(z-z_2)\ldots\;(z-z_{n-1})}{(z_n-z_1)\;(z_n-z_2)\ldots\;(z_n-z_{n-1})} Z_n \end{aligned}$$

Elle résout en effet le problème. Si nous faisons dans (1) successivement $z = z_1, z_2, \ldots$, nous obtenons respectivement $Z = Z_1, Z_2, \ldots$ Cette formule est applicable pour un nombre quelconque de points. Quoique (1) nous donne immédiatement la transformation cherchée, elle ne peut être appliquée directement aux calculs pratiques, parce que ceux-ci seraient beaucoup trop laborieux.

Il semble, qu'au point de vue calculs, l'emploi de la formule de Newton est plus simple. Cette dernière présente du reste un avantage considérable sur la formule de Lagrange, parce que le nombre des points $P_1, P_2, \ldots$ peut être fixé arbitrairement en cours de calcul, sans changer par ce fait les termes déjà calculés. La formule de Lagrange, par contre, ne permet pas de procéder de cette façon; le nombre des points doit être arrêté avant le commencement des calculs.

Rappelons que la formule de Newton s'obtient comme suit: on cherche un polynôme de degré $(n - 1)$ au plus, qui est vérifié par les couples de valeurs

$$\begin{cases} z = 0 \\ Z = Z_1 \end{cases} \quad \begin{cases} z = z_2 \\ Z = Z_2 \end{cases} \quad \begin{cases} z = z_3 \\ Z = Z_3 \end{cases} \quad \ldots \quad \begin{cases} z = z_n \\ Z = Z_n \end{cases}$$

Nous écrivons

$$\begin{aligned} (2) \qquad Z = Z_1 &+ c_1 (z - z_1) \\ &+ c_2 (z - z_1)(z - z_2) \\ &+ c_3 (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \\ &+ \ldots \\ &\vdots \\ &+ c_{n-1} (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_{n-1}) \end{aligned}$$

où $c_1, c_2, \ldots c_{n-1}$ sont des constantes à déterminer. Nous commençons par la détermination de c_1: $Z_2 = Z_1 + c_1 \cdot (z_2 - z_1)$

$$\therefore \quad c_1 = \frac{Z_2 - Z_1}{z_2 - z_1}.$$

Ayant obtenu c_1, nous calculons c_2 et ainsi de suite. En appliquant la formule (2), nous déterminons donc premièrement une transformation qui amène P_1' en P_1 et P_2' en P_2. En calculant ensuite le terme en c_2, nous obtenons une transformation qui amène P_3' en P_3, sans changer la transformation des points P_1' et P_2'. Le calcul est simplifié, si nous posons dans (2) $Z = z + \Delta Z$, et en prenant $z_1 = Z_1 = 0$. Nous déterminons dans ce cas c_1 de manière à obtenir directement les corrections ΔZ, soit

$$\begin{aligned} (3) \qquad \Delta Z = c_1 z &\\ &+ c_2 z (z - z_2) \\ &+ c_3 z (z - z_2)(z - z_3) \\ &+ \ldots \\ &\vdots \\ &+ C_{n-1} z (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_{n-1}) \end{aligned}$$

La direction des x positifs est dirigée vers le nord, et le sens de rotation positif est celui de l'aiguille de la montre (voir fig. 1).

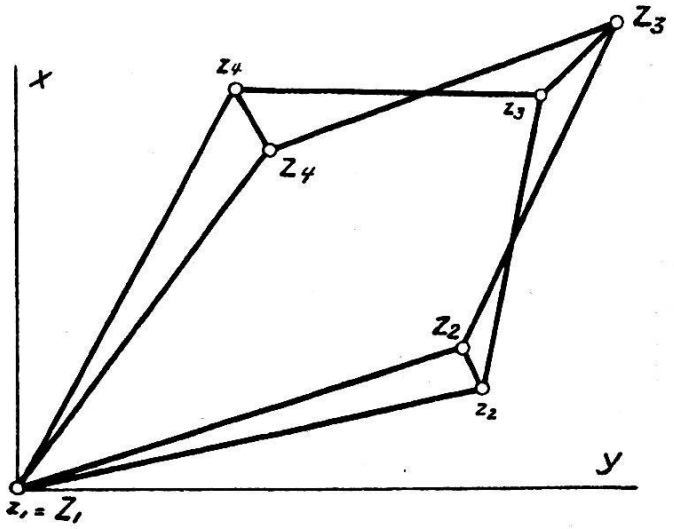

Fig. 1.

