**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

**Herausgeber:** Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

**Band:** 34 (1936)

**Heft:** 10

**Artikel:** Genauigkeit von Grundbuchflächen aus Koordinaten bei einer optischen Aufnahme

**Autor:** Sommer, H.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-195977

# Genauigkeit von Grundbuchflächen aus Koordinaten bei einer optischen Aufnahme.

Von *H. Sommer*, dipl. Kulturingenieur.

Grundstücks- und Blattinhalte aus reinen Zahlen, in unserem Falle aus rechtwinkligen Koordinaten zu ermitteln, bekanntlich die praktisch genaueste Art der Flächenberechnung, brachten mich auf den Gedanken, mich einmal etwas näher mit der zu erreichenden Genauigkeit dieser Flächen zu befassen. Eine solche Fläche kann ja auch nur so genau sein als die Aufnahme selbst ist. D. h., wollen wir uns Rechenschaft geben über den mittleren Fehler, mit dem eine bestimmte Fläche behaftet ist, so müssen wir den Genauigkeitsgrad unserer Aufnahmeelemente, beziehungsweise unserer Grenzpunkte zu erfassen versuchen.

Um zu diesem Ziele zu gelangen, gibt es verschiedene Wege, die im allgemeinen recht mühselig sein können. Bei solchen Aufgaben geht man bekanntlich von den mittleren Fehlern der Aufnahmeelemente aus, in unserem Falle von den polaren Koordinaten, um dann den mittleren Fehler irgendeiner Funktion dieser Beobachtungsgrößen zu ermitteln. Leider spielen in unserem speziellen Falle neben diesen primären Fehlern noch andere eine ebenso große Rolle. Die Zwangsausgleichung der Polygonpunkte auf das Triangulationsnetz und die Zwangsanschlüsse an die anstoßenden Polygonpunkte der Nachbargemeinden sind Elemente, die schwer in unsere Rechnung einzubeziehen sind.

Die Eigenart der Doppelaufnahme der Grenzpunkte als ein Mittel zur Kontrolle derselben, gibt uns eine Handhabe, um recht einfach und sicher mittlere Koordinatenfehler eines Aufnahmepunktes rechnerisch bestimmen zu können.

Ich möchte im folgenden Ergebnisse aus der Praxis mit in die Untersuchung einbeziehen, wo wir also dann sofort ein besseres Bild über das Ganze haben. Die folgende tabellarische Zusammensetzung der Koordinatenunterschiede von Doppelpunkten stammt aus einer Vermessung eines Quartiers von Zürich, die jetzt noch im Gange ist. Das bis Anfang dieses Jahres aufgenommene und kartierte Gebiet besitzt eine Fläche von 150 ha mit 650 Parzellen, davon 600 die sich auf 110 ha verteilen, also ein Gebiet, wo wegen der Dichtigkeit der Grenzpunkte die Doppelaufnahme weniger zur Anwendung kam und dieselben wie bei der rechtwinkligen Aufnahmemethode mit direkten Maßen (Meßband) kontrolliert worden sind. Es ist mir bewußt, daß zu einer eindeutigen Untersuchung erst ein größeres in sich abgeschlossenes Gebiet hätte herangezogen werden sollen, aber es lag mir jetzt schon daran, ein Bild über das Erreichte zu erhalten.

Trotz der geringen Zahl der Punkte erkennen wir eine gute Uebereinstimmung der $my$ und $mx$, die ja rein theoretisch gleich groß sein müssen, da ja kein Grund vorhanden ist für eine Verschiedenheit der mittleren Koordinatenfehler. Für die weitere Untersuchung möchte

