Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 32 (1934)

Heft: 4

Artikel: Ueber die Berechnung der Flächenverzerrung der winkeltreuen, schiefachsigen Zylinderprojektion aus den Projektionskoordinaten

Autor: Leemann, W.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-194679

Ueber die Berechnung der Flächenverzerrung der winkeltreuen, schiefachsigen Zylinderprojektion aus den Projektionskoordinaten.

Von *W. Leemann*, Kantonsgeometer, Zürich.

Diese Projektion findet bekanntlich bei der schweizerischen Landesvermessung in der Weise Anwendung, daß die Uebertragung vom Sphäroid auf die Ebene in zwei Stufen erfolgt: zunächst vom Sphäroid auf die Kugel und hernach von der Kugel auf die Ebene. Die erste Uebertragung hat im Vergleich zur zweiten so unbedeutende Verzerrungen zur Folge, daß jene bei den nachstehenden Betrachtungen außer acht gelassen werden soll.

Das in der Figur 1 dargestellte, von Großkreisen begrenzte, sphärische Flächenstück, weiterhin einfach Kugeltrapez genannt, wird in der Ebene in der in Figur 2 angedeuteten Form, wobei die Linie P'_1 — P'_2 schwach gekrümmt ist, abgebildet.

Fig. 1.

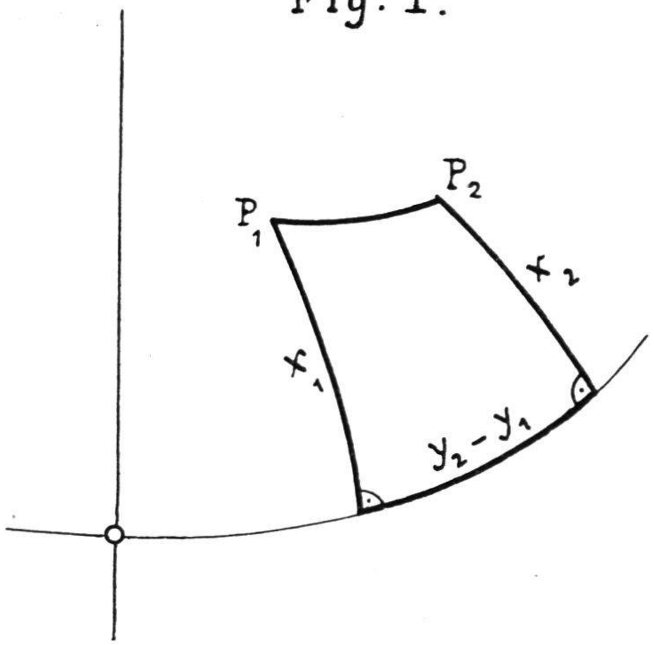
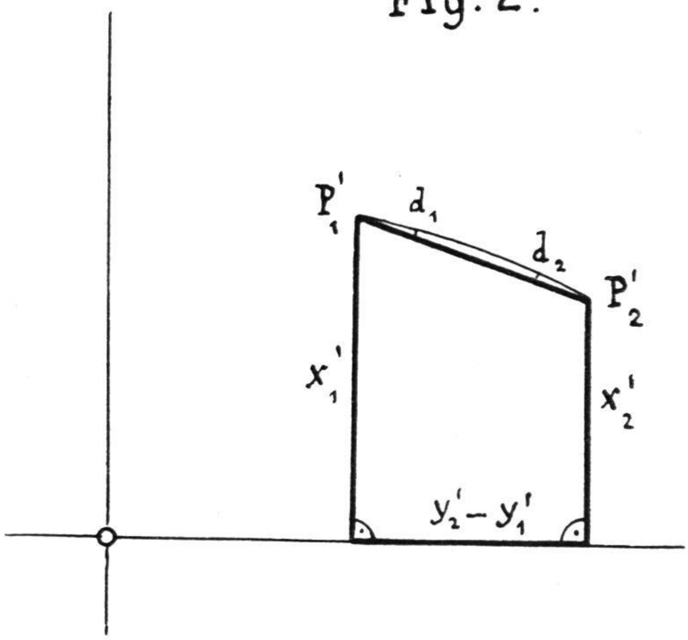


Fig. 2.



