

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik =
Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 26 (1928)

Heft: 8

Artikel: Näherungskonstruktion für das apollonische Berührungsproblem

Autor: Müller, Emil

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-190803>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 04.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zwei weitere Kontroll-Gleichungen findet man aus (43) durch skalare Multiplikation mit $\overline{\mathfrak{B}}$ und $|\mathfrak{B}$; dieses Spalten liefert die beiden Gleichungen:

$$(49) \quad \begin{aligned} + A' \cdot \sin (\mathfrak{A}' \mathfrak{B}) + B' \sin (\mathfrak{B}' \mathfrak{B}) + C' \cdot \sin (\mathfrak{C}' \mathfrak{B}) &= 0 \\ + A' \cdot \cos (\mathfrak{A}' \mathfrak{B}) + B' \cos (\mathfrak{B}' \mathfrak{B}) + C' \cdot \cos (\mathfrak{C}' \mathfrak{B}) + W &= 0 \end{aligned}$$

Nunmehr kann zum vektoriellen Ausgleich geodätischer Figuren bei beliebigen Gewichten für die gemessenen Stücke, nämlich Strecken und Winkel, übergegangen werden. (Fortsetzung folgt.)

Näherungskonstruktion für das apollonische Berührungsproblem.

Die Lösung des Problems, die Kreise zu zeichnen, welche drei gegebene Kreise berühren, ist zwar auch direkt, d. h. ohne allmähliche Annäherung möglich, beispielsweise auf dem Umwege der Inversion