| $y$-Differenzen | | | | | | $x$-Differenzen | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| von P. P. des gleichen Zuges aufgenommen | | | von P. P. aus verschiedenen Zügen aufgenommen | | | von P. P. des gleichen Zuges aufgenommen | | | von P. P. aus verschiedenen Zügen aufgenommen | | |
| Diff. $d$ cm | Anzahl der Grenzpunkte | $ddn$ | Diff. $d$ cm | Anzahl der Grenzpunkte | $ddn$ | Diff. $d$ cm | Anzahl der Grenzpunkte | $ddn$ | Diff. $d$ cm | Anzahl der Grenzpunkte | $ddn$ |
| 0 | 38 | 0 | 0 | 15 | 0 | 0 | 41 | 0 | 0 | 16 | 0 |
| 1 | 64 | 64 | 1 | 25 | 25 | 1 | 72 | 72 | 1 | 21 | 21 |
| 2 | 34 | 136 | 2 | 14 | 56 | 2 | 21 | 84 | 2 | 12 | 48 |
| 3 | 18 | 162 | 3 | 9 | 81 | 3 | 16 | 144 | 3 | 13 | 117 |
| 4 | 1 | 16 | 4 | 3 | 48 | 4 | 3 | 48 | 4 | 6 | 96 |
| 5 | 0 | 0 | 5 | 2 | 50 | 5 | 2 | 50 | 5 | 1 | 25 |
| 6 | 0 | 0 | 6 | 1 | 36 | 6 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 |
| | 155 | 378 | | 69 | 296 | | 155 | 398 | | 69 | 307 |

Anzahl der Grenzpunkte 155 + 69 = 224

$$my_1 = \sqrt{\frac{378}{155 \cdot 2}} = 1{,}11 \text{ cm} \qquad mx_1 = \sqrt{\frac{398}{155 \cdot 2}} = 1{,}16 \text{ cm}$$

$$my_2 = \sqrt{\frac{296}{68 \cdot 2}} = 1{,}48 \text{ cm} \qquad mx_2 = \sqrt{\frac{301}{69 \cdot 2}} = 1{,}49 \text{ cm}$$

ich die Trennung zwischen den beiden Arten der Doppelpunkte vermeiden. Eine kurze praktische Ueberlegung dürfte mir recht geben, so ist also der mittlere Fehler der Koordinaten eines aufgenommenen Punktes

$$my = mx \approx \sqrt{\frac{378 + 296}{224 \cdot 2}} \approx \sqrt{\frac{398 + 307}{224 \cdot 2}} \approx \underline{\pm 1.25 \text{ cm.}}$$

Speziell bei diesen doppelt aufgenommenen Punkten ist der mittlere Fehler der Koordinaten (arithmetisches Mittel), die wir in die Flächenrechnung einführen, nur $my = mx = \frac{1{,}25}{\sqrt{2}} = \pm 0{,}88$ cm; da aber relativ wenig solche Punkte vorhanden sind, so werde ich weiter die Größe $my = mx = \pm 1{,}25$ als die erreichte Koordinatengenauigkeit betrachten. — Wir betrachten noch ein anderes Genauigkeitsmaß, das nicht eigentlich hieher gehört, aber zum Vergleich Interesse verdient. Alle Kontrollmaße wurden aus den Koordinaten abgeleitet und mit den auf dem Felde erhobenen verglichen. Die Unterschiede geben uns ebenfalls ein recht anschauliches Bild über die Güte der Aufnahme, abgesehen davon, daß sie uns dadurch bei richtiger Wahl der Kontrollmaße die ganze Feldaufnahme einwandfrei prüfen.

| Anzahl der Kontrollmaße $n$ | Differenz zwischen Rechnung u. Messung $d$ in cm | $dd\,n$ | Anteil in % |
|---|---|---|---|
| 1123 | 0 | 0 | 37,2 |
| 1244 | 1 | 1244 | 41,2 |
| 434 | 2 | 1736 | 14,3 |
| 154 | 3 | 1386 | 5,1 |
| 55 | 4 | 880 | 1,8 |
| 11 | 5 | 275 | 0,4 |
| 1 | 6 | 36 | 0,0 |
| 3022 | | 5557 | |

Diese 3022 Maße ergeben also eine mittlere Differenz zwischen den direkt auf dem Felde erhobenen und den aus der optischen Aufnahme abgeleiteten Maßen von

$$m = \sqrt{\frac{5527}{3022}} = \pm 1{,}35\ cm.$$

Nun zu der eigentlich gestellten Aufgabe zurückkommend lautet unsere Flächenformel

$$(1) \qquad F = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n} y_n \,(x_{n+1} - x_{n-1})$$