Um bei den Berechnungen die Regeln der ebenen Trigonometrie anwenden zu können, wird an die Stelle des Bogens die Sehne P'_1 — P'_2 gesetzt und es müssen zu diesem Zwecke die Winkel bei P'_1 und P'_2 um die kleinen Beträge d_1 und d_2 reduziert werden.

Für die Berechnung der Reduktionen[1] d_1 und d_2 dienen, wie bekannt, folgende Formeln, in welchen die Glieder sechster und höherer Ordnung ihres geringen Einflusses wegen fortgelassen sind:

---

[1] Diese Reduktionen werden gewöhnlich Azimutreduktionen genannt, und zwar ist $-d_1$ die Azimutreduktion im Punkte P'_1, $+d_2$ diejenige im Punkte P'_2. Für die Reduktion der Trapezwinkel in P'_1 und P'_2 sind aber d_1 und d_2 mit gleichem Zeichen zu nehmen.

$$d_1 = \frac{\rho}{4 R^2} (y'_2 - y'_1)(x'_1 + x'_2) - \frac{\rho}{12 R^2} (y'_2 - y'_1)(x'_2 - x'_1)$$
$$- \frac{\rho}{48 R^4} (y'_2 - y'_1)(x'_1 + x'_2)^3 + \frac{\rho}{48 R^4} (y'_2 - y'_1)^3 (x'_1 + x'_2)$$
$$- \frac{\rho}{720 R^4} (y'_2 - y'_1)^3 (x'_2 - x'_1) + \frac{\rho}{720 R^4} (y'_2 - y'_1)(x'_2 - x'_1)^3 \ldots.$$

$$d_2 = \frac{\rho}{4 R^2} (y'_2 - y'_1)(x'_1 + x'_2) + \frac{\rho}{12 R^2} (y'_2 - y'_1)(x'_2 - x'_1)$$
$$- \frac{\rho}{48 R^4} (y'_2 - y'_1)(x'_1 + x'_2)^3 + \frac{\rho}{48 R^4} (y'_2 - y'_1)^3 (x'_1 + x'_2)$$
$$+ \frac{\rho}{720 R^4} (y'_2 - y'_1)^3 (x'_2 - x'_1) - \frac{\rho}{720 R^4} (y'_2 - y'_1)(x'_2 - x'_1)^3 \ldots.$$

Da die Abbildung winkeltreu ist, sind die Winkelsummen im Kugeltrapez und in dessen Abbildung gleich groß. Die beiden Winkel d_1 und d_2 geben daher, wie ohne weiteres ersichtlich ist, in ihrer Summe den Winkelüberschuß über 4 Rechte, d. h. den sphärischen Exzeß ϵ des Kugeltrapezes.

Addiert man die beiden Gleichungen für d_1 und d_2, so fallen je das zweite, fünfte und sechste Glied heraus und es ergibt sich, wenn die Glieder mit gleichem Nenner zusammengezogen werden und man $\frac{\rho}{R^2}$ ausklammert:

$$d_1 + d_2 = \epsilon = \frac{\rho}{R^2} \left[\frac{(y'_2 - y'_1)(x'_1 + x'_2)}{2} - \frac{(y'_2 - y'_1)(x'_1 + x'_2)^3 - (y'_2 - y'_1)^3 (x'_1 + x'_2)}{24 R^2} \ldots. \right]$$

