Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 27 (1929)

Heft: 2

Artikel: Korrekte und strenge Behandlung des Problemes der Bestimmung der innern Orientierung eines Phototheodoliten

Autor: Baeschlin, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-191417

l'œuvre de l'amélioration du sol, mais les recherches relatives au degré d'efficacité des travaux et à l'expérimentation ont subi un certain retard. Il est désirable, dans l'intérêt de cette catégorie d'entreprises, que l'étude des conditions les plus favorables au moyen des méthodes récentes d'investigation soit poussée chaque fois que l'occasion se présente.

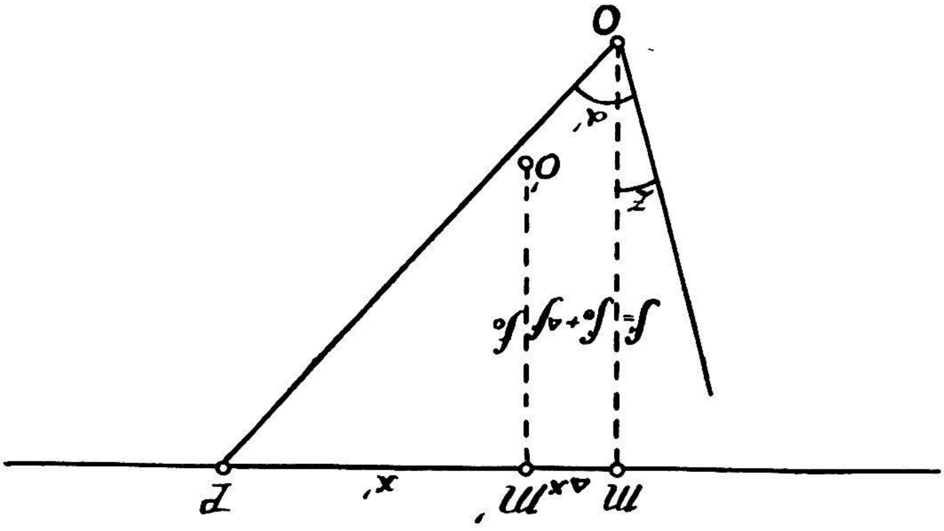
Nous voulons signaler l'aimable accueil qui nous a été réservé dans les conscriptions visitées et exprimer notre reconnaissance pour tout ce qui nous a été donné de voir et d'apprendre au cours des tournées effectuées.

Zurich, 3 octobre 1928. *Diserens.*

Korrekte und strenge Behandlung des Problemes der Bestimmung der innern Orientierung eines Phototheodoliten.

Von *F. Baeschlin*, Professor an der E. T. H., Zürich.

Zur Ermittlung der Bildweite f und der Lage des Plattenhauptpunktes eines Phototheodoliten sind Richtungen α' nach markanten Punkten gemessen worden; die Abszissen der entsprechenden Bildpunkte, ausgemessen von einer provisorischen Lage des Plattenhauptpunktes M' seien x'.



Sowohl die Richtungen α', wie die Abszissen x' sind, weil gemessen, fehlerhaft; ihre Verbesserungen seien resp. λ und v. Damit sich die Richtungen $\alpha' + \lambda$ auf die Linie $O\,M$ beziehen, sind sie um eine Orientierungsunbekannte ($-z$) zu korrigieren.

Wir erhalten dann für jede Beobachtungsgruppe die folgende Bedingungsgleichung:

$$(1) \qquad (f_0 + \Delta f)\ \mathrm{tg}\ (\alpha'_i - z + \lambda_i) = x'_i + \Delta x + v_i$$

Vor der weiteren Behandlung müssen diese Bedingungsgleichungen auf lineare Form gebracht werden, was wir durch Entwicklung der tg nach der Taylor'schen Reihe erreichen:

$$(2) \qquad (f_0 + \Delta f) \left[[\operatorname{tg} \alpha'_i + \frac{1}{\cos^2 \alpha'_i} \frac{\lambda_i - z}{\rho''} \right] = x'_i + \Delta x + v_i$$

