

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik =
Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 32 (1934)

Heft: 11

Artikel: Herleitung der Flächenformel für den sphärischen Exzess mittels der
Differentialgeometrie

Autor: Leemann, W.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-194700>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Herleitung der Flächenformel für den sphärischen Exzeß mittels der Differentialgeometrie.

Von W. Leemann, Kantonsgeometer, Zürich.

In den Lehrbüchern wird die Formel für den sphärischen Exzeß

$$\epsilon'' = \frac{F}{R^2} \rho''$$

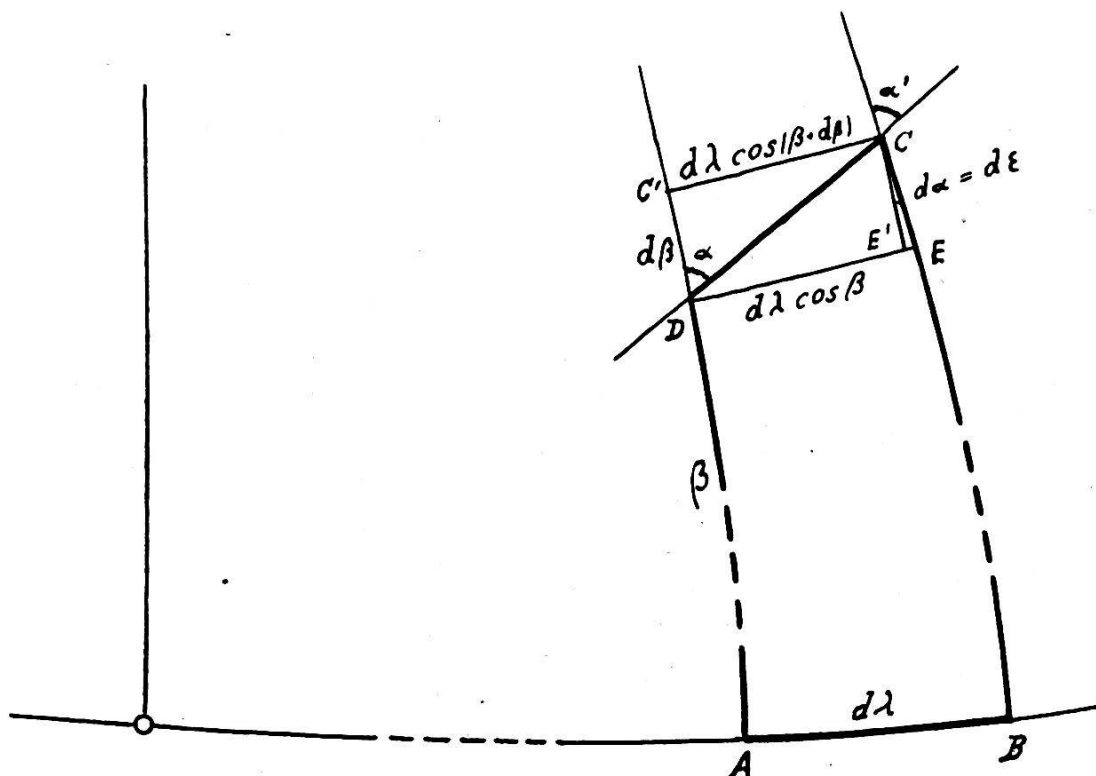
oder für die Einheitskugel ($R = 1$)

$$\text{arc } \epsilon = F$$

regelmäßig mit Hilfe des Kugelzweieckes hergeleitet. Im Nachfolgenden soll gezeigt werden, wie man diese Formel auch mittels der Differentialgeometrie findet.

In untenstehender Figur stellt das durch Großkreise begrenzte Flächenstück $A B C D$ ein Differenzial-Kugeltrapez von der Länge $d\lambda$ und der Breite β dar. Sein Flächeninhalt wird mit dF und sein sphärischer Exzeß mit $d\epsilon$ bezeichnet. Der Kugelradius wird $= 1$ gesetzt.

Die Winkel bei A und B sind rechte. Die Kreisbogen $C'C$ und $D'E$ gehören Parallelkreisen an und sind demnach parallel zu $A B$. Der Hilfskreisbogen $C'E'$ ist parallel zu $C'D A$.



Der Flächeninhalt dF des Differenzial-Kugeltrapezes $A B C D$ wird auf folgende einfache Weise erhalten:

Der Inhalt der Differenzialfläche 2. Ordnung $D E C C'$ ist:

$$d\beta \, d\lambda \cos \beta$$

Wird hier $d\lambda$ als konstant angesehen, so erhält man durch Integrierung die Inhaltsformel des Differenzialtrapezes $A B C D$. Es ist:

$$\underline{dF} = d\lambda \int_0^\beta d\beta \cos \beta = \underline{d\lambda \sin \beta.}^* \quad (1)$$

Es ist gestattet, bei der Integrierung in dieser Weise vorzugehen, weil das Differenzialtrapez längs dem Großkreisbogen $A D$ (oder $B C$) flächentreu abgewickelt, bzw. in die Ebene ausgebreitet werden kann.