Le cas, qui se présente le plus fréquemment dans la pratique, est celui d'un triangle ou d'un quadrilatère. Nous développons ci-après successivement les formules de transformation pour le rattachement de 2, 3 et 4 points.

2° *Rattachement de 2 points.*

Soient P_1', P_2', P_1, P_2 les deux points donnés dans les deux systèmes de coordonnées. Au moyen d'une translation, nous amenons P_1' en P_1, et nous choisissons ce dernier point comme origine des coordonnées pour z et Z (voir fig. 2). Comme indiqué plus haut, $\Delta Z_2 = Z_2 - z_2$ doit être petit. (Dans les cas pratiques, le module ne doit, en règle générale, pas dépasser 50 cm.)

Considérons la formule (3), dans laquelle nous disposons de c_1 de façon à amener z_2 en Z_2. Nous obtenons $\Delta Z_2 = c_1 \cdot z_2$ d'où

$$c_1 = \frac{\Delta Z_2}{z_2}$$

$$\Delta Z = \frac{\Delta Z_2}{z_2} z$$

Cette transformation représente tout simplement une rotation, suivie d'une similitude. Les formules de transformation correspondantes pour x et y s'établissent sans difficulté aucune, mais le calcul numérique présente déjà un certain travail. En effet, tous les points du réseau attaché au côté P_1' P_2', doivent être transformés à l'aide de ces formules. Il me paraît par conséquent indiqué de choisir un autre mode de calcul conduisant passablement plus vite au résultat. Utilisons un procédé graphique; sa précision est naturellement limitée, mais elle est largement suffisante pour satisfaire aux besoins de la pratique.

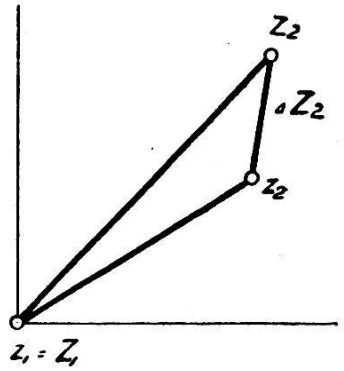

Fig. 2.

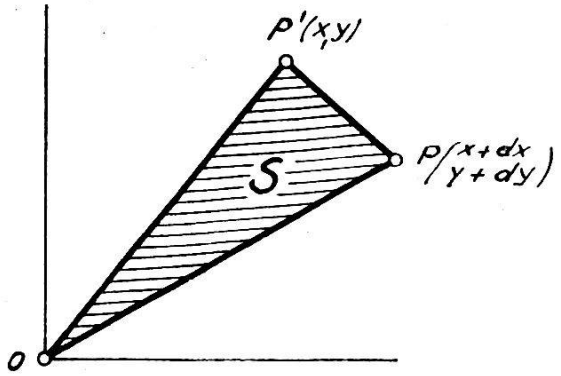

Fig. 3.

Soit $P(z)$ un point du réseau primitif. Nous avons $z = x + i \cdot y = r \cdot e^{i\varphi}$, r étant le rayon-vecteur et φ l'argument de z. Etudions la variation de z: $\frac{dz}{z} = \frac{dr}{r} + i d\varphi$ d'où

$$(4) \qquad \boxed{\begin{aligned} dx &= x \frac{dr}{r} - y\, d\varphi \\ dy &= y \frac{dr}{r} + x\, d\varphi \end{aligned}}$$

Remarquons que $\frac{dr}{r}$ porte toujours le signe de dr. Calculons les formules inverses

$$(5) \qquad \boxed{\frac{dr}{r} = \frac{x\, dx + y\, dy}{r^2}} \qquad d\varphi = \frac{x\, dy - y\, dx}{r^2}$$

mais nous avons $x\, dy - y\, dx = \begin{vmatrix} x & x + dx \\ y & y + dy \end{vmatrix} = 2\, S$

où S représente la surface du triangle $OP'P$ de la fig. 3.
Nous obtenons donc

$$(5') \qquad \boxed{d\varphi = \frac{2\, S}{r^2}}$$

où $d\varphi$ est exprimé en radians. Les formules (4) nous permettent donc de trouver les corrections dx et dy, connaissant $d\varphi$ et $\frac{dr}{r}$; $d\varphi$ et $\frac{dr}{r}$ sont déterminés à l'aide des formules (5) et (5').

Appliquons ces formules à un exemple pratique. Soient P_1', P_2' les deux points du réseau primitif, et P_1, P_2 les deux points correspondants du nouveau système de coordonnées.

