**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

**Herausgeber:** Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

**Band:** 30 (1932)

**Heft:** 12

**Artikel:** Ableitung einer Formel für den Richtungs- und Höhenwinkelfehler eines Theodoliten unter gleichzeitiger strenger Berücksichtigung von Kollimationsfehler und Horizontalachsenschiefe

**Autor:** Baeschlin, C.F.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-193397

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 09.08.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

Der heutige Vortrag konnte natürlich wegen der kurzen, zur Verfügung stehenden Zeit nicht den Anspruch erheben, eine vollständige Orientierung über die Probleme der Wasserversorgung zu geben. Es war vielmehr nur beabsichtigt, einige Grundsätze, sowie eine Anzahl Neuerungen auf diesem Gebiete der Ingenieurtätigkeit kurz zu berühren.

Der Sprechende hat sich mit mehreren Herren, Verwaltungen und Firmen, die die Wasserversorgung als Spezialität ausüben, in Verbindung gesetzt.

Es sei hier den betreffenden Herren, vor allem dem Wasserwerk der Stadt Basel, der Wasserversorgung der Stadt Zürich, Herrn Direktor Peter in Zürich, Herrn Dr. G. Thiem in Leipzig, der Firma Gebrüder Sulzer A.-G. in Winterthur, der Tiefbohr- und Baugesellschaft A.-G. in Zürich, der A.-G. Guggenbühl in Zürich und der Hydrotechnik A.-G. in Zürich für die Ueberlassung von Unterlagen und für ihre Auskünfte über die Betriebserfahrungen der herzlichste Dank ausgesprochen.

---

# Ableitung einer Formel für den Richtungs- und Höhenwinkelfehler eines Theodoliten unter gleichzeitiger strenger Berücksichtigung von Kollimationsfehler und Horizontalachsenschiefe.

