Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 35 (1937)

Heft: 7

Artikel: Les bases géodésiques de la mensuration suisse

Autor: Ansermet, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-196656

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SCHWEIZERISCHE
Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik
ORGAN DES SCHWEIZ. GEOMETERVEREINS
Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Kulturtechnik / Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie
Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières
ORGANE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES GÉOMÈTRES
Organe officiel de l'Association Suisse du Génie rural / Organe officiel de la Société Suisse de Photogrammétrie
Redaktion: Dr. h. c. C. F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)
Ständ. Mitarbeiter f. Kulturtechnik: Dr. H. FLUCK, Dipl. Kulturing., Villa Lepontia, Bellinzona-Ravecchia
Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats
Expedition, Inseraten- und Abonnements-Annahme:
BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR VORMALS G. BINKERT, A.-G., WINTERTHUR

No. 7 • XXXV. Jahrgang
der „Schweizerischen Geometer-Zeitung"
Erscheinend am zweiten Dienstag jeden Monats
13. Juli 1937
Inserate: 50 Cts. per einspaltige Nonp.-Zeile

Abonnemente:
Schweiz Fr. 12. —, Ausland Fr. 15. — jährlich
Für Mitglieder der Schweiz. Gesellschaften für Kulturtechnik u. Photogrammetrie Fr. 9. — jährl.
Unentgeltlich für Mitglieder des Schweiz. Geometervereins

Les bases géodésiques de la mensuration suisse.

Par *A. Ansermet.*

Au cours de ces dernières années, de nombreux articles ont été publiés sur les bases géodésiques de la mensuration suisse; ils sont dûs à la plume particulièrement compétente de M. Zölly, chef de section au service topographique et constituent une documentation précieuse qui prouve que le réseau géodésique de notre pays répond à toutes les exigences d'une bonne mensuration. Seules les méthodes de calcul n'ont pas été traitées de façon explicite, intentionnellement sans doute; la majeure partie du réseau a vraisemblablement été calculée et compensée par le procédé de la variation des coordonnées, directement dans le plan. C'est là un avantage essentiel des projections conformes de comporter une grande simplification dans la détermination des éléments du réseau; les excès spéroïdiques s'éliminent implicitement sous la forme de réductions angulaires appelées aussi réduction d'azimut (ou de gisement). Des tables ou des nomogrammes simplifient ici beaucoup le travail (voir p. ex.: A. Abendroth: Die Ausgleichungspraxis in der Landesvermessung, p. 126).

C'est précisément un des buts de la présente note d'étudier les bases géodésiques du réseau suisse au point de vue de ces réductions angulaires; il s'agit en outre d'examiner si, dans certains cas, des coordonnées polaires ne seraient pas préférables aux coordonnées rectangulaires.

Le territoire suisse en effet, par ses dimensions et sa forme, occupe une place à part dans les Etats européens au point de vue géodésique. Dans une précédente note (Revue suisse des mensurations, 1925, n°s 7 et 8), nous avons établi que les déformations pouvaient être réduites sensiblement par un choix judicieux du système de coordonnées; rappelons succinctement les résultats acquis:

Si l'on désigne par m le coefficient de déformation linéaire, c.-à-d. l'échelle de la projection, on peut écrire pour une portion restreinte de la surface terrestre:

$$m - 1 = \alpha \frac{x^2}{R^2} + \beta \cdot \frac{y^2}{R^2} + \ldots\ldots$$

R désignant le rayon de la sphère de référence et α, β des coefficients tels que

$$\alpha + \beta = 0{,}5$$

ou

$$\alpha = \frac{1-n}{4} \qquad \beta = \frac{1+n}{4}$$

les coordonnées x et y définissent un point quelconque de la mensuration; les axes de coordonnées sont ceux de l'ellipse

$$m - 1 = \text{constante.}$$

En faisant varier m on obtient les isomètres de la projection; ce sont des ellipses homothétiques. Un seul paramètre n suffit donc à définir celle des projections conformes qu'il convient d'appliquer. En chaque point du plan il faut distinguer deux directions principales: la tangente à l'isomètre passant par le point et la normale. Considérons à cet effet un élément d'arc de géodésique; sa courbure est donnée par la formule