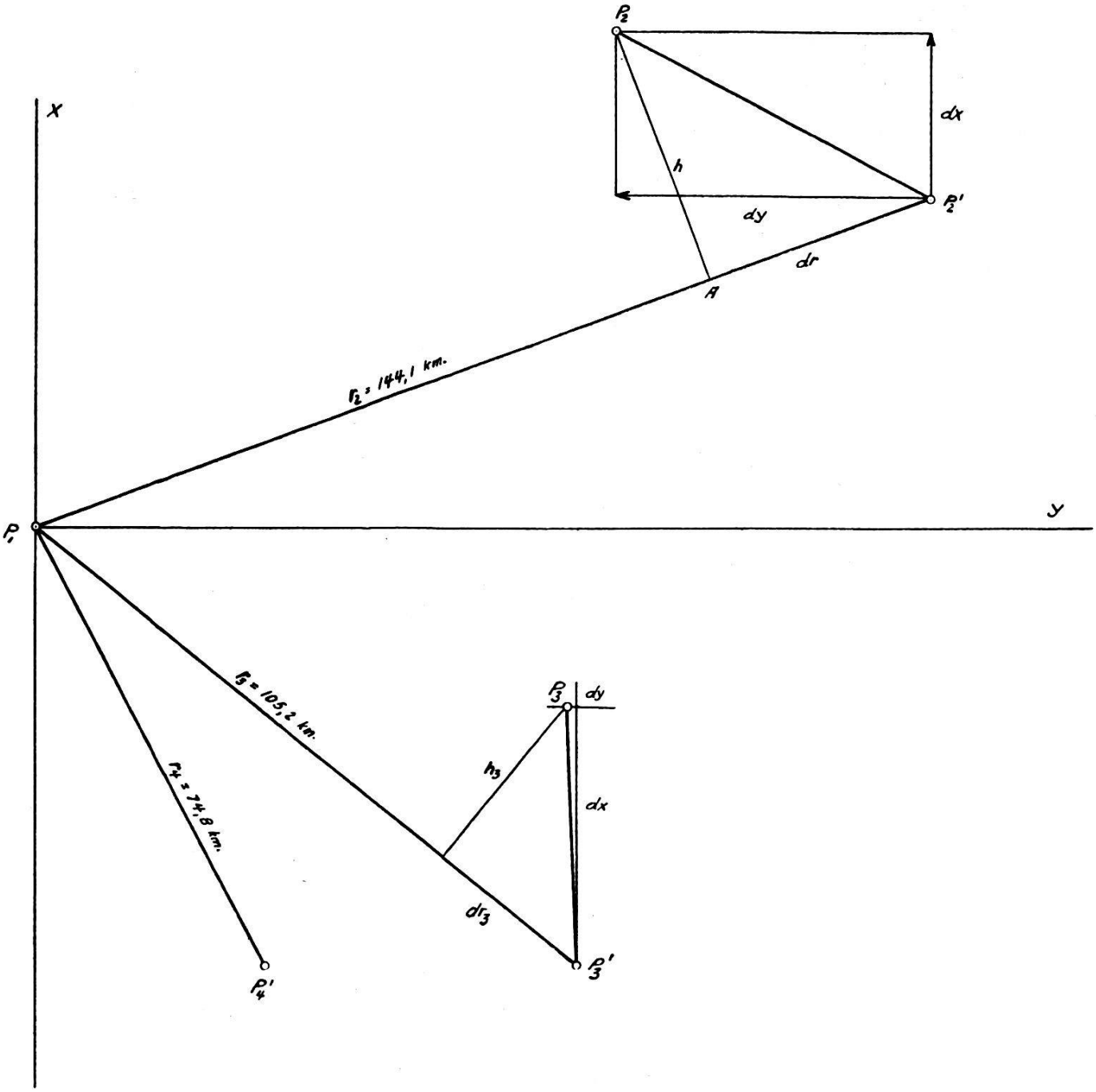

Fig. 4.