Multiplizieren wir aus und lassen alle Glieder von höherer als der I. Ordnung weg, so erhalten wir:

$$f_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha'_i + \operatorname{tg} \alpha'_i \cdot \Delta f + \frac{f_0}{\rho'' \cos^2 \alpha'_i} \lambda_i - \frac{f_0}{\rho'' \cos^2 \alpha'_i} \cdot z$$
$$- x'_i - \Delta x - v_i = 0$$

oder

$$(3) \qquad (f_0 \operatorname{tg} \alpha'_i - x'_i) + \frac{f_0}{\rho'' \cos^2 \alpha'_i} \lambda_i - v_i + \operatorname{tg} \alpha'_i \cdot \Delta f$$
$$- \frac{f_0}{\rho'' \cos^2 \alpha'_i} z - \Delta x = 0.$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$(4) \qquad f_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha'_i - x'_i = w_i$$

Die Koeffizienten von λ_i, z und Δf in (3) können wir noch anders ausdrücken.

Da

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha'_i} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha'_i \text{ ist, und}$$

$$\operatorname{tg} \alpha'_i = \frac{x'_i}{f_0}$$

gesetzt werden darf, so folgt:

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha'_i} = 1 + \left(\frac{x'_i}{f_0}\right)^2 = \frac{f_0^2 + x'^2_i}{f_0^2}$$

Daher wird:

$$(5) \qquad \frac{f_0}{\rho'' \cos^2 \alpha'_i} = \frac{f_0^2 + x'^2_i}{\rho'' \cdot f_0} \text{ und } \operatorname{tg} \alpha'_i = \frac{x'_i}{f_0}$$

Damit erhalten wir die Bedingungsgleichung (3) in der Form:

$$(6) \quad w_i + \frac{f_0^2 + x'^2_i}{\rho'' \cdot f_0} \lambda_i - v_i + \frac{x'_i}{f_0} \Delta f - \frac{f_0^2 + x'^2_i}{\rho'' f_0} z - \Delta x = 0.$$

— Solcher Bedingungsgleichungen erhalten wir so viele, als wir Plattenpunkte gewählt haben, n.

Wenn die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate durchgeführt werden soll, so haben wir nach dem Verfahren vorzugehen, das Helmert in seiner Ausgleichungsrechnung auf den Seiten 285—293 behandelt.

Wir setzen

$$(7) \qquad \frac{f_0^2 + x'^2_i}{\rho'' \cdot f_0} = a_i$$

$$\frac{x'_i}{f_0} = b_i$$

und erhalten dann unsere Bedingungsgleichung in der Form

(8) $$a_i \lambda_i - v_i + b_i \Delta f - a_i z - \Delta x + w_i = 0.$$

Setzen wir die Gewichte der Winkelverbesserungen λ g, die Gewichte der Abszissenverbesserungen v G, so haben wir:

(9) $[g \lambda \lambda] + [G v v] =$ Minimum zu machen

unter Beachtung der Bedingungsgleichungen (8). Wir bilden daher die zusammengesetzte Funktion:

(10) $$\begin{aligned} A = {} & [g \lambda \lambda) + [G v v] \\ & - 2 k_1 (a_1 \lambda_1 - v_1 + b_1 \Delta f - a_1 z - \Delta x + w_1) \\ & - 2 k_2 (a_2 \lambda_2 - v_2 + b_2 \Delta f - a_2 z - \Delta x + w_2) \\ & \ldots\ldots \\ & \ldots\ldots \\ & - 2 k_n (a_n \lambda_n - v_n + b_n \Delta f - a_n z - \Delta x + w_n) \end{aligned}$$

Die Bedingungen für das Minimum sind:

$$\frac{\partial A}{\partial \lambda} = \frac{\partial A}{\partial v} = \frac{\partial A}{\partial \Delta f} = \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial \Delta x} = 0$$

