Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 35 (1937)

Heft: 1

Artikel: Lot-Abweichungen und Laplace-Gleichung

Autor: Baeschlin, C.F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-196641

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

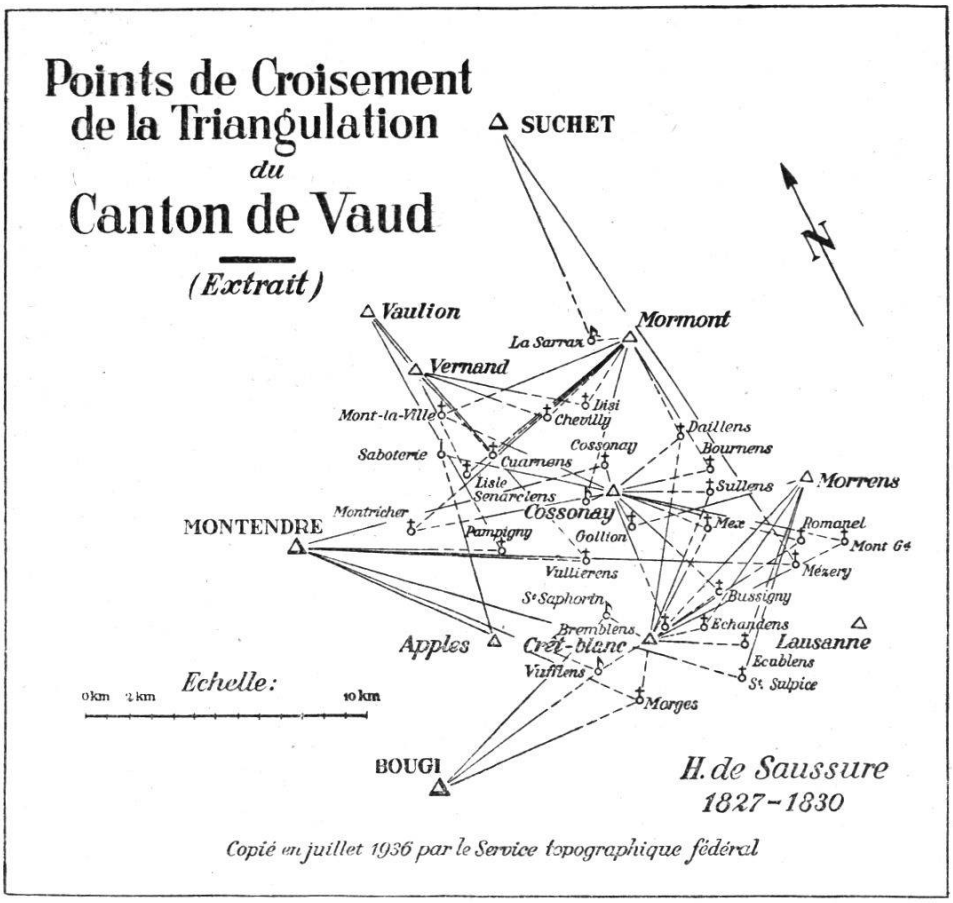


Fig. 12.

très soigneusement faits et contenus dans les carnets d'angles, nous renseignent exactement sur le point visé et nous permettent d'identifier, encore aujourd'hui, les objets visés il y a une centaine d'années et de décider si les points sont restés les mêmes ou s'ils ont été modifiés ou, finalement, si les points sont à considérer comme disparus et perdus. Tous ces points, sauf les points perdus, peuvent servir encore aujourd'hui à des relevés purement topographiques avec leurs valeurs transformées dans le système de projection cylindrique actuel. (A suivre.)

Lot-Abweichungen und Laplace-Gleichung.

Von Prof. Dr. C. F. Baeschlin, Zollikon.

Wenn wir auf der Erdoberfläche eine Haupttriangulation durchführen, so sind durch die Messung einer Basis und der Dreieckswinkel die Längen der Dreiecksseiten bestimmt, wenn wir über die Krümmungsverhältnisse desjenigen Teiles der mathematischen Erdoberfläche einigermaßen orientiert sind, auf dem die Triangulation ausgeführt wird. Dagegen fehlt uns eine Orientierung dieser Triangulation. Zu ihrer

Beschaffung bestimmen wir in einem geeigneten Punkte O, dem sogen. *Fundamentalpunkt* durch direkte astronomische Messungen die geographische Breite φ_0 und die geographische Länge λ_0, sowie das geographische Azimut $\alpha_{0\cdot 1}$ nach einem Punkte P_1 der Triangulation, der mit O direkt verbunden ist. Wir wählen ein geeignetes Rotations-Ellipsoid, ein sogen. *Referenzellipsoid*, das in der Umgebung des Punktes O' mit den geographischen Koordinaten φ_0 und λ_0 Krümmungsverhältnisse aufweist, die möglichst gut mit den Krümmungen der mathematischen Erdoberfläche in der Umgebung des Punktes O übereinstimmen. Man kann dieses Referenzellipsoid nun in eine solche Lage bringen, daß seine Normale im Punkte O' (φ_0, λ_0) mit der Normalen der mathematischen Erdoberfläche im Punkte O (φ_0, λ_0) zusammenfällt. Die Rotationsachse des gewählten Referenzellipsoides wird im allgemeinen nicht mit der Erdachse zusammenfallen, sondern ihr nur parallel sein.