P_1'	y =	0	x =	0	
P_2'	y =	+134 910,985 m	x =	+50 504,681 m	
P_1	y =	0	x =	0	
P_2	y =	+134 910,507 m	x =	+50 504,934 m	

Le point P_2' doit donc être amené en P_2. A cet effet, nous reportons les deux points P_1', P_2' à l'échelle 1 : 1 000 000 par exemple (voir fig. 4). Nous obtenons en outre au point P_2:

$$\Delta Z_2 = dX_2 + i \cdot dY_2 \qquad \text{où} \quad \begin{cases} dY_2 = -47{,}8 \text{ cm} \\ dX_2 = +25{,}3 \text{ cm} \end{cases}$$

Reportons ces éléments à partir du point P_2' à l'échelle 1 : 10; nous obtenons ainsi la position de P_2 par rapport à P_2'. Soit A le pied de la perpendiculaire abaissée de P_2 sur $P_1 P_2'$. AP_2' nous donne alors directement dr à l'échelle 1 : 10; r est également mesuré sur le croquis. Dans le cas considéré, nous obtenons

$$(6) \qquad \frac{dr}{r} = -\frac{35{,}7}{1{,}441 \cdot 10^7} = -24{,}8 \cdot 10^{-7}$$

Pour déterminer $d\varphi$, nous devons connaître la surface du triangle $P_1 P_2' P_2$. Nous avons $2 \cdot S \sim r \cdot h$, d'où

$$(7) \qquad d\varphi = \frac{2\,S}{r^2} = \frac{h}{r} = -\frac{40{,}5}{1{,}441 \cdot 10^7} = -28{,}1 \cdot 10^{-7}$$

(6) et (7) déterminent donc complètement le changement d'échelle et la rotation.

Considérons maintenant un troisième point P_3 (z_3). Déterminons son image en considérant la transformation définie par les formules (6) et (7). Les coordonnées primitives de P_3' sont

$$y = +\,81\,398{,}613 \text{ m} \qquad x = -\,66\,275{,}506 \text{ m}$$

Les formules (4) nous donnent immédiatement

$$dx = +\,6{,}627 \cdot 2{,}48 + 8{,}139 \cdot 2{,}81 = +\,\underline{39{,}3 \text{ cm}}$$

$$dy = -\,8{,}139 \cdot 2{,}48 + 6{,}627 \cdot 2{,}81 = -\,\underline{1{,}6 \text{ cm}}$$

Les corrections à apporter aux coordonnées du point P_3' sont donc dans ce cas $dx = +39{,}3$ cm et $dy = -1{,}6$ cm.

Nous voyons ainsi que les calculs relatifs au rattachement de deux points sont excessivement simples, et qu'ils peuvent être effectués à la règle.

Mais ici aussi, le calcul graphique s'impose; les corrections dx et dy se déduisent alors directement du croquis. Considérons la figure 5; les deux triangles Δ_2 et Δ_3 doivent être samblables et le rapport de similitude est $\frac{r_2}{r_3}$. Connaissant Δ_2, nous déterminons facilement Δ_3. Appliquons ce procédé au point P_3' que nous avons considéré plus haut. Nous obtenons $dr_3 = -26{,}1$ cm et $h_3 = -29{,}6$ cm. En reportant ces données sur le croquis (voir fig. 4) à l'échelle 1 : 10, nous obtenons $dx = +39{,}3$ cm et $dy = -1{,}6$ cm.

Nous constatons donc que le rattachement de 2 points s'effectue très rapidement et pour ainsi dire presque sans aucun calcul. On peut naturellement avoir quelques doutes sur la précision du procédé graphique indiqué, mais en travaillant consciencieusement, des erreurs de 0,5 cm sur dx et dy ne sont certainement pas dépassées, ce qui prouve

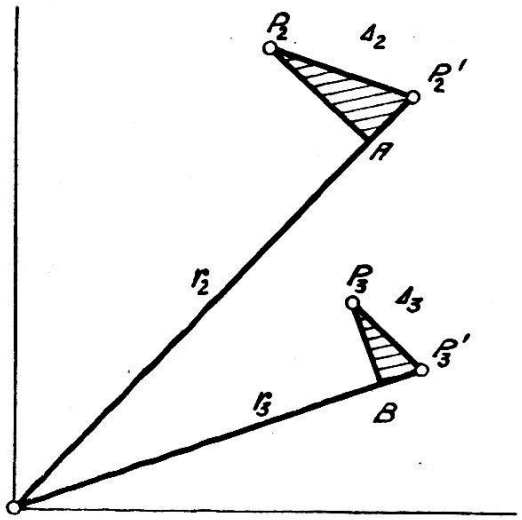

Fig. 5.