Das liefert die Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} 2 g_1 \lambda_1 - 2 a_1 k_1 = 0 & 2 g_2 \lambda_2 - 2 a_2 k_2 = 0 \ \ldots & 2 g_n \lambda_n - 2 a_n k_n = 0 \\ 2 G_1 v_1 + 2 k_1 = 0 & 2 G_2 v_2 + 2 k_2 = 0 & 2 G_n v_n + 2 k_n = 0 \\ \quad - 2 b_1 k_1 & - 2 b_2 k_2 \ \ldots & - 2 b_n k_n = 0 \\ \quad + 2 a_1 k_1 & + 2 a_2 k_2 & + 2 a_n k_n = 0 \\ \quad + 2 k_1 & + 2 k_2 & + 2 k_n = 0 \end{array}$$

Wir dividieren alle Gleichungen durch 2 und erhalten

(11a) $$g_1 \lambda_1 = a_1 k_1; \quad g_2 \lambda_2 = a_2 k_2; \ \ldots \quad g_n \lambda_n = a_n k_n$$

(11b) $$G_1 v_1 = -k_1; \quad G_2 v_2 = -k_2; \quad G_n v_n = -k_n$$

(11c) $$\left\{ \begin{array}{l} b_1 k_1 + b_2 k_2 + \ldots\ldots + b_n k_n = 0 \\ a_1 k_1 + a_2 k_2 + \ldots\ldots + a_n k_n = 0 \\ k_1 + k_2 \qquad\qquad\quad + k_n = 0 \end{array} \right.$$

Setzen wir die aus (11a) und (11b) folgenden Werte für λ und v in die Gleichungen (8) ein, so erhalten wir:

(12) $$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a_1 a_1}{g_1} k_1 + \dfrac{1}{G_1} k_1 + b_1 \Delta f - a_1 z - \Delta x + w_1 = 0 \\ \dfrac{a_2 a_2}{g_2} k_2 + \dfrac{1}{G_2} k_2 + b_2 \Delta f - a_2 z - \Delta x + w_2 = 0 \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \dfrac{a_n a_n}{g_n} k_n + \dfrac{1}{G_n} k_n + b_n \Delta f - a_n z - \Delta x + w_n = 0 \end{array} \right.$$

Wir setzen zur Abkürzung

(13) $$\frac{a_i a_i}{g_i} + \frac{1}{G_i} = \gamma_i$$

und erhalten so das System (12) in folgender Form:

$$
(14)\quad \left\{\begin{array}{llllll}
\gamma_1 k_1 \quad \ldots\ldots\ldots & +b_1 \Delta f & - a_1 z & - \Delta x & + w_1 & = 0 \\
\quad \gamma_2 k_2 \quad \ldots\ldots & +b_2 \Delta f & - a_2 z & - \Delta x & + w_2 & = 0 \\
\quad\quad \gamma_3 k_3 \ldots & +b_3 \Delta f & - a_3 z & - \Delta x & + w_3 & = 0 \\
\ldots\ldots & & & & & \\
\ldots\ldots & & & & & \\
\quad\quad \ldots \gamma_n k_n & +b_n \Delta f & - a_n z & - \Delta x & + w_n & = 0
\end{array}\right.
$$

Schreiben wir dazu die, wo nötig mit —1 multiplizierten Gleichungen (11c)

$$
(15)\quad \left\{\begin{array}{l}
+ b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3 \ldots + b_n k_n = 0 \\
- a_1 k_1 - a_2 k_2 - a_3 k_3 \ldots - a_n k_n = 0 \\
- k_1 - k_2 - k_3 \ldots - k_n = 0
\end{array}\right.
$$

so bilden (14) und (15) zusammen ein Normalgleichungssystem für die unbekannten $k_1, k_2 \ldots k_n$, Δf, z und Δx.

