Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 34 (1936)

Heft: 6

Artikel: Note sur le calcul de l'ellipse d'erreur

Autor: Ansermet, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-195965

Note sur le calcul de l'ellipse d'erreur.

Par *A. Ansermet.*

Dans le numéro du 12 avril 1932 de cette Revue, M. W. Leemann a développé de façon très intéressante les principes de l'ellipse d'erreur; son exposé, purement analytique, se rattache étroitement aux travaux classiques publiés sur le sujet (Helmert, Wellisch, Jordan-Eggert). Le but de la présente note est d'élargir le problème en faisant intervenir la géométrie synthétique: on obtient ainsi plus de clarté et de généralité; il s'agit de montrer également que les éléments essentiels de l'ellipse sont calculables rapidement par voie graphique sans le secours de nomogrammes ou d'abaques à points alignés comme certains auteurs le préconisent.

Remarquons tout d'abord qu'il faut distinguer les ellipses d'erreur absolue moyenne, d'erreur médiane (probable) et d'erreur quadratique moyenne. Avec M. Leemann nous considérerons la dernière de ces courbes. Désignons par x et y les coordonnées du point nouveau, centre de l'ellipse; au point de vue mathématique le problème est le même qu'il s'agisse de la détermination d'un point par des mesures angulaires ou par des mesures linéaires; la forme des coefficients de direction a et b seule change.

Des formules fondamentales

$$y - y_1 = l \cdot \sin z$$
$$x - x_1 = l \cdot \cos z$$

on déduit:

$$dy = l \cdot \cos z \cdot dz + \sin z \cdot dl$$
$$dx = -l \cdot \sin z \cdot dz + \cos z \cdot dl$$

suivant qu'on élimine dl ou dz on obtient:

$$dz = \frac{\cos z}{l} dy - \frac{\sin z}{l} \cdot dx$$

ou $$dl = \sin z \cdot dy + \cos z \cdot dx$$

formules qui fournissent ces coefficients a et b.

On peut même concevoir une compensation mixte (mesures linéaires et angulaires); un tel problème se pose lors du calcul de l'orientation intérieure en photogrammétrie; pratiquement la détermination des poids respectifs est malaisée. Une dernière remarque capitale s'impose: un réseau de points étant donné par son canevas, on peut *a priori* construire les ellipses d'erreur de ces points avant toutes mesures; l'*échelle* seule de ces courbes est inconnue. Il suffit de choisir arbitrairement l'erreur moyenne d'unité de poids m; une fois la compensation achevée, il est loisible de calculer l'échelle. Cette remarque est essentielle car on sait que les ellipses doivent avoir une forme aussi peu aplatie que possible.

Eléments de l'ellipse.

Lorsque le calcul se fait avec les formulaires officiels les éléments connus sont les *trois paramètres* $[aa]$, $[bb]$ et $[ab]$ définissant l'ellipse (resp. Q_{11}, Q_{22} et Q_{12}). On en déduit les erreurs moyennes des coordonnées M_x et M_y:

$$M_y^2 = \frac{[aa]}{D} m^2 \qquad M_x^2 = \frac{[bb]}{D} m^2$$

$$\text{ou} \quad D = [aa] \cdot [bb] - [ab]^2$$

M_x et M_y sont des éléments auxiliaires ayant un caractère conventionnel puisque dépendant de l'orientation des axes de coordonnées. Ces erreurs M_x et M_y définissent un rectangle circonscrit à l'ellipse cherchée; cette dernière appartient au faisceau tangentiel de coniques inscrites au rectangle et son centre coïncide avec celui du rectangle.

Le cercle circonscrit au rectangle jouit d'une propriété connue: c'est le *lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'ellipse.* La démonstration géométrique est immédiate: les tangentes à l'ellipse, issues d'un point du cercle, appartiennent à l'*involution* de rayons définie par les couples de rayons joignant le point du cercle aux sommets opposés du rectangle (Théorème de Sturm); ces deux couples étant à angle droit il en est de même des autres. Il y a donc une infinité de rectangles circonscrits à l'ellipse et inscrits à ce cercle dit *cercle orthoptique*; la surface des rectangles diminue avec l'angle des diagonales et devient minimum pour le rectangle des axes. En résumé l'*erreur moyenne en un point M est égale au rayon du cercle orthoptique de l'ellipse d'erreur*; *cette erreur M est la résultante des deux erreurs M_x et M_y quelle que soit la direction des axes de coordonnées.*

Analytiquement on trouve:

$$M^2 = M_x^2 + M_y^2 = \frac{[aa] + [bb]}{D} m^2$$

valeur indépendante de la direction des axes de coordonnées d'après ce qui précède; en particulier on aura:

$$M^2 = M^2_{\max} + M^2_{\min} =$$

$$= \frac{[aa] + [bb] + W}{2\,D} m^2 + \frac{[aa] + [bb] - W}{2\,D} \cdot m^2$$

ou
$$W = \sqrt{([aa] - [bb])^2 + 4\,[ab]^2}$$

Au point de vue de la précision les éléments intéressants du problème sont M, $M_{\max}$ et $M_{\min}$ (rayon du cercle orthoptique et demi-axes de l'ellipse); l'orientation des axes de l'ellipse présente moins d'importance.