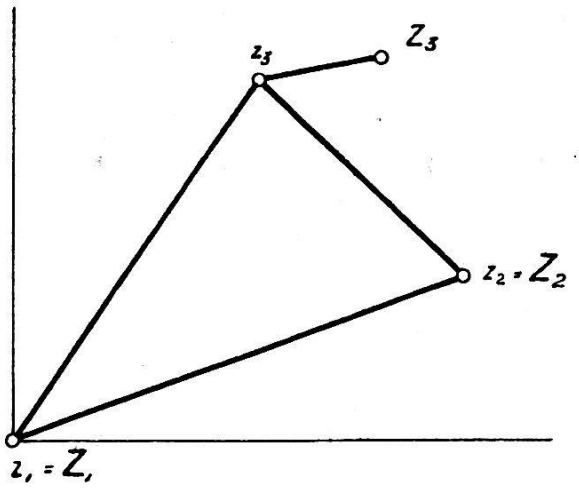

Fig. 6.

que la méthode énoncée est applicable dans la pratique. La borne supérieure de cette erreur se détermine du reste facilement par un calcul d'erreur, que nous ne voulons pas développer ici.

3° *Rattachement de trois points.*

Soient P_1', P_2', P_3' trois points du réseau primitif, et P_1, P_2, P_3 les points correspondants du nouveau réseau. Nous supposons $P_1' \equiv P_1$, $P_2' \equiv P_2$, $P_3' \neq P_3$. Les deux points P_1' et P_2' ont donc déjà été rattachés d'après la méthode que nous venons d'exposer (voir fig. 6).

Nous cherchons une transformation conforme qui amène P_3' en P_3, et pour laquelle les points P_1 et P_2 sont des invariants.

Prenons

(8) $$\Delta Z = A \cdot z \cdot (z - z_2)$$ où A est une

constante à déterminer. Cette fonction satisfait aux conditions énoncées, si nous déterminons A d'après l'équation

(9) $$A = \frac{\Delta Z_3}{z_3\,(z_3 - z_2)}$$

Le calcul pratique de A peut s'effectuer au moyen des coordonnées rectangulaires ou polaires. Ce dernier procédé est généralement préférable. Déterminons la constante A pour un cas particulier en utilisant les coordonnées rectangulaires. Soit

P_1	y	$= 0$		x	$= 0$
P_2	y_2	$= +134\,910{,}507$ m		x_2	$= +50\,504{,}934$ m
P_3'	y_3	$= +\ 81\,399{,}332$ m		x_3	$= -66\,276{,}370$ m

$$\Delta Z_3 = -(4{,}7 + 29{,}5\,i) \text{ cm.}$$

Nous avons donc

$$z_3\,(z_3 - z_2) = (x_3 + iy_3)\left[(x_3 - x_2) + i\,(y_3 - y_2)\right]$$

$$= x_3\,(x_3 - x_2) - y_3\,(y_3 - y_2) + i\left[y_3\,(x_3 - x_2) + x_3\,(y_3 - y_2)\right]$$

$$\left|\begin{array}{l} y_3 - y_2 = -\ 53\,511 \text{ m} \\ x_3 - x_2 = -116\,781 \text{ m} \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcl} x_3\,(x_3 - x_2) & = & +6{,}627 \times 1{,}168 \cdot 10^{13} = +\ 7{,}75 \cdot 10^{13} \\ -y_3\,(y_3 - y_2) & = & +8{,}1399 \times 0{,}535 \cdot 10^{13} = \underline{+\ 4{,}34 \cdot 10^{13}} \\ & & \underline{+12{,}09 \cdot 10^{13} \text{ cm}} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} y_3\,(x_3 - x_2) & = & -8{,}1399 \times 1{,}1678 \cdot 10^{13} = -\ 9{,}52 \cdot 10^{13} \\ x_3\,(y_3 - y_2) & = & +6{,}628 \times 0{,}535 \cdot 10^{13} = \underline{+\ 3{,}54 \cdot 10^{13}} \\ & & \underline{-\ 5{,}98 \cdot 10^{13} \text{ cm}} \end{array}$$

$$A = \frac{-(4{,}7 + 29{,}5\,i)}{(12{,}09 - 5{,}98\,i) \cdot 10^{13}} = \underline{\left[+\,0{,}657 - 2{,}11\,i\right]10^{-13}}$$

ou bien
$$\left\{\begin{array}{l} dx_A = +0{,}657 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \\ dy_A = -\ 2{,}11 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \end{array}\right.$$

Le calcul de la constante A n'est pas long comme nous le voyons. Du reste, elle est déterminée une fois pour toutes, et elle garde la même valeur pour tous les points du réseau, ce qui simplifie passablement la suite des calculs.