Mit Hilfe des Azimutes $\alpha_{0\cdot 1}$ können wir unsere Triangulation auf dem Referenzellipsoid orientieren. Wir wählen zur Berechnung der Dreiecksseiten die Krümmungsverhältnisse des Referenzellipsoides. Dabei sprechen wir als Dreiecksseiten die geodätischen Linien zwischen den Dreieckspunkten an. Die gemessenen Winkel sind auf die sogenannten geodätischen Winkel, d. h. die Winkel zwischen den geodätischen Linien, überzuführen. Da die Krümmungen des Geoides von denjenigen des angenommenen Referenzellipsoides etwas abweichen, so werden die Winkelreduktionen auf die geodätischen Linien des Geoides etwas abweichen von den Reduktionen auf die geodätischen Linien des Referenzellipsoides. Nach strengen Untersuchungen von *Helmert*, durchgeführt in „Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie I. Teil, Leipzig 1880", sind die Aenderungen der Seiten, welche sich durch die ellipsoidische Rechnung gegenüber der strengen geoidischen Rechnung ergeben, ganz bedeutend kleiner als die mittleren Fehler der Seiten, wie sie aus den mittleren Fehlern der beobachteten Winkel hervorgehen, sofern die Höhenwinkel der gemessenen Richtungen nicht groß sind. Diese Bedingung ist bei einer Triangulation I. Ordnung im allgemeinen ohne weiteres erfüllt infolge der verhältnismäßig langen Seiten.

Wir erhalten auf diese Weise je eine Triangulation auf dem Geoid und auf dem Referenzellipsoid, so daß die Dreiecke beider praktisch kongruent sind.

Wir berechnen nun mit Hilfe der sogenannten „geodätischen Hauptaufgabe" aus den ausgeglichenen Winkeln und Seiten der Triangulation auf dem Referenzellipsoid, ausgehend vom Fundamentalpunkt und dem Ausgangsazimut $\alpha_{0\cdot 1}$ sukzessive die geographischen Koordinaten φ^g und λ^g aller Dreieckspunkte für das Referenzellipsoid, sowie die Azimute der geodätischen Linien, also der Dreiecksseiten.

Wenn wir auf dem Triangulationspunkt P_n die geographischen Koordinaten durch direkte astronomische Beobachtungen bestimmen, wie auch das geographische Azimut von P_n nach P'_n, so können wir daraus die geographischen Koordinaten φ^a_n, λ^a_n für die Projektion

von P_n auf das Geoid P'_n (ausgeführt mit Hilfe der durch P_n gehenden Lotlinie) berechnen, ebenso wie das Azimut der geodätischen Linie $\alpha^a_{n,n'}$, welche durch die Projektionen von P_n und P'_n geht. φ^a_n und λ^a_n bestimmen die Stellung der Lotlinie, d. h. der Normalen zum Geoid im projizierten Punkt von P_n. Im allgemeinen weichen die Größen φ^a_n, λ^a_n und $\alpha^a_{n,n'}$ von den durch die geodätische Uebertragung gefundenen sogenannten geodätischen Elementen φ^g_n, λ^g_n und $\alpha^g_{n,n'}$ auf dem Referenzellipsoid ab, weil die Geoidnormale von P_n nicht parallel zur Ellipsoidnormalen von P'_n ist. Das zeigt, daß das Geoid von dem angenommenen Referenzellipsoid abweicht. Wir denken uns durch P'_n eine Parallele zur Geoidnormalen gezogen. Den Winkel, welchen diese Parallele mit der Ellipsoidnormalen bildet, nennen wir die *totale Lotabweichung* Θ_n im Punkte P_n für das angenommene Referenzellipsoid.

Es soll nun Θ_n aus der Vergleichung der astronomischen Elemente φ^a_n, λ^a_n, $\alpha^a_{n,n'}$ mit den geodätischen Elementen φ^g_n, λ^g_n, $\alpha^g_{n,n'}$ bestimmt werden.

Bestimmung der Lotabweichung.

Da wir das Referenzellipsoid im Fundamentalpunkt O berührend an das Geoid gelegt haben (die beiden Normalen fallen zusammen), so haben wir:

$$\varphi^a_o = \varphi^g_o$$
$$\lambda^a_o = \lambda^g_o$$
$$\alpha^a_{0\cdot 1} = \alpha^g_{0\cdot 1}$$

Wir legen um den Punkt P'_n eine Kugel vom Radius Eins, schneiden mit ihr die verschiedenen Linien und Ebenen und erhalten so die nachstehende Figur 1.

Z^g_n = ellipsoidisches (geodätisches) Zenit von P_n = Schnitt der Ellipsoidnormalen durch P'_n mit der Kugel.

Z^a_n = wirkliches (astronomisches Zenit) von P_n = Schnitt der Parallelen durch P'_n zur Geoidnormalen von P_n.

N = Schnitt der Parallelen zur Erdachse durch P'_n mit der Kugel.