Der *sphärische Exzeß* $d\epsilon$ des Differenzial-Kugeltrapezes ist nach Figur:

$$\begin{aligned} d\epsilon &= 90^\circ + 90^\circ + (180 - \alpha) + \alpha' - 360^\circ \\ &= \alpha' - \alpha = d\alpha. \end{aligned}$$

Es ist nun ferner:

$$\begin{aligned} E' - E &= d\lambda \cos \beta - d\lambda \cos (\beta + d\beta) \\ &= d\lambda [\cos \beta - \cos (\beta + d\beta)] \\ &= -d\lambda d\cos \beta. \end{aligned}$$

In dem als eben zu betrachtenden Dreieck $C E' E$ ist der Winkel bei E ein rechter. Die Kathete $E' - E$ ist, wie sofort einzusehen ist, eine unendlich kleine Strecke 2. Ordnung, die Kathete $C - E$ eine solche 1. Ordnung. Es darf daher an Stelle von $E' - E$ der Bogen mit dem Radius $C - E$ eingeführt werden. Darnach ist im Dreieck $C E' E$ zu setzen:

$$\begin{aligned} d\epsilon &= + \rho \frac{d\lambda d\cos \beta}{d\beta} = - \rho d\lambda \sin \beta \\ \text{oder } \underline{d \text{ arc } \epsilon} &= \underline{d\lambda \sin \beta.}^{**} \end{aligned} \quad (2)$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) ergibt sich nun unmittelbar

$$\underline{d \text{ arc } \epsilon} = \underline{dF.}$$

In Worten ausgedrückt heißt das: *Im Differenzial-Kugeltrapez ist der arcus des sphärischen Exzesses gleich dem Flächeninhalt.*

* Nebenbei sei darauf hingewiesen, daß für $\beta = 90^\circ$ diese Formel durch Einführung von R und integrieren zwischen den Grenzen $\lambda = 0$ und $\lambda = 2\pi R$ in den Ausdruck für die halbe Kugeloberfläche übergeht. Denn es ist:

$$\int_0^{2\pi R} d\lambda R \sin 90^\circ = 2\pi R^2.$$

Analog wird die Flächenformel für die Kugelzone erhalten.

** Diese Formel ist auch auf pag. 361 des dritten Bandes von Jordan-Eggert, Handbuch der Vermessungskunde, Jahrgang 1923, jedoch auf etwas andere Weise abgeleitet.

Da dieser Satz für das Differenzial-Kugeltrapez gilt, so hat er ohne weiteres auch Gültigkeit für das endliche Kugeltrapez. Indem ferner jede durch n Großkreise begrenzte Kugelfläche die Summe von n entsprechenden Kugeltrapezen darstellt, gilt allgemein:

$$\underline{\text{arc } \epsilon = F.}$$

Zürich, im August 1934.

Eingabe der Schweiz. Gesellschaft für Kulturtechnik und des Schweiz. Geometervereins an den schweiz. Bundesrat zur Empfehlung der Meliorationen als Mittel zur Krisenbekämpfung.

Schweiz. Gesellschaft für Kulturtechnik
Schweizerischer Geometerverein

Neuenburg, Zürich, den 3. Juli 1934.

An den h. Bundesrat der Schweizer. Eidgenossenschaft
BERN

Hochgeehrter Herr Bundespräsident!

Hochgeehrte Herren Bundesräte!

In der Hoffnung, an der Krisenbekämpfung und Arbeitsbeschaffung mithelfen zu können, gestatten sich die Vorstände der Schweiz. Gesellschaft für Kulturtechnik und des Schweiz. Geometervereins Ihnen, hochgeehrte Herren Bundesräte, einige Vorschläge mit bezug auf die Meliorationen zur wohlwollenden Prüfung zu unterbreiten.

1. Daß die Meliorationen sich ganz vorzüglich für die Arbeitsbeschaffung in Krisenzeiten eignen, wird wohl von keiner Seite bestritten. In der Tat besteht der größte Teil der Meliorationskosten aus Arbeitslöhnen. Nur ein verhältnismäßig kleiner Teil der Kosten betrifft die Beschaffung von Baumaterialien, wie Kies, Steine, Röhren usw., und auch diese werden wiederum mit Hilfe inländischer Arbeitskräfte gewonnen oder hergestellt. Zudem sind die Meliorationen, insbesondere die Weganlagen, Arbeiten einfacher Natur, bei denen jeder gesunde Arbeiter ohne besondere Berufskennntnis beschäftigt werden kann. Die Arbeitsplätze sind außerdem ziemlich dezentralisiert gelegen, so daß keine großen örtlichen Verschiebungen der Arbeitskräfte nötig sind. Im Gegensatz zu den Arbeiten im Hochbaugewerbe sind die Meliorationen teilweise auch im Winter ausführbar. Die Herren Nationalräte Grimm und Rothpletz anerkennen daher richtigerweise in ihrer Expertise, daß die Meliorationen geeignet sind, technisch zweckmäßige und auf längere Dauer berechnete Arbeitsgelegenheit zu schaffen. Mit Recht geben sie auch den Güterzusammenlegungen den Vorzug unter den Notstandsarbeiten landwirtschaftlicher Natur.

Wenn dagegen die Herren Experten Grimm und Rothpletz (S. 89) mit Nachdruck bestreiten, daß der Krise durch Erschließung von Neu-