Posons
$$\left\{\begin{array}{l} \Delta Z = dX + i\,dY \\ A = dx_A + i\,dy_A \\ z = x + iy \\ z_2 = x_2 + iy_2 \end{array}\right.$$

La formule (8) nous donne dans ce cas

$$(10)\left\{\begin{array}{l} dX = \left[x\,(x - x_2) - y\,(y - y_2)\right]dx_A - \left[x\,(y - y_2) + y\,(x - x_2)\right]dy_A \\ dY = \left[x\,(y - y_2) + y\,(x - x_2)\right]dx_A + \left[x\,(x - x_2) - y\,(y - y_2)\right]dy_A \end{array}\right.$$

Voilà les formules de transformation pour tous les points du réseau. Comme toutes les formules précédentes, elle sont assez simples pour permettre un calcul rapide des corrections dX et dY.

Soit P_4' un quatrième point; calculons dX et dY en appliquant

les formules (10) et en prenant la valeur de A obtenue dans l'exemple précédent. Nous avons

$$\begin{array}{llll} P_4' & y = +\ 34\,994{,}991 \text{ m} & x = -\ 66\,455{,}624 \text{ m} \\ P_2 & y_2 = +134\,910{,}507 \text{ m} & x_2 = +\ 50\,504{,}934 \text{ m} \\ \hline & y - y_2 = -\ 99\,916 \text{ m} & x - x_2 = -116\,959 \text{ m} \end{array}$$

$$\begin{aligned} x\,(x - x_2) &= +6{,}645 \cdot 1{,}169 \cdot 10^{13} = +\ 7{,}77 \cdot 10^{13} \\ -y\,(y - y_2) &= +3{,}499 \cdot 0{,}999 \cdot 10^{13} = +\ 3{,}49 \cdot 10^{13} \\ \hline & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad +11{,}26 \cdot 10^{13} \end{aligned}$$

$$+11{,}26 \cdot 10^{13} \cdot 0{,}657 \cdot 10^{-13} = \underline{+7{,}4 \text{ cm}}$$

$$\begin{aligned} -x\,(y - y_2) &= -6{,}645 \cdot 0{,}999 \cdot 10^{13} = -\ 6{,}64 \cdot 10^{13} \\ -y\,(x - x_2) &= +3{,}499 \cdot 1{,}169 \cdot 10^{13} = +\ 4{,}08 \cdot 10^{13} \\ \hline & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad -\ 2{,}56 \cdot 10^{13} \end{aligned}$$

$$= 2{,}56 \cdot 2{,}11 = \underline{+5{,}4 \text{ cm}}$$

On trouve donc $\underline{dX = +12{,}8 \text{ cm}}$

Pour dY nous obtenons

$$\begin{aligned} x\,(y - y_2) &= 6{,}64 \cdot 10^{13} \\ y\,(x - x_2) &= -4{,}09 \cdot 10^{13} \\ \hline & +2{,}55 \cdot 0{,}657 = +1{,}67 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x\,(x - x_2) &= 7{,}78 \cdot 10^{13} \\ -y\,(y - y_2) &= 3{,}50 \cdot 10^{13} \\ \hline & 11{,}28 \cdot (-2{,}11) = -23{,}80 \text{ cm} \end{aligned}$$

d'où $\underline{dY = -22{,}1 \text{ cm}}$

Ci-après, nous indiquons le mode de calcul en utilisant les coordonnées polaires. Dans ce but, les 4 points ont été reportés sur papier millimétrique à l'échelle 1 : 1 000 000, et les angles ont été mesurés à l'aide d'un simple rapporteur. Il sera alors intéressant de comparer les deux résultats.

a) Détermination de la constante A.

Le croquis nous donne (voir fig. 4):

$$\left.\begin{aligned} |\Delta Z_3| &= 29{,}7 \text{ cm} \\ |Z_3| &= 1{,}052 \cdot 10^7 \text{ cm} \\ |z_3 - z_2| &= 1{,}28 \cdot 10^7 \text{ cm} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} |A| &= \frac{29{,}7}{1{,}052 \cdot 1{,}28} \cdot 10^{-14} \\ \underline{|A|} &\underline{= 22{,}1 \cdot 10^{-14} \text{ cm}} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \arg \Delta Z_3 &= +261^\circ \\ \arg z_3 &= +129^\circ \\ \arg (z_3 - z_2) &= +205^\circ \end{aligned}\right\} \quad \underline{\arg A = -73^\circ}$$

L'erreur maximum à craindre sur arg A ne dépasse pas 2°; elle varie généralement entre 1° et 1,5°. Comme A intervient dans tous les calculs suivants, il peut être indiqué de calculer son argument à l'aide de la règle en utilisant les fonctions trigonométriques.

b) Calcul du point P_4.