Aus (14) folgen die Werte für die k:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= -\frac{b_1}{\gamma_1} \Delta f + \frac{a_1}{\gamma_1} z + \frac{1}{\gamma_1} \Delta x - \frac{w_1}{\gamma_1} \\
k_2 &= -\frac{b_2}{\gamma_2} \Delta f + \frac{a_2}{\gamma_2} z + \frac{1}{\gamma_2} \Delta x - \frac{w_2}{\gamma_2} \\
&\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots \\
k_n &= -\frac{b_n}{\gamma_n} \Delta f + \frac{a_n}{\gamma_n} z + \frac{1}{\gamma_n} \Delta x - \frac{w_n}{\gamma_n}
\end{aligned}
$$

Setzen wir diese Werte für die k in (15) ein und multipliziert alle Gleichungen mit —1, so erhalten wir:

$$
(17)\quad \begin{array}{l}
\left[\frac{bb}{\gamma}\right] \Delta f - \left[\frac{ab}{\gamma}\right] z - \left[\frac{b}{\gamma}\right] \Delta x + \left[\frac{bw}{\gamma}\right] = 0 \\
- \left[\frac{ab}{\gamma}\right] \Delta f + \left[\frac{aa}{\gamma}\right] z + \left[\frac{a}{\gamma}\right] \Delta x - \left[\frac{aw}{\gamma}\right] = 0 \\
- \left[\frac{b}{\gamma}\right] \Delta f + \left[\frac{a}{\gamma}\right] z + \left[\frac{1}{\gamma}\right] \Delta x - \left[\frac{w}{\gamma}\right] = 0
\end{array}
$$

Dies ist aber ein Normalgleichungssystem für die Unbekannten Δf, z und Δx, aus dem wir die Unbekannten berechnen können.

Wenn wir die Richtungsmessungen α' als fehlerlos annehmen, so werden ihre Gewichte

$$g_1 = g_2 = \ldots = g_n = \infty$$

und es wird daher

$$\gamma_i = \frac{1}{G_i}$$

Nehmen wir noch an, daß alle G einander gleich seien und setzen wir sie der Einfachheit halber gleich Eins, was nur einer speziellen Wahl der Gewichtseinheit entspricht, so gehen die Gleichungen (17) über in das folgende System:

$$
(18)\quad \begin{array}{l}
[bb]\, \Delta f - [ab]\, z - [b]\, \Delta x + [bw] = 0 \\
- [ab]\, \Delta f + [aa]\, z + [a]\, \Delta x - [aw] = 0 \\
- [b]\, \Delta f + [a]\, z + n \cdot \Delta x - [w] = 0
\end{array}
$$

Zu diesem System gelangen wir auch, wie es sein muß, aus den Gleichungen (8), wenn wir dort die $\lambda = o$ setzen, so daß wir die Fehlergleichungen erhalten:

$$v_i = b_i \Delta f - a_i z - \Delta x + w_i$$

aus denen, unter Annahme gleicher Gewichte für die v, nach der vermittelnden Ausgleichung die Gleichungen (18) folgen.

Setzen wir anderseits voraus, die x'_i seien fehlerlos beobachtet, so werden ihre Gewichte

$$G_1 = G_2 = \dots = G_n = \infty$$

und es wird

$$\gamma_i = \frac{a_i a_i}{g_i}$$

Setzen wir noch alle g gleich Eins, so haben wir

$$\gamma_i = a_i a_i$$

und wir erhalten aus (17)

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{bb}{aa}\right] \Delta f - \left[\frac{b}{a}\right] z - \left[\frac{b}{aa}\right] \Delta x + \left[\frac{bw}{aa}\right] = 0 \\
(19)\qquad -&\left[\frac{b}{a}\right] \Delta f + n z + \left[\frac{1}{a}\right] \Delta x - \left[\frac{w}{a}\right] = 0 \\
-&\left[\frac{b}{aa}\right] \Delta f + \left[\frac{1}{a}\right] z + \left[\frac{1}{aa}\right] \Delta x - \left[\frac{w}{aa}\right] = 0
\end{aligned}$$

Zu diesem System gelangen wir direkt aus den Gleichungen (8), wenn wir sie schreiben:

$$\lambda_i = -\frac{b_i}{a_i} \Delta f + z + \frac{1}{a_i} \Delta x - \frac{w_i}{a_i}$$

und daraus nach der vermittelnden Ausgleichungsmethode mit Gewichten Eins die Normalgleichungen bilden.