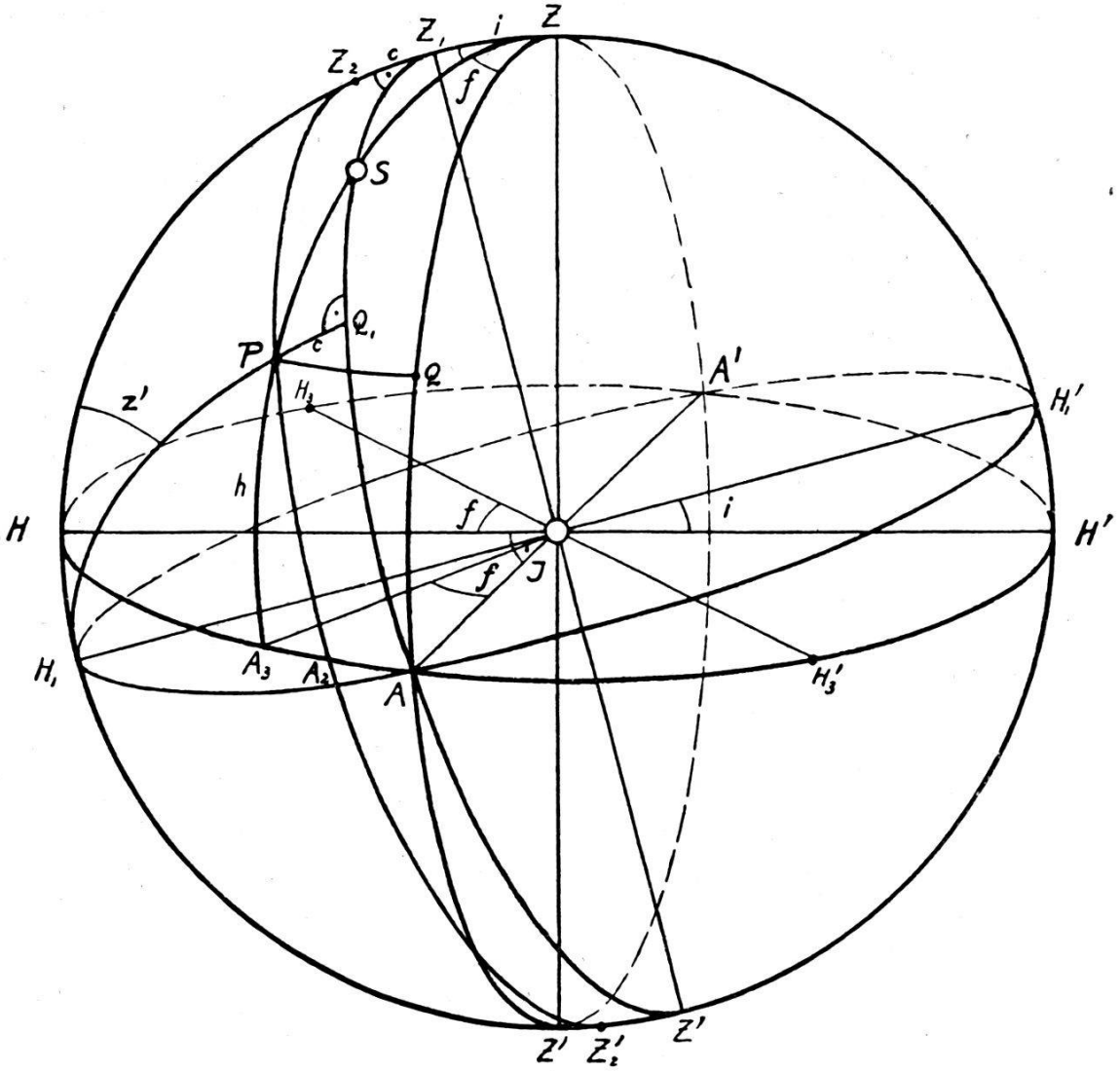
Von *C. F. Baeschlin.*

Unter Voraussetzung des Superpositionsgesetzes kleiner Fehler wird allgemein eine getrennte Ableitung des Einflusses von Kollimation und Horizontalachsenschiefe auf die Richtungsmessung durchgeführt, indem man zuerst annimmt, daß nur der Kollimationsfehler vorhanden sei und dann, daß nur die Horizontalachsenschiefe allein bestehe. Die Wirkung auf die Richtungsmessung, wenn beide Fehler gleichzeitig existieren, wird dann gleich der Summe der abgeleiteten Teilfehler gesetzt. Es ist von vornherein zu vermuten, daß dies für beliebig große Fehler nicht mehr zutreffe.

Aus didaktischen Gründen, zur Demonstration des Superpositionsgesetzes, nicht weil ich irgendein praktisches Resultat von dieser Untersuchung erwartet habe, leitete ich eine strenge Formel für beliebige Werte der beiden Fehler ab, die ich hier, da sie vielleicht den einen oder andern der Leser interessiert, veröffentliche; *ein* praktisches Ergebnis, das aus den gewöhnlich abgeleiteten Näherungsformeln nicht zu erkennen ist, hat die Untersuchung immerhin, nämlich das, daß die Elimination des Einflusses von Kollimationsfehler und Horizontalachsenschiefe bei der Messung in beiden Fernrohrlagen eine vollkommene ist, wie groß auch die Fehler sein mögen.

Wir denken uns um den Schnittpunkt $J$ von Ziellinie und Horizontalachse eine Kugel vom Radius Eins geschlagen und schneiden alle uns interessierenden Geraden und Ebenen mit dieser Kugel, um die Lösung des Problemes auf die sphärische Trigonometrie zurückführen zu können.

Die um den Winkel $i$ (Horizontalachsenschiefe) geneigte Horizontalachse $H_1H'_1$ denken wir uns in die Tafelebene gedreht. Wenn die Ziellinie normal zur Horizontalachse stünde, so würde sie beim Kippen




eine um $i$ gegen die Vertikale geneigte Ebene beschreiben, die aus unserer Kugel den Großkreis $AZ_1A'$ herausschneidet. Stellt $Z$ den Schnitt der Lotlinie durch $J$ mit der Kugel dar (Zenit), so ist der Großkreisbogen $Z_1Z$ gleich $i$. Dieser Großkreis schneidet den in der Tafelebene liegenden Großkreis $H_1HZH'_1H'$ in $Z_1$ rechtwinklig.

Wenn dagegen die Ziellinie um einen Winkel $c$ von der Normalebene zur Horizontalachse $H_1H'_1$ abweicht, wobei $c$ als der Kollimationsfehler der Ziellinie bezeichnet wird, so beschreibt diese Ziellinie beim Kippen einen Rotationskegel mit dem halben Oeffnungswinkel $100^g - c$, wobei die Horizontalachse Kegelachse ist. Dieser Rotationskegel schneidet aus unserer Kugel einen Parallelkreis zum Großkreis $AZ_1A'$ heraus.

Auf diesem Parallelkreis, als der Spur der Ziellinie auf unserer Kugel, wählen wir nun einen beliebigen Punkt $P$; er stellt den Schnitt des Visierstrahles $JP$ eines Raumpunktes mit der Kugel dar. Nur diejenigen Raumpunkte, deren Strahlenschnitt von $J$ aus mit der Kugel

auf den Parallelkreis $A_2Z_2$ fallen, können bei der angenommenen Lage der Horizontalachse mit unserm Theodolit angezielt werden.

$H_1$ ist der Pol des um $i$ gegen die Vertikale geneigten Großkreises $AZ_1A'$. Legen wir daher den Großkreis durch $H_1$ und $P$, so schneidet er den Großkreis $AZ_1$ in $Q_1$ rechtwinklig.