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R^2} (\beta' y_1 \sin A - \alpha' x_1 \cos A)$$

$$\alpha' = \frac{1-n}{2} \qquad \beta' = \frac{1+n}{2} \qquad \beta' - \alpha' = n$$

l'élément d'arc passe par le point $(x_1\ y_1)$ et sa direction est définie par le gisement A. Or il est facile de vérifier que cette courbure $\frac{1}{\rho}$ prend une valeur maximum lorsque l'arc est tangent à l'isomètre en $(x_1\ y_1)$ et s'annule lorsqu'il est normal à cette courbure. Le lieu des centres de courbure quand on fait varier A est une droite parallèle à la tangente à l'isomètre en $(x_1\ y_1)$. Transformons par rayons vecteurs réciproques cette droite, lieu des centres de courbure, en prenant le point $(x_1\ y_1)$ comme centre et l'unité comme puissance de transformation (voir Reye, Géométrie de position, p. 206). On obtient un cercle passant par le centre, les cordes issues de ce point étant représentatives de la courbure $1 : \rho$. Cette intéressante propriété a été signalée par M. l'Ingénieur hydrographe de Vanssay de Blavous (Driencourt & Laborde, Traité des projections, 4e fascicule, p. 83).

Grâce à l'emploi de coordonnées conformes il est donc particulièrement aisé d'étudier comment se déforme un côté du réseau géodésique suivant sa position et son orientation. Soient P_1 et P_2 deux sommets reliés par le côté de longueur s et de gisement A; les réductions d'azimut respectives sont:

$$\delta_1 = s \frac{\rho''}{6 R^2} \left\{3 \beta' y_1 \sin A - 3 \alpha' x_1 \cos A + (\beta' - \alpha') s \cdot \sin A \cdot \cos A\right\}$$

$$\delta_2 = s \frac{\rho''}{6 R^2} \left\{3 \beta' y_1 \sin A - 3 \alpha' x_1 \cos A + 2 (\beta' - \alpha') s \cdot \sin A \cdot \cos A\right\}$$

ou x_1 et y_1 sont les coordonnées du point P_1; ces formules sont déduites de l'expression qui donne le rayon de courbure en s'en tenant au terme principal de la série et en considérant les valeurs absolues des réductions. Les formules du Lt.-colonel Laborde en fonction des courbures au premier tiers et au second tiers du côté conduisent bien entendu au même résultat.

$$\delta_1 + \delta_2 = s \frac{\rho''}{6 R^2} \left\{ 6 \beta' y_1 \sin A - 6 \alpha' x_1 \cos A + 3 (\beta' - \alpha') s \cdot \sin A \cdot \cos A \right\} =$$

$$= s \frac{\rho''}{6 R^2} \left\{ 3 (1 + n) y_1 \sin A - 3 (1 - n) x_1 \cos A + 3 n \cdot s \cdot \sin A \cdot \cos A \right\} =$$

$$= s \frac{\rho''}{2 R^2} (y_1 \sin A - x_1 \cos A + n (y_1 \sin A + x_1 \cos A) + n \cdot s \cdot \sin A \cos A)$$

Dans le cas particulier où $n = o$ $(\alpha = \beta)$ on a, en valeur absolue:

$$\delta_1 = \delta_2$$

on reconnait immédiatement la projection stéréographique.

L'expression

$$\delta_1 + \delta_2 = s \cdot \frac{\rho''}{2 R^2} (y_1 \sin A - x_1 \cos A)$$

donne la valeur de l'excès sphérique du triangle OP_1P_2, le point O étant l'origine ou le centre des isomètres.

Revenons au cas général et appliquons la formule qui donne la somme $(\delta_1 + \delta_2)$ des réductions aux côtés OP_1 de longueur s_1, de gisement A_1 et de réductions δ_1' et δ_1''

$$\delta_1' + \delta_1'' = s_1 \frac{\rho''}{2 R^2} n \cdot s_1 \cdot \sin A_1 \cos A_1 = \frac{\rho''}{2 R^2} n \cdot x_1 y_1$$

pour le côté OP_2 de longueur s_2, de gisement A_2 on a de même pour les réductions angulaires δ_2' et δ_2''

$$\delta_2' + \delta_2'' = s_2 \cdot \frac{\rho''}{2 R^2} n \cdot s_2 \cdot \sin A_2 \cos A_2 =$$