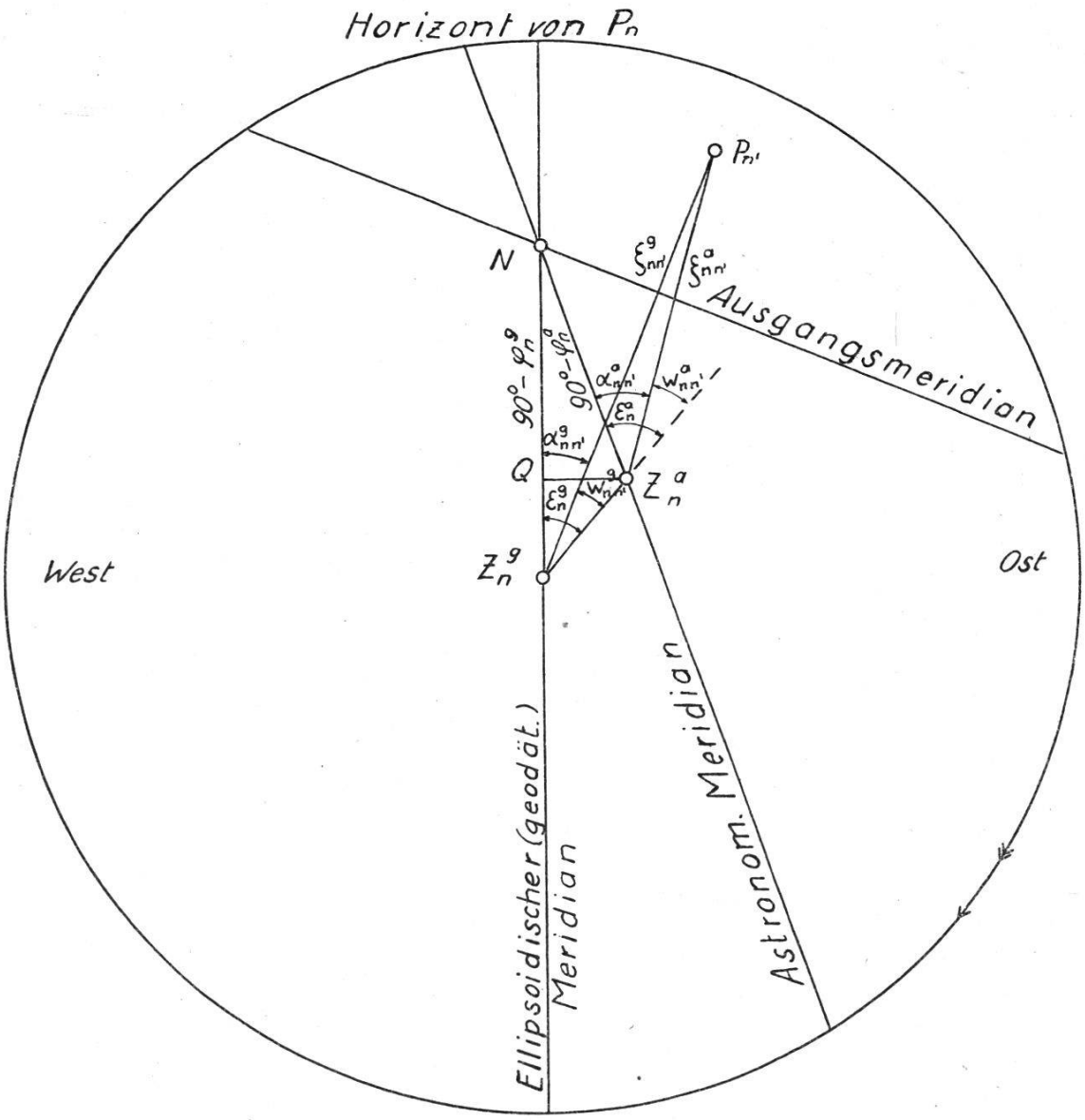
$P_{n'}$ = Schnitt der Parallelen zur Ziellinie $P_n P_{n'}$ mit der Kugel.

$Z^g_n Z^a_n$ = Θ_n = totale Lotabweichung von P_n.

ε^g_n = geodätisches Nordazimut der Lotabweichung.

$180^\circ + \varepsilon^a_n$ = astronomisches Nordazimut der Lotabweichung.

Q = Fußpunkt des Großkreises durch Z^a_n normal zum geodätischen Meridian durch Z^g_n.



Figur 1.

$Z^g_n\,Q = \zeta_n$ = Meridiankomponente der Lotabweichung Θ_n von Z^g_n, nach Norden positiv gezählt.

$Q\;Z^a_n = \eta_n$ = I. Vertikalkomponente der Lotabweichung Θ_n, nach Osten positiv gezählt.

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck NQZ^a_n, mit dem rechten Winkel bei Q, erhalten wir:

$$\cos\,(\lambda^g_n - \lambda^a_n) = \operatorname{tg}\varphi^a_n \cdot \operatorname{cotg}\,(\varphi^g_n + \xi_n)$$

$$\sin\,\eta_n = \sin\,(\lambda^g_n - \lambda^a_n)\,\cos\,\varphi^a_n$$

$\lambda^g_n - \lambda^a_n$ ist höchstens eine Minute sexagesimal. Wir dürfen daher ohne Gefährdung der Genauigkeit der abzuleitenden Formeln setzen:

$$\cos\,(\lambda^g_n - \lambda^a_n) = 1.$$

$$\sin\,(\lambda^g_n - \lambda^a_n) = \operatorname{arc}\,(\lambda^g_n - \lambda^a_n)$$

Damit erhalten wir:

$$\operatorname{tg}(\varphi_n^g + \xi_n) = \operatorname{tg}\varphi_n^a$$

und daraus

(1) $$\underline{\xi_n = \varphi_n^a - \varphi_n^g}$$

(2) $$\underline{\eta_n = (\lambda_n^g - \lambda_n^a)''} \quad \cos\varphi_n^a = \underline{-(\lambda_n^a - \lambda_n^g)'' \quad \cos\varphi_n^a}$$

in Sekunden

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck $Z_n^a\ Z_n^g\ Q$ folgt:

(3) $$\underline{\xi_n = \Theta_n \cos\varepsilon_n^g} \qquad \underline{\eta_n = \Theta_n \sin\varepsilon_n^g}$$

In der geodätischen Literatur finden wir oft die Formel

$$\eta_n = +(\lambda_n^a - \lambda_n^g) \quad \cos\varphi_n^a$$

Dabei sind die geographischen Längen nach Osten positiv gezählt, was dem allgemeinen Gebrauch widerspricht, oder es wird η nach Westen positiv gezählt. Dann ist aber der Drehsinn des Winkels ϵ_n^g gegen den Uhrzeigersinn gerichtet, was der allgemeinen geodätischen Praxis widerspricht. Aus diesen Gründen entscheiden wir uns für das in den Formeln (1) bis (3) adoptierte System.

Für positives ξ_n liegt das astronomische Zenit nördlich vom geodätischen I. Vertikal durch das geodätische Zenit.

Für positives η_n liegt das astronomische Zenit östlich vom geodätischen Meridian durch das geodätische Zenit.