In der Literatur wurden m. W. bisher nur die Systeme (18) und (19) in Betracht gezogen.

Es läßt sich nun leicht erkennen, daß bei dem praktisch vorkommenden Fall, wo die x maximal die halbe Brennweite erreichen, die Resultate für die 3 Unbekannten aus den 3 Systemen (17), (18) und (19) wenig voneinander abweichen.

Denn die

$$a_i = \frac{f_0^2 + x'^2_i}{\rho'' \cdot f_0}$$

weichen höchstens um 25 % von $\frac{f_0}{\rho}$ ab. Man darf sie daher in erster Näherung als konstant ansehen.

Deshalb sind dann auch die γ als praktisch konstant anzusehen, so daß man die Gleichungen (17) durchwegs mit diesem quasi-konstanten γ multiplizieren darf; ebenso kann man die Gleichungen (19) mit a^2 multiplizieren. Auf diese Weise gehen (17) und (19) in das System (18) über.

Bei dieser Sachlage ist in Uebereinstimmung mit O. v. Gruber, Bestimmung der innern Orientierung von Meßkammern, Internationales Archiv für Photogrammetrie 1923, pag. 82 u. ff., die Verwendung des Systemes (19) zu empfehlen, da sich dort die nicht interessierende Orientierungsunbekannte z in bekannter Weise vorgängig aus den Fehlergleichungen:

$$\lambda_i = -\frac{b_i}{a_i}\,\Delta f + \frac{1}{a_i}\,\Delta x + z - \frac{w_i}{a_i}$$

eliminieren läßt.

Man bestimmt dann am bequemsten $\frac{w_i}{a_i}$ direkt aus der Formel

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x'_i}{f_0}\right) - \alpha'_i = \frac{w_i}{a_i}$$

Der Koeffizient von

$$\Delta f \text{ wird direkt } = -\frac{\rho\, x'_i}{f_0{}^2 + x'_i{}^2}$$

$$\Delta x \quad ,, \quad ,, \quad = \frac{\rho\, f_0}{f_0{}^2 + x'_i{}^2}$$

Mit Hilfe logarithmischer Tafeldifferenzen erhält man

den Koeffizienten von $\Delta f = -\frac{T \log f}{T \log \operatorname{tg} \alpha}$ ändert mit dem Vorzeichen von x'; bei pos. x' negativ

den Koeffizienten von $\Delta x = +\frac{T \log x'}{T \log \operatorname{tg} \alpha} =$

$$= 1 + \frac{T \log x' - T \log \operatorname{tg} \alpha}{T \log \operatorname{tg} \alpha}$$

stets positiv.

Zollikon, 6. Juli 1928. F. Bæschlin.

Die Kartenfrage.

Von Prof. *Ed. Imhof.*

(Fortsetzung.)

Südbeleuchtung.

Das Sorgenkind der plastischen Ausgestaltung der Karte ist die *Beleuchtungsrichtung.* Fast möchte man versucht sein, um dieses Sorgenkind loszuwerden, auf die ganze plastische Bearbeitung zu verzichten. Doch wäre damit nichts gewonnen. Wir können von jeher in der Felsdarstellung Licht und Schatten nicht entbehren, so daß die Frage der Beleuchtungsrichtung nicht erst mit unserer Forderung der plastischen Gestaltung in die Karte kommt. Auch wäre es verkehrt, sich durch eine