$$= \frac{\rho''}{2 R^2} n \left\{ (x_1 + s \cdot \sin A) (y_1 + s \cdot \cos A) \right\}$$

$$\delta_2' + \delta_2'' = \frac{\rho''}{2 R^2} n \cdot x_1 y_1 +$$

$$+ s \frac{\rho''}{2 R^2} \left\{ n (y_1 \sin A + x_1 \cos A) + n \cdot s \cdot \sin A \cdot \cos A \right\}$$

s et A désignant toujours la longueur et le gisement de P_1P_2. On vérifie immédiatement en appliquant les formules qui précèdent que la somme des six réductions angulaires relatives au triangle OP_1P_2 est égale à l'excès sphérique de ce triangle; tous les termes contenant le paramètre n s'éliminent en tenant compte des signes. Seuls subsistent les deux termes qui caractérisent la projection stéréographique.

Si P_1P_2 est un côté joignant deux sommets situés dans un même quadrant p. ex. on aura:

$$(\delta_1 + \delta_2) + (\delta_1' + \delta_1'') - (\delta_2' + \delta_2'') = \epsilon$$

ϵ étant l'excès sphérique du triangle OP_1P_2.

Une transformée plane de géodésique issue de l'origine est donc affectée de réductions angulaires proportionnelles au paramètre n, au carré de la longueur et au sinus du double du gisement. Si ce dernier élément seul varie les réductions prennent une valeur maximum dans la direction des bissectrices des axes des isomètres. Le coefficient m, c.-à-d. l'échelle, est indépendant du paramètre n pour les points situés sur les bissectrices; cela résulte de l'équation de l'isomètre.

Ellipses de réduction angulaire constante.

Pour un court côté P_1P_2 du réseau (p. ex. $s = 1$ km) on peut admettre que les réductions δ_1 et δ_2 sont égales. Etudions la variation de la courbure $1 : \rho$ de ce côté en fonction du gisement; la valeur maximum est donc celle qui correspond à la direction isométrique (tangente à l'isomètre).

La formule

$$\operatorname{tg} A = -\frac{\beta y}{\alpha x} = -\frac{\beta' y}{\alpha' x}$$

fournit la valeur du gisement; on en déduit:

$$\max. \frac{1}{\rho} = \frac{1}{R^2} (\beta' y \sin A - \alpha' x \cdot \cos A) = -\frac{1}{R^2} (\alpha'^2 x^2 + \beta'^2 y^2)^{\frac{1}{2}}$$

L'ellipse définie par l'équation

$$\alpha'^2 x^2 + \beta'^2 y^2 = \text{constante}$$

est donc le lieu des points P_1 tels que le côté issu de ce point soit caractérisé par une valeur constante de la réduction angulaire maximum. C'est une ligne d'égal maximum de réduction angulaire. On doit à M. de Vanssay les premières études sur cet objet.

Application.

Ainsi que nous l'avons dit au début le territoire de la Suisse se prête particulièrement bien à l'application des formules développées ci-dessus; nous distinguerons deux cas:

1er cas (fig. 1):