Das sphärische Dreieck $Z_n^a\ Z_n^g\ P_{n'}$ gibt nach einer Neper'schen Analogie

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\zeta_{n,n'}^a + \zeta_{n,n'}^g}{2}\right) = \frac{\sin\left(\dfrac{w_{n,n'}^a + w_{n,n'}^g}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{w_{n,n'}^a - w_{n,n'}^g}{2}\right)} \operatorname{tg}\left(\frac{\Theta_n}{2}\right)$$

wenn wir die Bezeichnungen einführen:

$$w_{n,n'}^g = \text{Winkel } P_{n'}\ Z_n^g\ Z_n^a$$

$$w_{n,n'}^a = \text{Winkel } P_{n'}\ Z_n^a \cdot \text{Verlängerung von } Z_n^g\ Z_n^a$$

Daraus folgt mit für alle Fälle genügender Genauigkeit, im Hinblick auf die Kleinheit von Θ_n (maximal eine Minute)

(4) $$w_{n,n'}^a - w_{n,n'}^g = \Theta_n \operatorname{cotg} \zeta_{n,n'}^a \sin w_{n,n'}^a$$

Das Dreieck $N\ Z_n^a\ Z_n^g$ gibt nach einer Neper'schen Analogie:

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\varphi_n^a + \varphi_n^g}{2}\right) = \frac{\sin\left(\dfrac{\varepsilon_n^a + \varepsilon_n^g}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\varepsilon_n^a - \varepsilon_n^g}{2}\right)} \operatorname{tg}\left(\frac{\Theta_n}{2}\right)$$

Daraus folgt, da starke Annäherung an die Pole auf näher als 2° praktisch nicht in Frage kommt, und daher $\frac{\varepsilon_n^a - \varepsilon_n^g}{2}$ stets so klein bleibt, daß der Sinus durch den Arcus ersetzt werden darf

(5) $$\varepsilon_n^a - \varepsilon_n^g = \Theta_n \operatorname{tg} \varphi_n^a \sin \varepsilon_n^g$$

Aus der Figur 1 erkennen wir die Beziehungen:

$$\alpha_{n,n'}^g + w_{n,n'}^g = \varepsilon_n^g; \; \alpha_{n,n'}^a + w_{n,n'}^a = \varepsilon_n^a$$

Daraus folgt

$$\alpha_{n,n'}^a - \alpha_{n,n'}^g = (\varepsilon_n^a - \varepsilon_n^g) - (w_{n,n'}^a - w_{n,n'}^g)$$

und weiter, unter Beachtung von (4) und (5):

$$\alpha_{n,n'}^a - \alpha_{n,n'}^g = \Theta_n \sin \varepsilon_n^g \operatorname{tg} \varphi_n^a - \Theta_n \operatorname{cotg} \zeta_{n,n'}^a \sin w_{n,n'}^g$$

Unter Beachtung der Beziehungen für η_n und ζ_n ergibt sich daraus:

(6a) $$\underline{\alpha_{n,n'}^a - \alpha_{n,n'}^g = \eta_n \operatorname{tg} \varphi_n^a - \eta_n \operatorname{cotg} \zeta_{n,n'}^a \cos \alpha_{n,n'}^g + \zeta_n \operatorname{cotg} \zeta_{n,n'}^a \sin \alpha_{n,n'}^g}$$

oder auch:

(6b) $$\underline{\alpha_{n,n'}^a - \alpha_{n,n'}^g = \eta_n \operatorname{tg} \varphi_n^a + \Theta_n \sin (\alpha_{n,n'}^g - \varepsilon_n^g) \operatorname{cotg} \zeta_{n,n'}^a}$$

Da $\zeta_{n,n'}^a$ im allgemeinen sehr nahe an 90° liegt, weil in Haupttriangulierungen keine großen Zielneigungen auftreten, so ist für die meisten Zwecke genügend genau

(7) $$\underline{\alpha_{n,n'}^a - \alpha_{n,n'}^g = \eta_n \operatorname{tg} \varphi_n^a}$$

oder

(8) $$\underline{\eta_n = (\alpha_{n,n'}^a - \alpha_{n,n'}^g) \operatorname{cotg} \varphi_n^a}$$

In niedrigen Breiten, wo cotg φ groß wird, ist die Bestimmung von η aus Azimutmessungen sehr ungenau, um am Aequator ganz zu versagen.

Aufstellung der Laplace-Gleichung.

Setzt man die beiden Werte für η_n nach (2) und (8) einander gleich, so erhält man

$$(\alpha_{n,n'}^a - \alpha_{n,n'}^g) \operatorname{cotg} \varphi_n^a = -(\lambda_n^a - \lambda_n^g) \cos \varphi_n^a$$

oder einfacher

(9) $$\underline{\alpha_{n,n'}^a - \alpha_{n,n'}^g + (\lambda_n^a - \lambda_n^g) \sin \varphi_n^a = 0}$$

Das ist die von *Laplace* aufgestellte und nach ihm benannte Gleichung.

Wenn man $\zeta_{n,n'}^a \neq 90°$ annimmt, und daher cotg $\zeta_{n,n'}^a$ nicht vernachlässigt, so erhält man eine etwas kompliziertere Gleichung, die wir aber hier nicht aufstellen wollen. Wir verweisen diesbezüglich auf eine kürzlich veröffentlichte Arbeit des Verfassers[1].

---

[1] *Baeschlin*, C. F., Rapport sur la répartition et l'utilisation pratique des points de Laplace. Bulletin géodésique 1936, No 52, page 433, formule (9a).

Es muß hier ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß die Formel (9) auf der Voraussetzung beruht, daß im Fundamentalpunkt O die Lotabweichungskomponenten ζ_0 und η_0 gleich Null seien. Es geht also nicht an, bei einer größern Triangulation die Laplace-Gleichung (9) zwischen zwei beliebigen Punkten anzuwenden; sie darf nur zwischen dem Fundamentalpunkt und einem Außenpunkt verwendet werden.

Man kann sich zwar von dieser Beschränkung befreien, wenn man die Formeln aufstellt, die sich ergeben, wenn man auch für den Fundamentalpunkt O eine Lotabweichung annimmt. Da die Ableitung ziemlich umständlich ist und eine recht komplizierte Formel resultiert, sehen wir hier davon ab, diese Rechnung durchzuführen. Wir verweisen auf die oben zitierte Veröffentlichung des Verfassers[1].

Verwendung der Laplace-Gleichungen für die Ausgleichung eines Dreiecksnetzes.

Wir gehen von der einfachen Laplace-Gleichung (9) aus

$$\alpha^a_{n,\,n'} - \alpha^g_{n,\,n'} + (\lambda^a_n - \lambda^g_n) \sin \varphi^a_n = 0.$$

Infolge der Fehler an den 5 in dieser Gleichung auftretenden Elementen wird die rechte Seite von (9) von Null verschieden sein; wir wollen diesen Wert mit ω bezeichnen.