Der mittlere Fehler einer Funktion der direkt beobachteten Größen $l_1, l_2, \ldots . . l_n$ lautet nach dem Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$(2) \qquad m^2\, F\,(y_n, x_n) = \left(\frac{\partial F}{\partial l_1}\right)^2 m_1{}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial l_2}\right)^2 m_2{}^2 + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial l_n}\right)^2 m_n{}^2$$

In unserem Falle sind die polaren Koordinaten, also Winkel und Distanz die direkt beobachteten Größen, wir haben aber indirekt die mittleren Fehler der rechtwinkligen Koordinaten berechnet, ohne Betrachtung der verschiedenen Anteile der einzelnen primären Fehler. Diese rechtwinkligen Koordinaten können wir auch betrachten als einfache Umwandlung der polaren Koordinaten, so daß wir also in unserem Falle die folgende Formel anwenden wollen:

$$(3) \qquad M^2\, F\,(y_n, x_n) = \left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\right)^2 m^2 y_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial y_2}\right)^2 m^2 y_2 + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial y_n}\right)^2 m^2 y_n$$
$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 m^2 x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 m^2 x_2 + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^2 m^2 x_n$$

Wenn auch diese Rechnung nicht ganz streng ist, indem die $x$ und $y$ nicht unabhängig beobachtete Größen sind, so wollen wir sie der Einfachheit halber doch anwenden.

Mit unserer Flächenformel (1) ausgerechnet, gibt Formel (3) folgendes Resultat.

$$MF = \pm \frac{m}{2} \sqrt{\sum_1^n (y_n - y_{n+2})^2 + (x_n - x_{n+2})^2} \tag{4}$$

$$m = my = mx$$

Man erkennt, daß $MF$ eine Invariante der Koordinaten ist, da

$$(y_n - y_{n+2})^2 + (x_n - x_{n+2})^2 = s^2_{n,\, n+2}$$

wo $s_{n,\, n+2}$ die Entfernung der Punkte $n$ und $n + 2$ ist; diese Entfernung ist aber unabhängig von dem gewählten Koordinatensystem.

Berechnen wir in unserem konkreten Falle, wo $m = 1{,}25$ cm ist, einige mittlere Flächenfehler.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Fall 1. | Bauplatztypus 20 m auf 30 m . . . . . . . . . . | $F = 600$ m² | $mF = \pm 0{,}45$ m² |
| Fall 2. | Flurwegtypus 3 m Breite auf 200 m Länge, alle 50 m ein Steinpaar . . . . . . | $F = 600$ m² | $mF = \pm 1{,}65$ m² |
| Fall 3. | Größere Parzelle 100 m auf 100 m, alle 50 m ein Stein | $F = 10000$ m² | $mF = \pm 1{,}5$ m² |
| Fall 4. | Straßentypus 10 m Breite auf 1000 m Länge, alle 50 m ein Steinpaar . . . . . . | $F = 10000$ m² | $mF = \pm 2{,}7$ m² |

Diese wenigen Beispiele geben uns schon ein klares Bild über die Größenordnung unserer Flächenfehler; dabei bestätigt sich die Regel, daß schmale lange Parzellen bedeutend größere Flächenfehler aufweisen als quadratische Flächen. Wollte man noch (was ja bei Grundbuchflächenberechnungen nicht der Fall ist), wie Herr S. Bertschmann, Stadtgeometer, in seiner Studie in der „S. Z. f. V. u. KT." vom Januar 1935 dargelegt hat, die Höhe über Meer und die Projektionsverzerrung berücksichtigen, so würde z. B. Fall 3 bei einer Höhe über Meer von 450 m und $x_m$ von 52 km folgendermaßen heißen:

$$\underline{F = 10000 \text{ m}^2 \pm 1{,}5 \text{ m}^2 + 0{,}75 \text{ m}^2}$$

---

# Koordinaten-Transformation.

Von *E. Bachmann*, Dipl.-Ing.

Die alte Stadtvermessung von Basel wurde auf ein eigenes Koordinatensystem bezogen, das seinen Koordinatenursprung im ungefähren Schwerpunkt der Stadt, dem Münsterturm, hatte (Martinsturm). Die