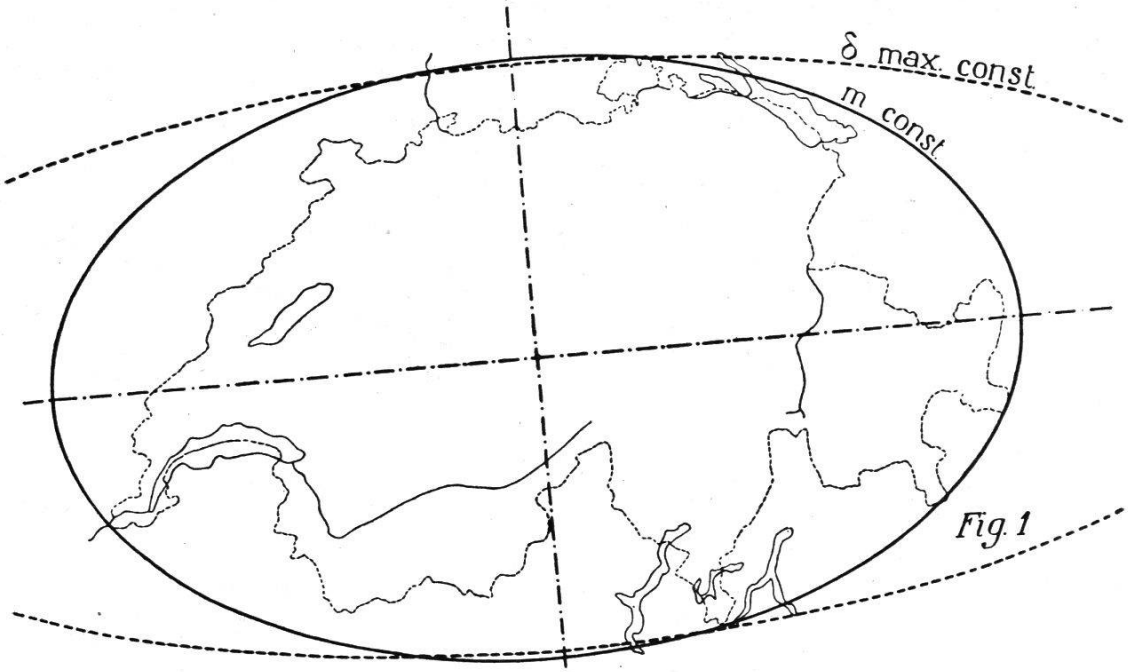
Isomètre-limite	$m = 1{,}000\,116$
Paramètre	$n = 0{,}45$
$\alpha = 0{,}138$	$\beta = 0{,}362$

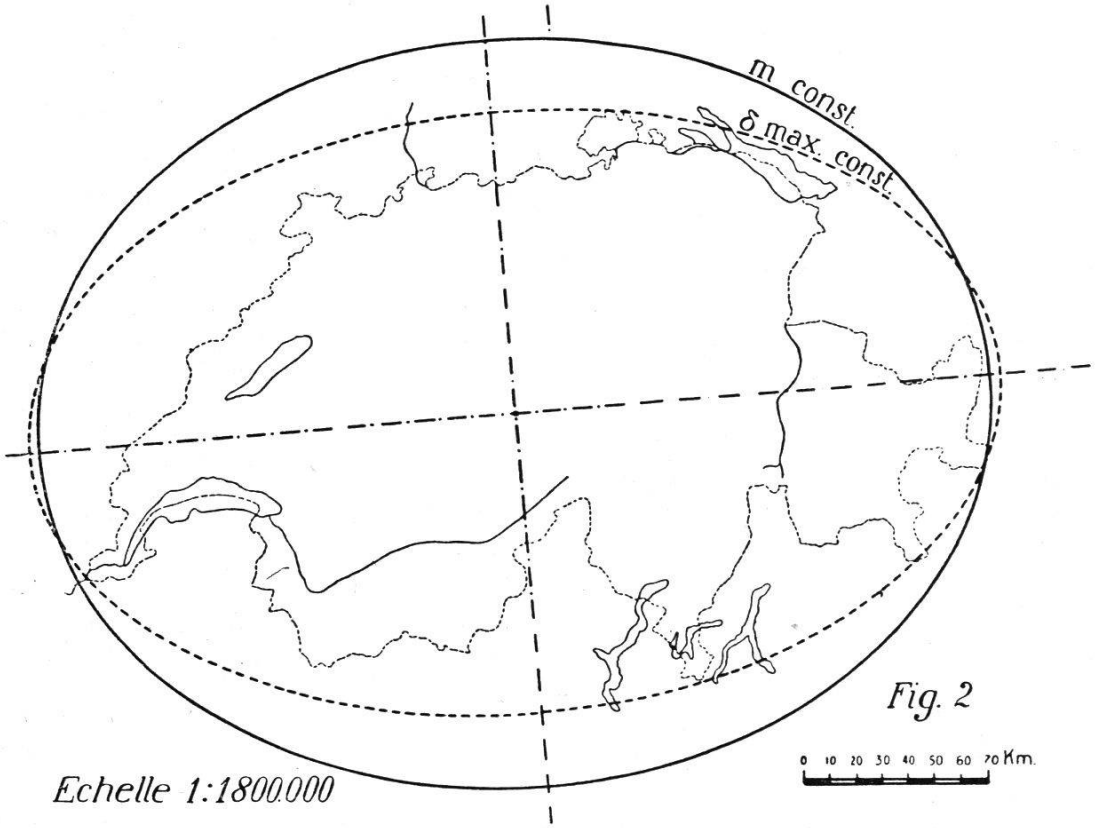
L'ellipse d'égal maximum de réduction angulaire est caractérisée par la valeur

$$\delta \text{ max. const.} = 0'',64 \text{ (centésimales)}$$

pour un côté $P_1P_2 = 1$ kilomètre.