Bevor wir an die Lösung der gestellten Aufgabe herantreten, müssen wir uns Rechenschaft geben, wie wir uns die Größen $\alpha^g_{n,\,n'}$ und λ^g_n verschaffen.

Der Fundamentalpunkt O sei mit dem Punkt P_n durch eine Triangulation verbunden; wir wählen aus dieser Triangulation eine möglichst direkt von O nach P_n führende Dreieckskette. Wir gleichen in den Dreiecken dieser Kette die Winkel auf 180° aus und rechnen mit Hilfe der so ausgeglichenen Winkel die Seiten OP_1, P_1P_2, ... $P_{n-1}\,P_n$.

Aus den ausgeglichenen Winkeln bilden wir die Brechungswinkel w in dem Polygon aus geodätischen Linien, das auf möglichst direktem Weg den Punkt P_n mit dem Fundamentalpunkt O verbindet.

Das geodätische Azimut von $OP_1 = \alpha_{0\cdot 1}$ bestimmen wir aus dem auf dem Fundamentalpunkt O astronomisch beobachteten Azimut von $OP'_0 = \alpha^a_{0,\,0'}$ durch Zufügung des Winkels w_0

$$\alpha_{0\cdot 1} = \alpha^a_{0\cdot 0'} + w_0$$

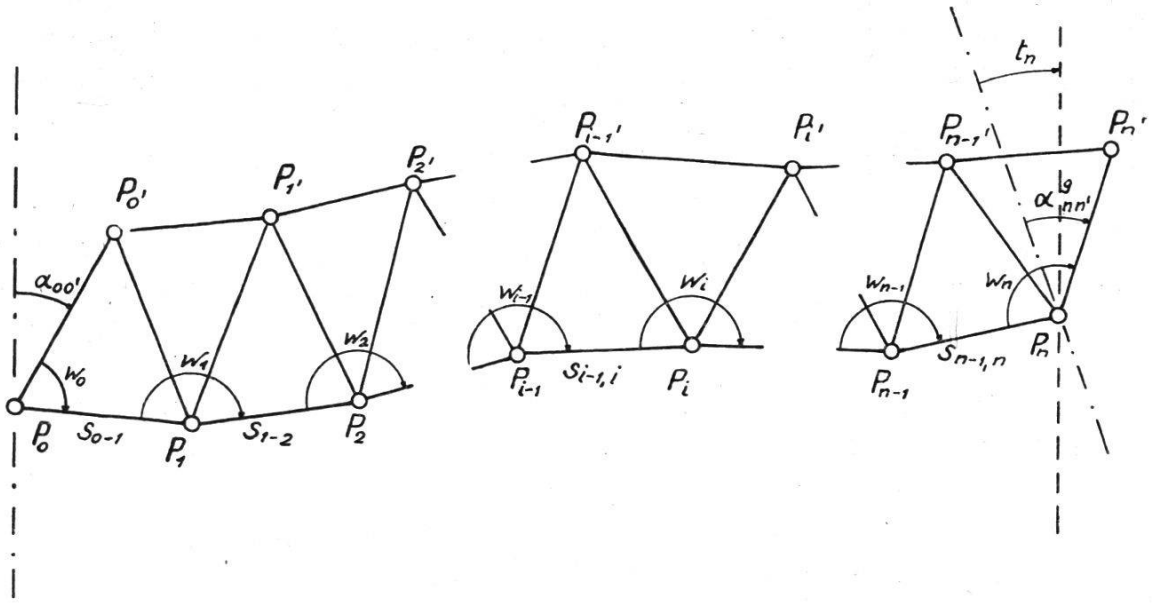
Aus diesem Azimut und der Länge der geodätischen Linie $OP_1 = s_{0\cdot 1}$ berechnen wie die geodätischen rechtwinkligen Koordinaten von $P_1 : x_1$ und y_1, wo wir die Koordinaten von O

$$x_0 = 0 \text{ und } y_0 = 0$$

setzen.

---

[1] *Baeschlin*, C. F., Rapport sur les répartition et l'utilisation pratique des points de Laplace. Bulletin géodésique 1936, No 52, page 436, formule 11).



Figur 2.

Nach *Helmert*, Höhere Geodäsie, I. Teil, 9. Kapitel, § 7, S. 419, Formeln (1), (2), (3) und (4) erhalten wir:

$$(10)\quad \begin{cases} y_1 = s_{0\cdot1} \sin \alpha_{0\cdot1} - \dfrac{v_{0\cdot1} \cdot u_{0\cdot1}^2}{6\,R^2} + \mathrm{Gl}_5 \\ x_1 = s_{0\cdot1} \cos \alpha_{0\cdot1} \left\{ 1 + \left(\dfrac{y_1^2}{2\,R^2} - \dfrac{y_1^2}{6\,R^2} \right) + \mathrm{Gl}_4 \right\} \\ \Delta\mathfrak{a}_{0\cdot1} = -\rho'' \dfrac{u_{0\cdot1}}{R} \left\{ \left(\dfrac{y_1}{R} + \dfrac{y_1}{2\,R} \right) + \mathrm{Gl}_3 \right\} \end{cases}$$

Hier haben wir zur Abkürzung gesetzt

$$u_{0\cdot1} = s_{0\cdot1} \cos \alpha_{0\cdot1}$$
$$v_{0\cdot1} = s_{0\cdot1} \sin \alpha_{0\cdot1}$$

$R^2 = \dfrac{b^2}{W_0^4} = N_0 \cdot M_0$, wo b die kleine Achse der Meridianellipse des Referenzellipsoides ist.

$$W_0^2 = 1 - e^2 \sin^2 \varphi_0;\ e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

R stellt den sogenannten „mittleren Krümmungsradius" des Fundamentalpunktes dar.

$$\Delta\mathfrak{a}_{0\cdot1} = \mathfrak{a}_{1\cdot0} - \mathfrak{a}_{0\cdot1} - 180^\circ.$$

Die Winkel $\mathfrak{a}$ stellen die Winkel dar, welche eine geodätische Linie mit der Parallelen durch den Scheitel zum Ausgangsmeridian durch O bildet. Wir wollen diese Winkel „Neigungen" nennen, in Analogie zu der ebenen Koordinatenrechnung; wir zählen sie vom Nordast der Parallelen aus, positiv im Uhrzeigersinn.