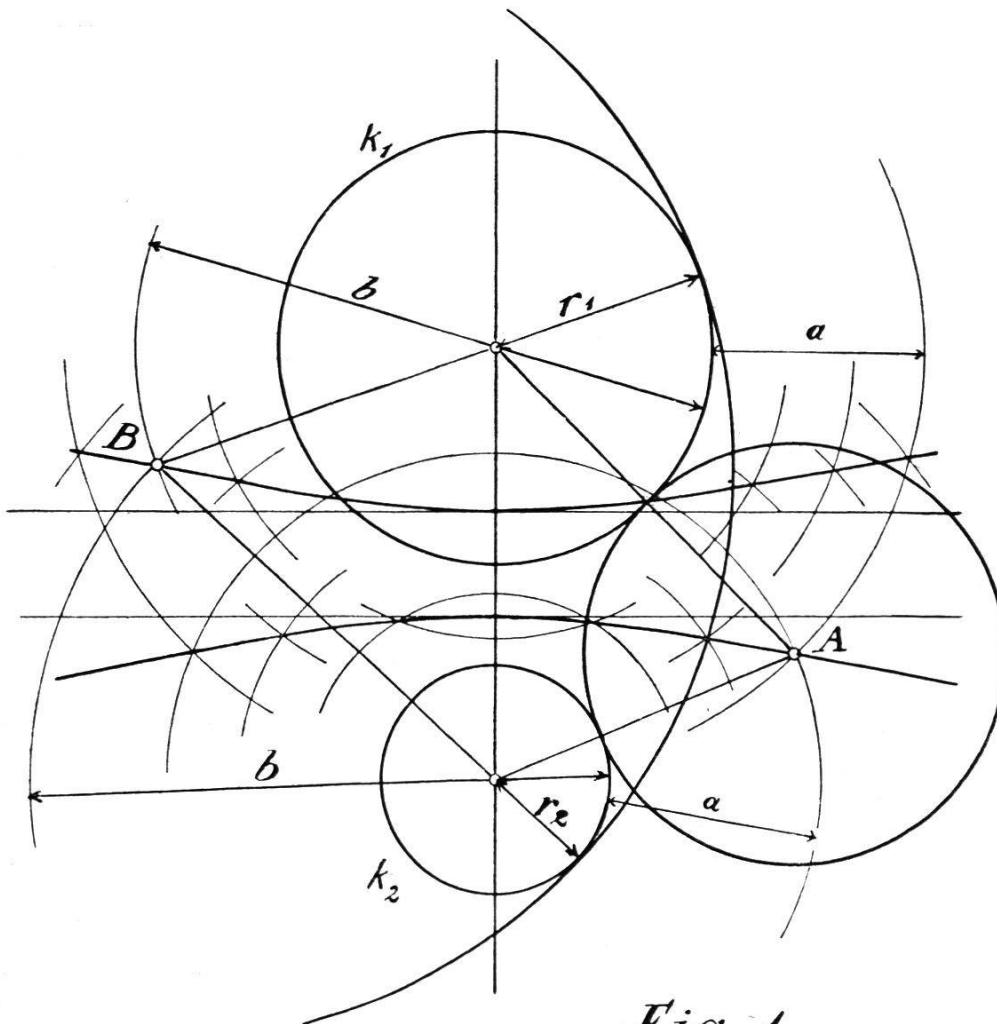


Fig. 1.

mit reziproken Radien. Dabei ist aber eine gewisse Fertigkeit in der Anwendung dieser nicht allgemein bekannten Methode unumgänglich. Eine Aufgabe aus der Praxis führte mich kürzlich auf eine viel einfachere, wenn auch nur angenäherte Lösung. Ob diese schon sonst irgendwo

publiziert wurde, oder ob sie neu ist, entzieht sich meiner Kenntnis. Auf jeden Fall dürfte sie den Berufskollegen Interesse bieten.

Zunächst geht aus den Figuren 1) und 2) hervor, daß der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die zwei gegebene Kreise k_1 und k_2 berühren, zwei Hyperbeln sind mit den Zentren der gegebenen Kreise als Brennpunkte und der Differenz bzw. der Summe der Radien