Stellen wir uns nun einen Theodolit ohne Horizontalachsenschiefe und Kollimationsfehler vor, dessen Horizontalachse ebenfalls in die Tafelebene falle; sie nimmt die horizontale Lage $HH'$ an. Die Ziellinie dieses Theodolits beschreibt eine Normalebene zu $HH'$, welche aus der Kugel den vertikalen Großkreis $AZA'$ herausschneidet. $AJ$ steht normal zu $JH$. Wenn wir daher mit diesem fehlerlosen Theodolit den Punkt $P$ anvisieren wollen, so müssen wir die vertikale Zielebene aus ihrer jetzigen Lage $ZA$ in die Stellung des vertikalen Großkreises durch $P$ bringen, also in die Lage des Großkreises $ZPA_3$. Dabei stellt der Großkreisbogen $ZP$ die Zenitdistanz $= 100^g - h$ der Zielrichtung $JP$ dar, wo $h$ der Höhenwinkel der Zielrichtung $JP$ ist. Wenn daher $Q$ den Schnitt des horizontalen Parallelkreises durch $P$ mit dem Großkreis $AZ$ darstellt, so repräsentiert $JQ$ die Lage der Ziellinie des fehlerlosen Theodolits, welche durch eine Drehung um die Stehachse $JZ$ in die Zielrichtung $JP$ gebracht werden kann. Nach dieser Drehung nimmt die Horizontalachse die neue Lage $H_3H'_3$ an. Der Winkel $f$, den $H_3H'_3$ mit $HH'$ bildet und der auch an $Z$ zwischen den Großkreisen $ZQA$ und $ZPA_3$ auftritt, stellt den Fehler dar, welcher für die angenommene Zielneigung $h$ von $JP$ durch die Fehler $c$ und $i$ erzeugt wird, und zwar im Sinne einer Verbesserung der mit dem fehlerhaften Theodolit erhaltenen Kreisablesung auf diejenige Ablesung, welche bei der Anzielung des Punktes $P$ mit dem fehlerlosen Theodolit entsteht.

Bezeichnen wir den Schnittpunkt der Großkreise $ZP$ und $Z_1A$ mit $S$, so erkennen wir die zwei rechtwinkligen sphärischen Dreiecke

$\Delta ZZ_1S$, rechter Winkel bei $Z_1$ und
$\Delta PQ_1S$, rechter Winkel bei $Q_1$.

Der Winkel bei $S$ ist in beiden Dreiecken derselbe; wir bezeichnen ihn in der Folge mit $S$.

Für die Seiten und Winkel dieser beiden Dreiecke finden wir folgende Bedeutung:

$\Delta ZZ_1S$ Seite $Z_1Z = i$
Winkel $SZZ_1 = 100^g - f$

$\Delta PQ_1S$ Seite $PQ_1 = c$
Seite $PS = 100^g - (h + SZ)$, da $PZ = 100^g - h$

Aus diesen beiden rechtwinkligen Dreiecken finden wir mit Hilfe der Napier'schen Regeln folgende Beziehungen:

Aus dem Dreieck $PQ_1S$:

$$\begin{aligned} \sin c &= \cos (h + ZS) \sin S \\ &= (\cos h \cos ZS - \sin h \sin ZS) \sin S \\ &= \cos h \cdot \cos ZS \cdot \sin S - \sin h \sin ZS \sin S \end{aligned}$$

Aus dem Dreieck $ZZ_1S$:

$$\sin ZS \cdot \sin S = \sin i \quad \text{und}$$
$$\cos S = \cos i \cdot \cos f$$
$$\operatorname{tg} f = \operatorname{tg} S \cdot \cos ZS$$

Also erhalten wir

$$\cos ZS \cdot \sin S = \operatorname{tg} f \cos S = \sin f \cos i$$

Damit wird

$$\sin c = \cos h \sin f \cos i - \sin h \sin i$$

woraus sich die Schlußformel ergibt:

$$\text{I.} \quad \sin f = \frac{\sin c}{\cos h \cdot \cos i} + \operatorname{tg} i \cdot \operatorname{tg} h = \frac{1}{\cos h \cos i} (\sin c + \sin h \sin i)$$

Aus einer Betrachtung der Figur erkennt man direkt, daß der Maximalwert des Höhenwinkels

$$h_m = 100^g - (i + c)$$

und daß für diesen Wert $f = 100^g$ wird.