Die Neigung der geodätischen Linie $P_1\,P_2$, $\mathfrak{a}_{1\cdot2}$, wird

$$\mathfrak{a}_{1\cdot2} = \mathfrak{a}_{1\cdot0} + w_1$$

Es ist aber

$$\alpha_{1\cdot 0} = \alpha_{0\cdot 1} + 180^{\circ} + \Delta\alpha_{0\cdot 1}$$

Mit Hilfe von $\alpha_{1\cdot 2}$ und $s_{1\cdot 2}$ berechnen wir y_2, x_2 und $\Delta\alpha_{1\cdot 2}$

$$(10a)\quad \begin{cases} y_2 = y_1 + \left\{ v_{1\cdot 2} - \left(y_1 + \frac{1}{3}\, v_{1\cdot 2}\right) \frac{u^2_{1\cdot 2}}{2\,R^2} \right\} \\ x_2 = x_1 + u_{1\cdot 2} \left\{ 1 + \left(\frac{y_2^{\,2}}{2R^2} - \frac{v^2_{1\cdot 2}}{6R^2} \right) \right\} \\ \Delta\alpha_{1\cdot 2} = -\rho'' \frac{u_{1\cdot 2}}{R} \left\{ \frac{y_1}{R} + \frac{v_{1\cdot 2}}{2\,R} \right\} \end{cases}$$

Damit ergibt sich die Neigung der geodätischen Linie $P_2\,P_3$, $\alpha_{2\cdot 3}$

$$\alpha_{2\cdot 3} = \alpha_{2\cdot 1} + w_2$$

wobei

$$\alpha_{2\cdot 1} = \alpha_{1\cdot 2} + 180^{\circ} + \Delta\alpha_{1\cdot 2}$$

So fahren wir weiter bis zum Punkt P_n

$$(10b)\quad \begin{cases} y_n = y_{n-1} + \left\{ v_{n-1,n} - \left(y_{n-1} + \frac{1}{3}\, v_{n-1,n} \right) \frac{u^2_{n-1,n}}{2\,R^2} \right\} \\ x_n = x_{n-1} + u_{n-1,n} \left\{ 1 + \left(\frac{y_n^2}{2\,R^2} - \frac{v^2_{n-1,n}}{6\,R^2} \right) \right\} \\ \Delta\alpha_{n-1,n} = -\rho'' \frac{u_{n-1,n}}{R} \left\{ \frac{y_{n-1}}{R} + \frac{v_{n-1,n}}{2\,R} \right\} \end{cases}$$

wo
$$v_{n-1,n} = s_{n-1,n} \cdot \sin \alpha_{n-1,n}$$
$$u_{n-1,n} = s_{n-1,n} \cdot \cos \alpha_{n-1,n}$$

Daraus leitet man die Neigung der geodätischen Linie $P_n\,P_{n'}$, $\alpha_{n,n'}$, ab, nach welcher das astronomische Azimut auf P_n beobachtet worden ist. Wir erhalten:

$$\alpha_{n,n'} = \alpha_{n,n-1} + w_n$$

Es ist

$$\alpha_{n,n-1} = \alpha_{n-1,n} + 180^{\circ} + \Delta\,\alpha_{n-1,n}$$

Setzen wir den Wert für $\alpha_{n-1,n}$ ein und gehen zurück bis auf $\alpha^{a}_{0,0'}$, so folgt

$$\alpha_{n,n'} = \alpha^{a}_{0,0'} + w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \Delta\,\alpha_{0\cdot 1} + \Delta\,\alpha_{1\cdot 2} + \ldots + \Delta\,\alpha_{n-2,\,n-1} + \Delta\,\alpha_{n-1,n} + (n-1)\,180^{\circ}$$

oder

$$(11)\qquad \alpha_{n,n'} = \alpha^{a}_{0.0'} + \sum_{i=0}^{i=n} w_i + \sum_{i=1}^{i=n} \Delta\,\alpha_{i-1,\,i} + (n-1)\,180^{\circ}$$

Damit wir das *Azimut* der geodätischen Linie $P_n\,P_{n'}$ erhalten ($\alpha^{g}_{n,\,n'}$) müssen wir die sogenannte „*Meridiankonvergenz*" t_n zufügen. Es ist dies der Winkel, den die Parallele durch P_n zum Meridian durch den Fundamentalpunkt O mit dem Meridian durch P_n bildet. Wir

zählen diesen Winkel zwischen den Nordästen der beiden Linien im Uhrzeigersinn.

Nach *Helmert*, Höhere Geodäsie, I. Teil, S. 460, Formeln (3) ergibt sich unter Beschränkung auf Glieder bis zur 4. Ordnung

$$t_n = -\lambda_n'' \sin \varphi_n \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\lambda_n''^2}{\rho''^2} \cos^2 \varphi_n + \mathrm{Gl}_4\right) \tag{12}$$

und

$$y_n = -\frac{a}{\rho''} \frac{\cos \varphi_n \cdot \lambda_n''}{W_n} \left(1 - \frac{\lambda_n''^2 \sin^2 \varphi_n}{6\, \rho''^2}\right) \tag{13}$$

Damit wird:

$$\lambda_n'' = -\frac{y_n}{a} \frac{W_n \cdot \rho''}{\cos \varphi_n} \left(1 + \frac{\lambda_n''^2 \sin^2 \varphi_n}{6\, \rho''^2}\right) \tag{14}$$

Setzen wir diesen Wert für λ_n in (12) ein, so folgt

$$t_n'' = +\frac{y_n W_n \rho''}{a} \operatorname{tg} \varphi_n \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\lambda_n''^2}{\rho''^2} \cos^2 \varphi_n + \frac{\lambda_n''^2 \sin^2 \varphi_n}{6\, \rho''^2}\right) \tag{15}$$