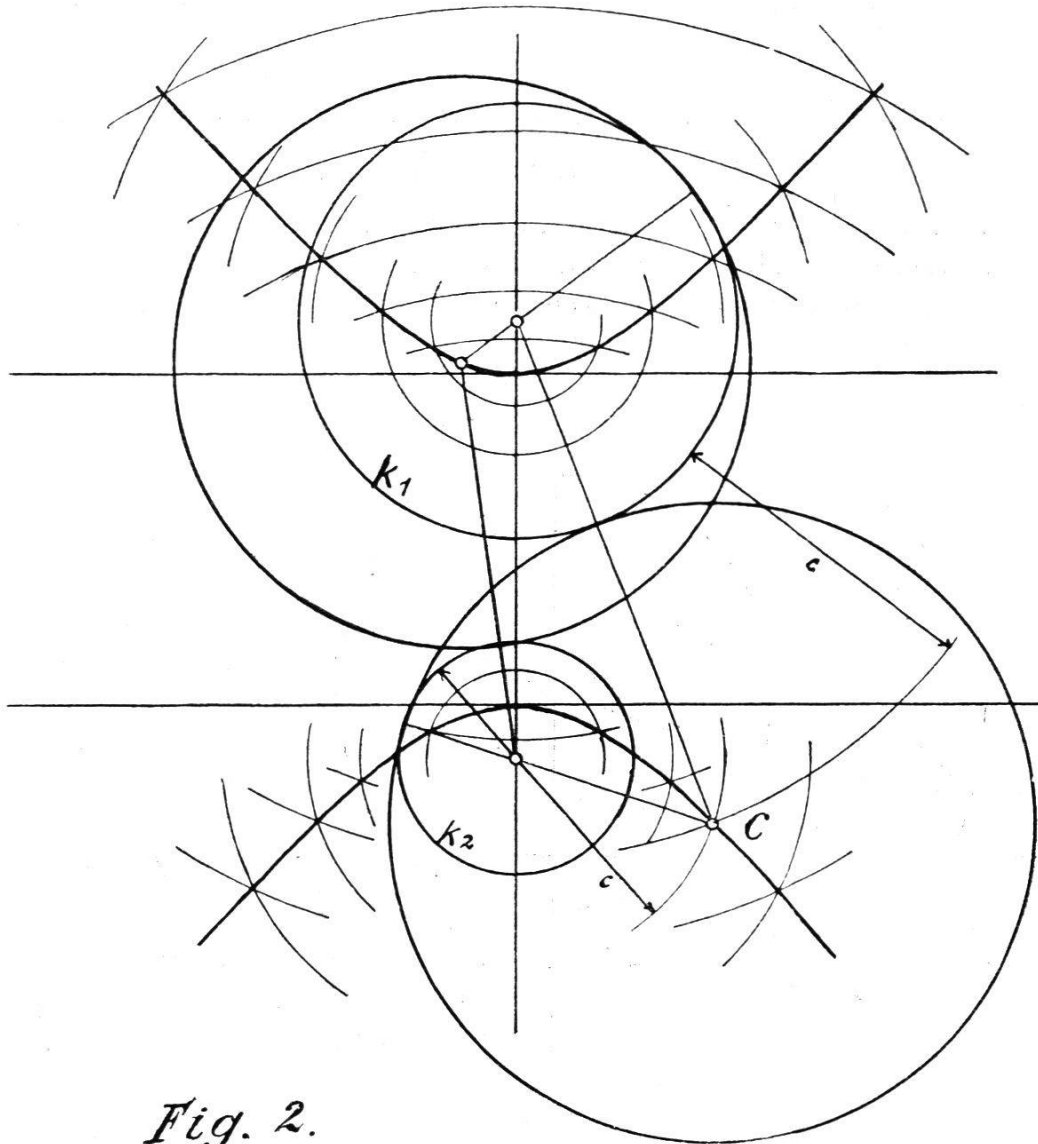


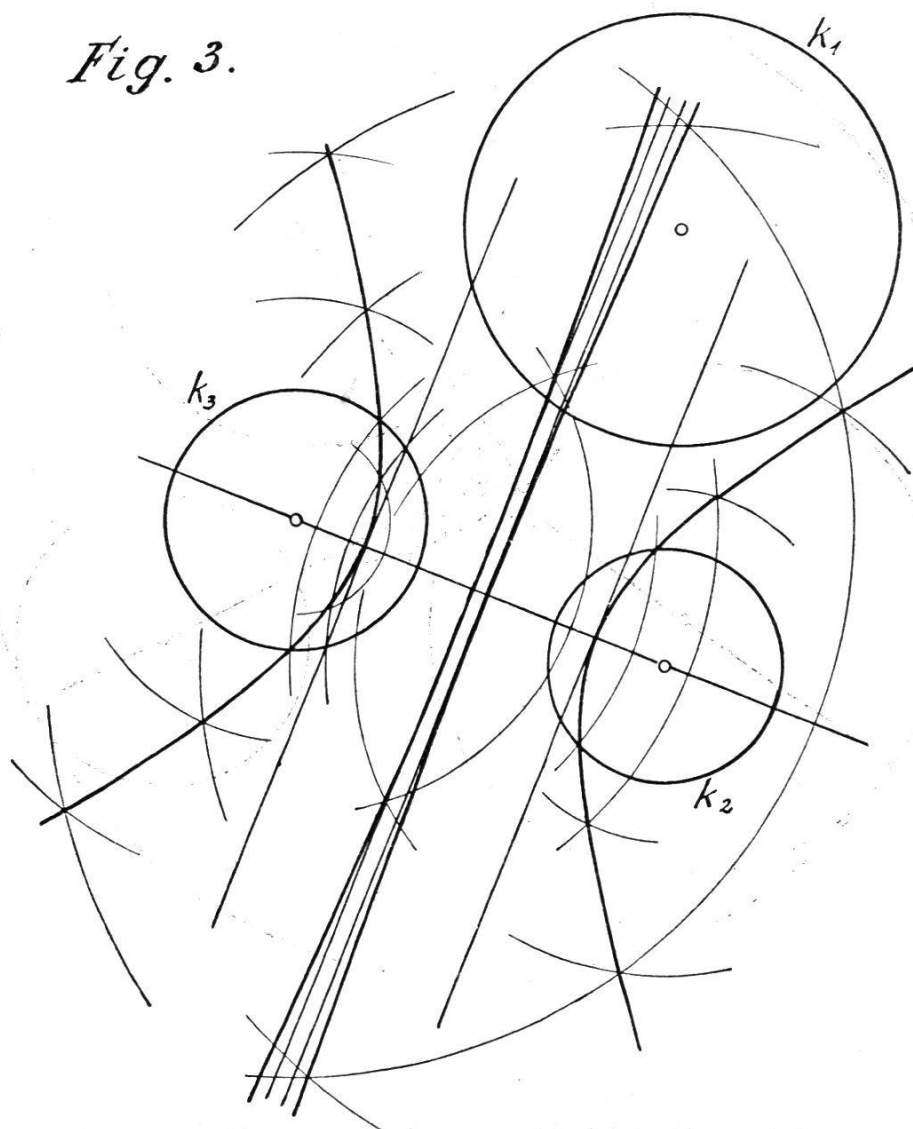
Fig. 2.