Setzen wir $h_m$ in die Formel I ein, so erhalten wir

$$\sin f_{h_m} = \frac{\sin c + \cos (i + c) \sin i}{\sin (i + c) \cos i} =$$
$$= \frac{\sin c + \sin i \cdot \cos i \cos c - \sin^2 i \cdot \sin c}{\cos^2 i \cdot \sin c + \sin i \cos i \cos c} =$$
$$= \frac{\cos^2 i \cdot \sin c + \sin i \cdot \cos i \cdot \cos c}{\cos^2 i \cdot \sin c + \sin i \cdot \cos i \cdot \cos c} = 1 = \sin 100^g$$

Die direkte geometrische Erkenntnis wird also durch die Formel bestätigt.

Aus der Formel I erkennt man, daß wenn $i$ in $-i$, $c$ in $-c$ übergeführt wird, was durch das Durchschlagen des Fernrohres erreicht wird, $f$ bei der Belassung von $h$ denselben absoluten Wert, aber entgegengesetztes Vorzeichen erhält, woraus sich ergibt:

*Die Elimination des Einflusses von Kollimation und Horizontalachsenschiefe ist bei beliebig großen Werten derselben beim Anzielen eines Objektes in beiden Fernrohrlagen eine vollständige.*

Entwickeln wir die Formel I für $f$, $c$ und $i$ in Reihen, wobei wir die Entwicklung bis zur 3. Ordnung dieser kleinen Größen 1. Ordnung treiben, so erhalten wir:

$$f - \frac{f^3}{6} = \frac{c}{\cos h} + i \cdot \operatorname{tg} h - \frac{c^3}{6 \cos h} + \frac{c\, i^2}{2 \cos h} + \frac{\operatorname{tg} h}{6} \cdot i^3.$$

Die Verknüpfung infolge des gemeinsamen Auftretens von Kollimation und Horizontalachsenschiefe tritt also nur durch das Glied 3. Ordnung

$$\frac{c\, i^2}{2 \cos h}$$

auf, ist also eine ziemlich lose.

Wenn wir die Glieder 3. Ordnung vernachlässigen, so erhalten wir

$$\text{II.} \quad f = \frac{c}{\cos h} + i \cdot \operatorname{tg} h.$$

Macht man eine Ableitung für $f(c)$, wobei man $i = 0$ annimmt, so erhält man

$$\sin f(c) = \frac{\sin c}{\cos h}$$

Leitet man dagegen $f(i)$ ab, $c = 0$ annehmend, so folgt

$$\sin f(i) = \operatorname{tg} i \cdot \operatorname{tg} h.$$

Daraus findet man

$$\sin [f(c) + f(i)] = \sin f(c) \cdot \cos f(i) + \sin f(i) \cos f(c).$$

Setzt man

$$\cos f(i) = \cos f(c) = 1, \text{ so folgt}$$

III.
$$\sin [f(c) + f(i)] = \frac{\sin c}{\cos h} + \operatorname{tg} i \cdot \operatorname{tg} h.$$

Durch den Ansatz

$$\cos f(i) = \cos f(c) = \cos i = 1$$

werden Glieder 2. Ordnung vernachlässigt. Da aber alle so vernachlässigten Glieder mit Gliedern 1. Ordnung $\sin f$, $\sin c$ und $\operatorname{tg} i$ multipliziert sind, so gilt das Superpositionsgesetz bis und mit Gliedern 2. Ordnung, wie wir schon aus der Formel, die zu II geführt hat, erkannt haben.

Die Formel III ist nicht genauer als die einfachere Formel II. Dagegen haben die Einzelformeln

$$\sin f(c) = \frac{\sin c}{\cos h} \text{ und}$$

$$\sin f(i) = \operatorname{tg} i \cdot \operatorname{tg} h$$

vor den einfachern Formeln

$$f(c) = \frac{c}{\cos h} \qquad \text{und} \qquad f(i) = i \cdot \operatorname{tg} h$$

das voraus, daß man aus ihnen erkennt, daß $h$ maximal nur $100^g - c$ resp. $100^g - i$ werden kann, und daß dann

$$f(c) = 100^g \quad \text{resp.} \quad f(i) = 100^g \text{ wird.}$$

Im Anschluß an diese Untersuchung können wir auch den Fehler bestimmen, den Kollimationsfehler und Horizontalachsenschiefe auf die Messung des Höhenwinkels haben.

Es ist

$$ZP = 100^g - h$$

$Z_1 Q_1$ stellt die Drehung der Ziellinie um die Horizontalachse $H_1 H'_1$ aus der Vertikalebene $H_1 H Z_2 H'_1 H'$ dar.

(Schluß folgt.)

---

# L'orientation d'un stéréogramme en photogrammétrie.

Par *A. Ansermet.*

Le problème de l'orientation d'un stéréogramme que l'on pourrait aussi désigner sous le nom de problème fondamental de la Photogrammétrie a fait l'objet de recherches nombreuses.

Les diverses solutions présentées jusqu'ici ne se prêtent en général pas à un développement simple des équations de condition qui sont à la