Nous avons

$$P_4' \quad y = +34\,994{,}991 \text{ m} \qquad x = -66\,455{,}624 \text{ m}$$

$$\Delta Z = z\,(z - z_2)\,A$$

$$|\Delta Z| = 7{,}48 \cdot 10^6 \cdot 1{,}539 \cdot 10^7 \cdot 2{,}21 \cdot 10^{-13} = \underline{25{,}4 \text{ cm.}}$$

$$\left.\begin{array}{lcl} \arg z & = & +152^\circ \\ \arg (z - z_2) & = & +221^\circ \\ \arg A & = & -73^\circ \end{array}\right\} \qquad \arg \Delta Z = 300^\circ$$

$$\underline{\Delta Z = 25{,}4\ e^{i\,300^\circ}}$$

En reportant ce vecteur sur le croquis, nous obtenons

$$\underline{dX = +13{,}2 \text{ cm}} \qquad \underline{dY = -22{,}7 \text{ cm}}$$

Nous constatons que les différences entre le calcul numérique et le calcul graphique sont relativement petites.

Cet exemple montre donc que le rattachement de trois points ne présente encore aucune difficulté. En outre, le calcul par coordonnées polaires est plus simple que celui par coordonnées rectangulaires. L'erreur à craindre est naturellement plus grande en utilisant cette première méthode; mais en calculant éventuellement un ou deux angles à l'aide de la règle (ce qui est très rapide), au lieu de les mesurer directement sur le croquis, l'erreur totale sur dx et dy ne dépassera jamais 1 cm, à condition que le travail s'exécute soigneusement. Le procédé polaire est donc toujours applicable dans la pratique.

4° *Rattachement de 4 points.*

Il s'agit de trouver une transformation conforme, qui amène les 4 points $P_1' \ldots P_4'$ du réseau primitif aux 4 points $P_1 \ldots P_4$ du nouveau réseau. Supposons que l'on ait déjà rattaché les trois points P_1', P_2', P_3'. Il ne s'agit alors plus que de trouver une transformation conforme qui amène P_4' en P_4, ayant comme invariants les points P_1, P_2, P_3 (voir fig. 7).

Posons $$\Delta Z = z\,(z - z_2)\,(z - z_3)\,B.$$

Nous déterminons alors B au moyen de la relation

$$\Delta Z_4 = z_4\,(z_4 - z_2)\,(z_4 - z_3)\,B.$$ Ici, les coordonnées polaires doivent être employées. A cet effet, les angles peuvent être mesurés à l'aide d'un coordinatographe, ou peuvent être calculés

à l'aide de la règle. En procédant ainsi, l'erreur à craindre sur dX et dY ne dépassera guère quelques millimètres, et les calculs s'effectueront également très rapidement.

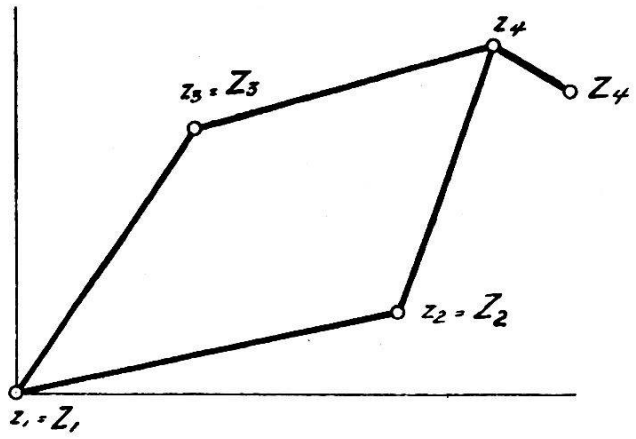

Fig. 7.

Le cas de plus de 4 points de rattachement ne se présente que très rarement dans la pratique. Le procédé indiqué s'applique naturellement à n'importe quel nombre de points.

5° *Rattachement de n points.*

Pour 4 points déjà, la question se pose, si la constante B doit être déterminée, ou s'il serait préférable de transformer séparément chaque triangle. En calculant B, nous transformons donc la figure $z_1 \ldots z_4$ (voir fig. 8) comme bloc unique; mais nous pouvons aussi transformer les deux triangles Δ_1 et Δ_2 séparément.