Diese Formel ist, abgesehen von Gliedern höherer Ordnung, in aller Strenge richtig. Vergleicht man sie mit der Flächenformel für den sphärischen Exzeß $\epsilon = \frac{\rho}{R^2} \cdot F$, so erkennt man, daß die Glieder in der eckigen Klammer in ihrer Summe den Flächeninhalt des Kugeltrapezes darstellen. Das erste Glied des Klammerausdruckes ist aber nichts anderes als der Flächeninhalt des ebenen Trapezes, so daß *das zweite Glied die Flächenverzerrung dieses Trapezes* bedeutet. Es lautet somit die Formel für die Trapez-Flächenverzerrung[2]:

Trapez-Flächenverzerrung

$$= \frac{(y'_2 - y'_1)(x'_1 + x'_2)^3 - (y'_2 - y'_1)^3 (x_1 + x_2)}{24 R^2} \ldots.$$

Handelt es sich um die *Flächenverzerrung eines geschlossenen Polygons,* so ist leicht zu erkennen, daß zu ihrer Berechnung einfach die Summe der Verzerrungen aller zwischen den Ordinaten der Eckpunkte

[2] Das Vorzeichen der Verzerrung ist hier und bei den folgenden Formeln positiv genommen. Diese geben daher den Unterschied: projizierte Fläche *minus* sphärische Fläche.

liegenden Trapeze zu bilden ist. Für die Berechnung der *Flächenverzerrung eines von n Seiten eingeschlossenen Polygons* ergibt sich daher die Formel:

Polygon-Flächenverzerrung

$$= \frac{\sum\left[(y'_{n+1} - y'_n)\,(x'_n + x'_{n+1})^3 - (y'_{n+1} - y'_n)^3\,(x'_n + x'_{n+1})\right]}{24\,R^2} \ldots$$

Es erscheint nicht überflüssig hervorzuheben, daß diese Formel die Verzerrung des *geradlinigen* Polygons gibt und nicht etwa des krummlinig abgebildeten. Der Unterschied beider Verzerrungen ist natürlich um so kleiner, je kleiner die Ordinatendifferenzen sind.

Als praktisches Beispiel ist die Verzerrung des Kantons Tessin berechnet worden. Zu diesem Zwecke wurde längs der Grenze ein geschlossenes, annähernd flächengleiches Polygon von 13 Seiten gelegt. Als Ergebnis fand sich die Verzerrung zu 0.40 km^2. Es stimmt dies vollkommen überein mit der Angabe, die Ingenieur *B. Cueni* in der „Schweiz. Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik", Jahrgang 1932, pag. 35—37, gemacht und auf anderem Wege berechnet hat. Obwohl beim Tessiner-Polygon Ordinatendifferenzen bis zu 44 km vorkommen, beträgt der Einfluß des zweiten Gliedes der Formel nur 0.005 km^2. Würde man daher das zweite Glied vernachlässigt haben, so wäre das für das Endergebnis sozusagen ohne Bedeutung gewesen.

Es ist leicht zu zeigen, daß die Verzerrungsformel für das Trapez bei dem Sonderfall von gleichen Abszissen und bei Vernachlässigung des zweiten Gliedes im Zähler übergeht in die im Handbuch für Vermessungskunde von *Jordan-Eggert* für die Gaußsche Abbildung entwickelte Formel (6), wobei nur entsprechend der Lage des Gaußschen Zylinders x und y zu vertauschen sind. (Vergl. Band III, Jahrgang 1923, pag. 303.)