De ces formules on déduit:

$$M_x \cdot M_y = \frac{\sqrt{[aa]\,[bb]}}{D} m^2 \qquad M_{\min} \times M_{\max} = \frac{m^2}{\sqrt{D}}$$

$$\frac{M_x \cdot M_y}{M_{\min}\, M_{\max}} = \sqrt{\frac{[aa]\,[bb]}{D}}$$

Le calcul graphique des éléments de l'ellipse est donc immédiat:

l'erreur M est l'hypothénuse du triangle rectangle dont M_x et M_y sont les cathètes; sur cette hypothénuse on construira un second triangle rectangle de cathètes M_{min} et M_{max}. Un exemple concret fera comprendre le calcul: soient:

$$[aa] = 2.52 \qquad [bb] = 4.16 \qquad [ab] = 2.26$$

$$m = \pm 1'', 74 \qquad D = 5.39$$

$$M_x = 1.53 \qquad M_y = 1.19 \qquad M = 1.94$$

$$1.53 \times 1.19 = 1.94 \times 0.939$$

0.939 est la hauteur du premier triangle

$$\frac{M_x \cdot M_y}{M_{\text{min}} \cdot M_{\text{max}}} = \frac{\text{surface } 1^{\text{er}} \text{ triangle rectangle}}{\text{surface } 2^{\text{e}} \text{ triangle rectangle}} = \frac{0.939}{h} =$$

$$= \sqrt{\frac{2{,}52 \times 4.16}{5.39}} = 1.39$$

$$h = \frac{0.939}{1.39} = 0.676$$

M_{min} et M_{max} sont les cathètes du triangle d'hypothénuse M et de hauteur $0.676 = h$.

Le calcul graphique fournit de suite:

$$M_{\text{min}} = 0.73 \qquad M_{\text{max}} = 1.80$$

On évite les grandeurs auxiliaires préconisées par divers auteurs. Le calcul serait encore plus simple par la formule:

$$M_{\text{min}} \times M_{\text{max}} = \frac{m^2}{\sqrt{D}} = \frac{\overline{1{,}74}^2}{\sqrt{5.39}} = 1.31 = 1.94 \times h$$

La construction d'un triangle rectangle en fonction de l'hypothénuse et de la hauteur h est trop simple et rends superflus d'autres développements.

Reste la question de l'orientation de l'ellipse qui dépend de la formule:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\,[ab]}{[aa] - [bb]}$$

ou sous la forme logarithmique

$$\lg \operatorname{tg} 2\alpha = \lg \frac{2\,[ab]}{[aa]} - \lg \left(1 - \frac{[bb]}{[aa]}\right)$$

Tous les nomogrammes construits sont basés sur cette formule; il n'y a pas lieu de s'y arrêter car c'est surtout la forme et la grandeur de l'ellipse qui intéressent le calculateur plus que l'orientation; ce dernier élément est comme on le voit aisé à obtenir.

Le but de cette note était surtout de faire ressortir le rôle du cercle orthoptique de l'ellipse d'erreur; il n'est pas nécessaire de faire intervenir la podaire (Pedale) de l'ellipse comme le font certains auteurs, car pratiquement ce sont les valeurs limites Mmin et Mmax qui présentent de l'intérêt. Or ces valeurs correspondent précisément aux points de contact de l'ellipse avec la podaire. Le rôle de la podaire est donc plus didactique que pratique.

Calcul des paramètres dans le cas où on compense simultanément un groupe de points.

Supposons qu'il s'agisse de deux points dont nous voulons déterminer les ellipses d'erreur; ici encore on peut faire intervenir les coefficients de poids Q_{11} Q_{12} Q_{13} .... Q_{34} Q_{44}; mais sur ces 10 coefficients quatre sont inutiles et sont à calculer tout de même[1] (Q_{13} Q_{14} Q_{23} Q_{24}).

On appliquera donc avec avantage l'algorithme de Gauss pour éliminer les coordonnées du premier point; on est ramenée au cas d'un seul point mais les paramètres sont:

$$[cc \cdot 2], \quad [cd \cdot 2] \quad \text{et} \quad [dd \cdot 2]$$

éléments fournis par les formulaires. Par une simple permutation des lettres on calcule ensuite les paramètres pour le premier point. La construction des ellipses s'effectue comme précédemment; un canevas rationnel doit donner des cercles orthoptiques peu différents l'un de l'autre lorsqu'il y a de l'homogénéité dans les mesures.

Il resterait à étendre à l'espace cette notion d'ellipse d'erreur; on verrait alors le rôle que joue la *sphère orthoptique* dans l'étude de l'ellipsoïde d'erreur. Nous nous reservons d'y revenir.

Schweizerischer Geometerverein.

Protokoll

der XXII. ordentlichen Delegiertenversammlung vom 9. Mai 1936 in *Bern*

Statutengemäß übernimmt Zentralpräsident Bertschmann den Vorsitz und eröffnet die Versammlung um 10.15 Uhr.

Anwesend sind:

Vertretung des Zentralvorstandes:	Bertschmann, Kübler, Dändliker
Prof. Dr. Bäschlin:	Redaktor der Zeitschrift
Sekt. Aargau-Basel-Solothurn:	Hartmann
Bern:	Bangerter, Vogel, von Auw
Freiburg:	Genoud
Genf:	Panchaud
Graubünden:	Enderlin
Ostschweiz:	Gsell, Kundert
Tessin:	Maderni
Waadt:	Etter, Pouly
Wallis:	Carrupt
Waldstätte-Zug:	Urheim

---

[1] On peut éventuellement se passer des équations aux poids mais sans diminuer beaucoup le travail de calcul.