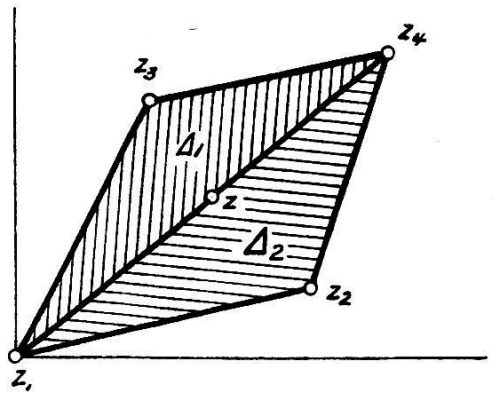

Fig. 8.

A cet effet, on amène premièrement z_4 en Z_4; on calcule A_1 pour le triangle Δ_1, et ensuite A_2 pour le triangle Δ_2. Soit $f_1(z)$ la fonction transformant Δ_1, $f_2(z)$ celle transformant Δ_2. Le côté $z_1 z_3$ est alors transformé deux fois, mais ses deux images ne seront généralement pas confondues. Prenons un point z sur $z_1 z_3$ et déterminons les deux points correspon-

dants Z et Z'. Il s'agit alors de déterminer une borne supérieure pour $|Z' - Z|$. Nous avons

$$f_1(z) = \Delta Z = z(z - z_4) A_1 \quad \Delta Z_3 = z_3(z_3 - z_4) A_1 \quad \therefore A_1 = \frac{\Delta Z_3}{z_3(z_3 - z_4)}$$

$$f_2(z) = \Delta Z' = z(z - z_4) A_2 \quad \Delta Z_2 = z_2(z_2 - z_4) A_2 \quad A_2 = \frac{\Delta Z_2}{z_2(z_2 - z_4)}$$

$$\left| \frac{f_1(z)}{f_2(z)} \right| = \left| \frac{\Delta Z_3}{\Delta Z_2} \right| \cdot \left| \frac{z_2}{z_3} \right| \cdot \left| \frac{z_2 - z_4}{z_3 - z_4} \right|$$

Cette dernière formule montre que les deux projections du point z peuvent être très différentes l'une de l'autre. Le rattachement par triangles séparés n'a donc pas de valeur pratique. En appliquant par contre la méthode exposée plus haut, aucune différence n'existe à l'intérieur du réseau.

6° *Conclusions.*

Le rattachement de 2, 3 ou 4 points trigonométriques s'effectue facilement au moyen des projections conformes. Les calculs sont d'une simplicité extrême et ils se font à la règle. La faculté de combiner les méthodes numériques et graphiques donne une grande souplesse au calcul, permettant ainsi de tenir compte, dans de larges mesures, de précision exigée. C'est une méthode qui est parfaite au point de vue théorie, mais elle est surtout pratique.

Herbstversammlung der Sektion Zürich-Schaffhausen.

Die Sektion Zürich-Schaffhausen hielt Samstag den 26. November ihre ordentliche Herbstversammlung im Gasthof zur „Krone" in Eglisau ab. Im Mittelpunkt der Tagung stand ein Referat von Herrn Dr. Baltensperger, eidg. Vermessungsdirektor, über die neuen eidgenössischen Verordnungen: a) Die Vermessungen in den Festungsgebieten, b) Die Evakuation der Grundbuchvermessungen.

Wie es in andern Sektionen bereits der Fall war, so wollte der Referent auch die Geometer der beiden Grenzkantone Zürich und Schaffhausen durch einen Vortrag mit den neuesten Bestimmungen des Vermessungswesens bekannt machen. In Anbetracht der aktuellen Bedeutung des Themas sind an die 40 Vereinsmitglieder zur Tagung erschienen.

Herr Vermessungsdirektor Dr. Baltensperger hat in mehr als zweistündigen Ausführungen sich mit den Problemen der Landesbefestigungen befaßt. Anschließend betonte er die Notwendigkeit vorsorglicher Friedens- und Kriegsmaßnahmen auch für die Grundbuchvermessung, die bereits in ruhigen Zeiten vorzubereiten sind. Präsident Vogel verdankte den interessanten Vortrag bestens und eröffnete nach kurzer Pause die Diskussion. Mehrere Redner waren in der Lage, diesbezügliche Fragen aus ihrem Arbeitsgebiete zur Behandlung zu stellen.