Den Ausdruck für $\Delta\, \mathfrak{a}_{i-1,\, i}$ können wir noch etwas umformen; es ist nach *Helmert*, Höhere Geodäsie, I. Teil, S. 418, Formel (9)

$$\Delta \mathfrak{a}_{i-1,\, i} = -\rho'' \frac{\Delta x}{R} \left\{ \begin{array}{l} \frac{y}{R} \left(1 - \frac{y^2}{6 R^2} + \frac{(\Delta x)^2}{12 R^2} + \frac{(\Delta y)^2}{8 R^2}\right) \\ + \left(2 \frac{xy}{R^2} + \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{6 R^2}\right) e^2 \sin 2 \varphi_0 + \mathrm{Gl}_5 \end{array} \right\}$$

Dabei ist

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} \qquad x = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$$

$$\Delta y = y_i - y_{i-1} \qquad y = \frac{y_{i-1} + y_i}{2}$$

Beachten wir nur die Glieder 2. Ordnung, so ist

$$\Delta \mathfrak{a}_{i-1,\, i} = -\rho'' \frac{\Delta x \cdot y}{R^2} + \mathrm{Gl}_4$$

und damit wird

$$\sum_{i=1}^{i=n} \Delta \mathfrak{a}_{i-1,\, i} = -\frac{\rho''}{R^2} \sum \Delta x \cdot y \tag{16}$$

$\Sigma \Delta x \cdot y$ ist aber genähert die Fläche zwischen dem Polygonzug $O_1\, P_1\, P_2 \ldots P_i \ldots P_n$, der Ordinate von P_n und dem Meridian durch O.

Somit wird, richtig bis auf Glieder 3. Ordnung

$$\sum_{i=1}^{i=n} \Delta \mathfrak{a}_{i-1,\, i} = -E \tag{17}$$

wo E der sphäroidische Exzeß der oben bezeichneten Figur ist.

Somit erhalten wir

$$(18) \qquad \alpha^g_{n,\,n'} = \alpha^a_{0\cdot 0'} + \sum_{i=0}^{i=n} w_i - E$$

$$+ \frac{y_n\, W_n \cdot \rho''}{a} \operatorname{tg} \varphi_n \left(1 + \frac{\lambda''^2_n \cos^2 \varphi_n}{3\, \rho''^2} + \frac{\lambda''^2_n \sin^2 \varphi_n}{6\, \rho''^2} \right)$$

Die Laplace-Gleichung lautet

$$\alpha^a_{n,\,n'} - \alpha^g_{n,\,n'} + \sin \varphi_n\, (\lambda^a_n - \lambda^g_n) = \omega.$$

Rechnen wir dies aus, so erhalten wir:

$$\alpha^a_{n,\,n'} - \alpha^a_{0,\,0'} + \sin \varphi_n\, \lambda^a_n - \sum_{i=o}^{i=n} w_i + E - \frac{y_n\, W_n\, \rho''}{a} \operatorname{tg} \varphi_n \cdot$$

$$\left(1 + \frac{\lambda''^2_n \cdot \cos^2 \varphi_n}{3\, \rho''^2} + \frac{\lambda''^2_n \sin^2 \varphi_n}{6\, \rho''^2} \right) - \sin \varphi_n \cdot \lambda^g_n = \omega$$

Nun ist aber

$$- \sin \varphi_n \cdot \lambda^g_n = + \frac{y_n\, W_n\, \rho''}{a} \operatorname{tg} \varphi_n \left(\frac{1 + \lambda''^2_n \sin^2 \varphi_n}{6\, \rho''^2} \right)$$

so daß wir erhalten

$$\alpha^a_{n,\,n'} - \alpha^a_{0,\,0'} + \lambda^a_n \sin \varphi_n - \sum_{i=0}^{i=n} w_i + E$$

$$- \frac{y_n\, W_n\, \rho'' \cdot \operatorname{tg} \varphi_n}{a} \; \frac{\lambda''^2_n \cos^2 \varphi_n}{3\, \rho''^2} = \omega.$$

In erster Näherung ist nach Formel (14) oben

$$\lambda''_n \cos \varphi_n = - \frac{y_n\, W_n\, \rho''}{a}$$

Damit erhalten wir die endgültige Formel

$$(19) \qquad \alpha^a_{n,\,n'} - \alpha^a_{0,\,0'} + \lambda^a_n \sin \varphi_n - \sum_{i=o}^{i=n} w_i + E$$

$$- \frac{y_n^3\, W_n^3}{3a^3}\, \rho'' \operatorname{tg} \varphi_n = \omega.$$

Man erkennt daraus, daß der von der geodätischen Uebertragung herrührende Teil der Laplace-Gleichung ist

$$(20) \qquad E - \frac{y_n^3}{3a^3}\, W_n^3\, \rho'' \operatorname{tg} \varphi_n = \omega_g$$

Wenn daher zur geodätischen Uebertragung fehlerhafte Elemente verwendet werden (w und s), womit die Koordinaten der Punkte

$P_1, P_2, \ldots P_i, \ldots P_n$ fehlerhaft werden, so hat das auch zur Folge daß E und y_n sich ändern.

In (20) ist $E = \rho'' \frac{\Sigma \Delta xy}{R^2}$ von der 2. Ordnung klein, wenn wir $\frac{x}{R}$ und $\frac{y}{R}$ von der 1. Ordnung klein annehmen, während das 2. Glied von ω_g, welches $\frac{y_n^3}{a^3}$ enthält, von der 3. Ordnung klein ist. Es genügt daher für die Abschätzung des mittleren Fehlers von ω_g, herrührend aus der Unsicherheit der Koordinaten x und y, nur den mittleren Fehler von E in Betracht zu ziehen.