L'isomètre-limite est tracée en trait plein sur la figure 1 et l'ellipse des δ max. en pointillé; ces deux ellipses enveloppent le territoire. Le rapport des axes de ces ellipses est égal à $\sqrt{\beta : \alpha} = 1{,}62$ pour la première et à $\beta : \alpha = 2{,}6$ pour la seconde.





2e cas (fig. 2).

La plus petite ellipse enveloppant le territoire devient la courbe d'égal maximum de réduction angulaire (pointillée); les caractéristiques sont alors les suivantes:

Paramètre $n = 0{,}24$
$\alpha = 0{,}19$ $\beta = 0{,}31$
δ max. const. $= 0'',56$ (ellipse pointillée)
$m = 1{,}000\,159$ (ellipse trait plein)

les rapports des axes de ces courbes sont 1,62 comme précèdemment pour la première et $\sqrt{1,62} = 1,27$ pour l'isomètre[1]. La réduction δ est calculée encore pour $s = 1$ km.

Pour la mensuration suisse le 1er cas est plus favorable, car c'est surtout la valeur $(m - 1)$ qu'il faut diminuer; par rapport à la projection cylindrique il y a une amélioration de 30% environ ce qui n'est pas négligeable. Le surcroît de travail de calcul qui peut résulter de la forme elliptique des isomètres ne joue pas un grand rôle; on est amené du reste à envisager non plus des coordonnées rectangulaires mais des coordonnées polaires pour la correspondance entre la sphère de référence et le plan.

Emploi de coordonnées polaires.

On sait en effet qu'un point quelconque P est défini par un système de coordonnées rectangulaires (x, y) sur la sphère et par un autre système $(x' \; y')$ dans le plan. Dans les projections définies par la valeur $n = 1$ du paramètre c'est la meilleure solution car un des axes est le lieu des points d'inflexion des côtés du réseau projetés; on a à la fois pour ces points:

$$m - 1 = 0 \qquad \delta \text{ max.} = 0 \text{ (axe neutre)}$$

Pour la valeur $n = 0$ (type stéréographique) on aura recours tout naturellement aux coordonnées polaires.

Dans le cas général où le paramètre est compris entre ces valeurs particulières la question est plus complexe; le point P sera défini par sa distance à l'origine O et l'azimut de OP. Le gisement dans le plan s'obtient en calculant la réduction angulaire en O; c'est la principale objection qu'on peut formuler. Cette réduction est cependant rapidement déterminée, car sa valeur principale s'exprime simplement comme nous l'avons vu; des nomogrammes faciliteront beaucoup le calcul. Ces coordonnées polaires doivent donc permettre le passage de la sphère de référence au plan; elles remplacent le double système de coordonnées (x, y) et $(x' \; y')$. Il est vrai que pour la mensuration des coordonnées rectangulaires sont nécessaires; mais ce n'est qu'un problème de transformation de coordonnées planes. On peut alors déplacer l'origine et orienter à volonté les nouveaux axes; c'est un calcul indépendant ne compartant plus ni déformations, ni réductions.

En résumé les bases géodésiques d'une mensuration dépendent essentiellement de la forme et de l'étendue du territoire considéré. Quel que soit le système choisi pour les coordonnées le réseau géodésique subit certaines altérations: réduction angulaires et variations d'échelle. Les principes énoncés dans cette note et l'application à un cas concret montrent que le problème posé est simple. L'emploi éventuel de coordonnées polaires n'a été qu'effleuré; cette solution paraît intéressante puis qu'elle permet ensuite la transformation en coordonnées rectangulaires orientées à volonté. Le but à atteindre, il ne faut pas l'oublier, est de réaliser une mensuration aussi fidèle que possible d'un territoire fût-ce au prix d'un léger surcroît de calcul.

[1] L'échelle 1 : 1 800 000 est celle du dessin original et non celle des clichés.