Soll die *Verzerrung eines Kartenblattes* oder irgendeines ausgedehnten Rechteckes, das zwischen den Ordinaten y_a und y_b und den Abszissen x_a und x_b, also parallel zu den Koordinatenachsen, liegt, bestimmt werden, so ist in der Formel für die Flächenverzerrung des Polygons zu setzen:
$y_1 = y_4 = y_a$, $y_2 = y_3 = y_b$, $x_1 = x_2 = x_a$, $x_3 = x_4 = x_b$ und die Formel lautet, bei Vernachlässigung des zweiten Gliedes im Zähler

$$\textbf{Rechteck-Flächenverzerrung} = \frac{(y_b - y_a)\,(x^3_b - x^3_a)}{3\,R^2}.$$

In der „Deutschen Zeitschrift für Vermessungswesen", Jahrgang 1896, pag. 212, Formel (21), hat *Schulze* auf dem Wege der Integration ebenfalls eine Verzerrungsformel für das Rechteck, dort „Gesamtvergrößerung" genannt, abgeleitet. Dabei ist aber ein grober Irrtum unterlaufen, so daß vor der Benützung jener Formel gewarnt werden muß. (Auch hier ist übrigens x mit y zu vertauschen.)

Weitbrecht entwickelt in seinem Lehrbuch für Vermessungskunde, 1. Teil, pag. 431, ebenfalls eine Verzerrungsformel für das Rechteck, welche aber für die *Soldner*sche *Projektion* gilt. Bekanntlich ist hier die Flächenverzerrung in erster Näherung halb so groß, wie bei der Gaußschen Projektion, und die Weitbrechtsche Formel hat daher den Nenner 6 R^2 (statt 3 R^2 in der oben abgeleiteten Formel). x und y sind bei Vergleichen wiederum zu vertauschen.

Geht man in der Spezialisierung der entwickelten Formeln weiter, indem man das Rechteck zu einem schmalen, parallel zur y-Achse verlaufenden Streifen werden läßt, so muß man schließlich zu der von *B. Cueni* angewendeten *Streifenformel* gelangen. Diese Umformung sei dem Leser überlassen.

Zürich, im Januar 1934.

Société suisse des Géomètres.

Rapport du Comité central sur l'activité de la Société pendant l'année 1933.

1. Généralités.

La mauvaise situation économique générale se fait sentir aussi sur notre profession. Reconnaissons toutefois que, si jusqu'à maintenant, nous n'avons pas trop souffert de la crise, c'est grâce à Monsieur le Conseiller fédéral Häberlin et au directeur des mensurations cadastrales, Mr. Baltensperger, qui ont agi énergiquement pour le maintien des crédits nécessaires à l'exécution des mensurations cadastrales. Néanmoins nous devons constater que les mesures prises par les autorités tant fédérales que cantonales et communales, en vue du rétablissement de l'équilibre financier, ont provoqué également une baisse des prix des contrats relatifs aux mensurations cadastrales; d'autre part les traitements des géomètres fonctionnaires ont été réduits et la subvention accordée à notre journal a également subi une diminution.

La nouvelle organisation des études pour géomètres a été approuvée par les autorités que cela concerne. La solution admise dernièrement ne tient pas compte de tous les vœux émis par notre société, mais constitue toutefois un notable progrès, et l'on peut dire avec certitude que la réorganisation des écoles pour géomètres à Zurich et Lausanne sera très profitable à notre corporation.

La question de la formation du personnel auxiliaire continue à progresser. Après l'élaboration des prescriptions fédérales du 3 mars 1933 qui prévoient une sélection des différents travaux de mensuration cadastrale et qui disent par qui ces travaux doivent être exécutés, il était plus facile d'établir un programme d'études qui a d'ailleurs été admis par l'association suisse des techniciens-géomètres. Ce programme qui correspond aux grandes lignes admises par l'assemblée générale de St-Gall, a également trouvé l'approbation de l'office fédéral du travail. Il est probable que les quelques règlements d'exécution encore nécessaires seront établis définitivement au cours de l'année 1934.

Le département militaire fédéral a réuni une commission d'études composée de représentants de l'armée et d'associations scientifiques et de tourisme, pour discuter de la question des nouvelles cartes de la Suisse. La commission dite des cartes nommée dans le sein même de notre société, s'est également occupée de cette importante affaire; elle a été en relation à ce sujet avec d'autres sociétés scientifiques et