Wir haben den mittleren Fehler von $\Sigma \Delta x \cdot y$ für eine Dreieckskette aus gleichseitigen Dreiecken berechnet, wobei die sämtlichen Dreieckswinkel mit demselben mittleren Fehler μ behaftet angenommen worden sind, wobei aber auf die Ausgleichung der drei Winkel in jedem Dreieck verzichtet worden ist. Dadurch wird der mittlere Fehler des Ausdruckes $\Sigma \Delta x \cdot y$ bestimmt zu groß erhalten. Wir gehen hier auf diese Berechnung nicht näher ein, sondern geben nur das Ergebnis.

Wir finden

$$m_{\omega_g''} < \mu'' \frac{s^2}{R^2} \sqrt{2 \cdot n^3}$$

wo s die Länge einer Dreiecksseite und n die Anzahl der Seiten zwischen dem Fundamentalpunkt O und dem Laplacepunkt P_n ist.

Mit

$\mu = 1''$; $s = 50$ km; $n = 10$; $R = 6371$ *km* finden wir

$$m_{\omega_g''} < 0.''00275$$

Mit $\mu = 1''$; $s = 100$ km; $n = 10$; $R = 6371$ km finden wir

$$m_{\omega_g''} < 0.''011.$$

Da die letzten Annahmen sicher extreme sind, so ist durch diese Fehleruntersuchung zweifellos gezeigt, daß der Einfluß der geodätischen Elemente auf den Widerspruch der Laplace'schen Bedingungsgleichung unter allen Umständen vernachlässigt werden darf.

Das Ergebnis unserer Untersuchung im Bericht über die Verteilung und die praktische Verwendung der Laplace-Punkte an die Internationale Vereinigung für Geodäsie anläßlich ihrer Versammlung vom September 1936 in Edinburg[1] wird also durch diese strengere Prüfung vollkommen bestätigt.

Auf die weiteren Fragen, welche in jenem Berichte behandelt worden sind, treten wir hier nicht ein. Es lag uns nur daran, hier eine strengere Ableitung für den aus den geodätischen Elementen folgenden Widerspruch der Laplace-Gleichung zu geben. Er erweist sich als von der 2. Ordnung klein und nicht, wie man auf den ersten Blick schließen

[1] *Baeschlin*, C. F., Rapport sur la répartition et l'utilisation pratique des points de Laplace. Bulletin géodésique 1936, No. 52, page 442.

möchte, von der ersten Ordnung. Sein Fehlereinfluß ist daher gegenüber den Fehlern der astronomischen Elemente und der Winkel des Dreiecksnetzes verschwindend. Damit ist aber erst die einwandfreie Verwendung der Laplace-Gleichungen als Bedingungsgleichungen für die Ausgleichung von Triangulationsnetzen gewährleistet.

Herbstversammlung der Sektion Zürich-Schaffhausen.

Samstag, den 12. Dezember 1936, fand im Restaurant „Du Pont" in Zürich die ordentliche Herbstversammlung der Sektion Zürich-Schaffhausen statt. Der späte Zeitpunkt der Tagung war begründet durch einige pendente Geschäfte, die der Vorstand noch vorher zu erledigen hoffte.

Präsident Vogel konnte in seinen Eröffnungsworten eine erfreulich große Zahl von Vereinsmitgliedern begrüßen. Es war dies nicht anders zu erwarten, bildete doch das Haupttraktandum „Aktuelle Fragen über Arbeitsbeschaffung" reichlich Stoff zur Diskussion.

Bereits seit längerer Zeit sind die Arbeitsmöglichkeiten in unserm Berufe zusammengeschrumpft. Das Fortschreiten der Grundbuchvermessung muß wegen der eingeschränkten Kredite verlangsamt werden, tiefbautechnische Arbeiten, die sehr oft an Geometerbureaux vergeben werden, kommen wegen der allgemeinen Depression auf dem Baumarkt weniger zur Ausführung. Auch auf dem Gebiete der Meliorationen, insbesonders der Güterzusammenlegungen, ist ein Stillstand eingetreten, als Folge fehlender Mittel bei Staat, Gemeinde und Landwirtschaft. An die Aufnahme neuer Unternehmen soll gewiß mit Vorsicht geschritten werden, doch wichtige Argumente sprechen dafür, daß solche nicht einfach sistiert werden dürfen. Meliorationen tragen wesentlich zur Arbeitsbeschaffung bei, sprechende Beispiele finden wir bei den zwei schaffhauserischen Gemeinden Herblingen und Beringen. Beide Orte haben ziemlich viele, früher in der Metallindustrie beschäftigte Arbeiter, für die dringend Notstandsprojekte bereitgestellt werden mußte. Beim Wegebau anläßlich der Güterzusammenlegung konnten während mehreren Jahren viele Beschäftigung finden. — Die Schaffung neuer Erwerbsmöglichkeiten, die Vereinfachung der Betriebsverhältnisse, die Vermehrung der Produktion sind alles Momente die volkswirtschaftlich solche Unternehmen rechtfertigen. Bei der politischen Unsicherheit unserer Zeit soll die wirtschaftliche Unabhängigkeit unseres Landes so weit als möglich gefördert werden.

Zu diesen Problemen Stellung zu nehmen, von den vorhandenen Arbeitsmöglichkeiten diejenigen auszuwählen, die selbst in einer Krisenzeit verantwortet werden können, war das Hauptthema unserer Tagung.

Der Vorsitzende gab in einem längern Exposé die Schritte des Vorstandes bekannt, die er hinsichtlich Arbeitsbeschaffung unternommen hat. Den präsidialen Ausführungen folgte eine reichlich benützte Diskussion, die wertvolle Anregungen zeitigte.

So wurde u. a. die Förderung der Uebersichtspläne gewünscht, die als Grundlage der neuen Kartenwerke, nicht beliebig hinausgeschoben werden darf. In verschiedenen Kantonen, die aus frühern Jahren Vermessungen besitzen, wäre dies ohne vorhergehende Parzellarvermessung möglich.

Im engen Zusammenhang mit den vorhandenen Arbeitsmöglichkeiten steht auch die Frage des Nachwuchses. Während bei den Vermessungstechnikern bereits gewisse Richtlinien aufgestellt wurden, sind