als konstanter Differenz der beiden Abstände eines beliebigen Hyperbelpunktes von den Brennpunkten. Beispielsweise ist in Fig. 1 für den Punkt A: $(r_1 + a) - (r_2 + a) = r_1 - r_2$ und für den Punkt B: $(b - r_2) - (b - r_1) = r_1 - r_2$. Ferner ist in Fig. 2 für den Punkt C: $(r_1 + c) - (c - r_2) = r_1 + r_2$. Die beiden Aeste der Hyperbel mit der Differenz der Radien als sich gleichbleibender Differenz der Brennpunktswabstände umfassen die Mittelpunkte derjenigen Kreise, welche die beiden gegebenen in gleichem Sinne, d. h. beide von innen oder beide von außen berühren. Die Aeste der andern Hyperbel mit der Summe der Radien

als konstanter Differenz der Brennpunktabstände umfassen die Zentren derjenigen Kreise, welche die gegebenen Kreise in ungleichem Sinne, d. h. den einen von innen und den andern von außen und umgekehrt berühren.

Tritt nun noch ein dritter Kreis k_3 als gegebener in die Betrachtung ein (Fig. 3), so werden die Mittelpunkte der Berührungskreise von k_2 und k_3 in analoger Weise auf den 4 Aesten von zwei andern Hyperbeln

Fig. 3.



liegen. Die 16 Schnittpunkte der beiden Hyperbelpaare ergeben dann die Zentren von Kreisen, welche die gegebenen Kreise k_1 , k_2 , k_3 paarweise entweder in gleichem oder ungleichem Sinne berühren.

Bezeichnen wir mit (h_{mi}, n_i) den Hyperbelast, welcher den inneren Berührungskreisen von km und kn entspricht, und mit (h_{ma}, n_a) denjenigen Hyperbelast, der den äußeren Berührungskreisen von km und kn entspricht, so ergibt sich folgende Tabelle der höchstens 16 möglichen Schnittpunkte M

Hyperbeläste für

	k_2 und k_3			
k_1 und k_2	$h_{2i\ 3i}$	$h_{2a\ 3a}$	$h_{2i\ 3a}$	$h_{2a\ 3i}$
$h_{1i\ 2i}$	<u>$M_{1i\ 2i\ 3i}$</u>	$M_{1i\ 2i\ 2a\ 3a}$	<u>$M_{1i\ 2i\ 3a}$</u>	$M_{1i\ 2i\ 2a\ 3i}$
$h_{1a\ 2a}$	$M_{1a\ 2a\ 2i\ 3i}$	<u>$M_{1a\ 2a\ 3a}$</u>	$M_{1a\ 2a\ 2i\ 3a}$	<u>$M_{1a\ 2a\ 3i}$</u>
$h_{1i\ 2a}$	$M_{1i\ 2a\ 2i\ 3i}$	<u>$M_{1i\ 2a\ 3a}$</u>	$M_{1i\ 2a\ 2i\ 3a}$	<u>$M_{1i\ 2a\ 3i}$</u>
$h_{1a\ 2i}$	<u>$M_{1a\ 2i\ 3i}$</u>	$M_{1a\ 2i\ 2a\ 3a}$	<u>$M_{1a\ 2i\ 3a}$</u>	$M_{1a\ 2i\ 2a\ 3i}$

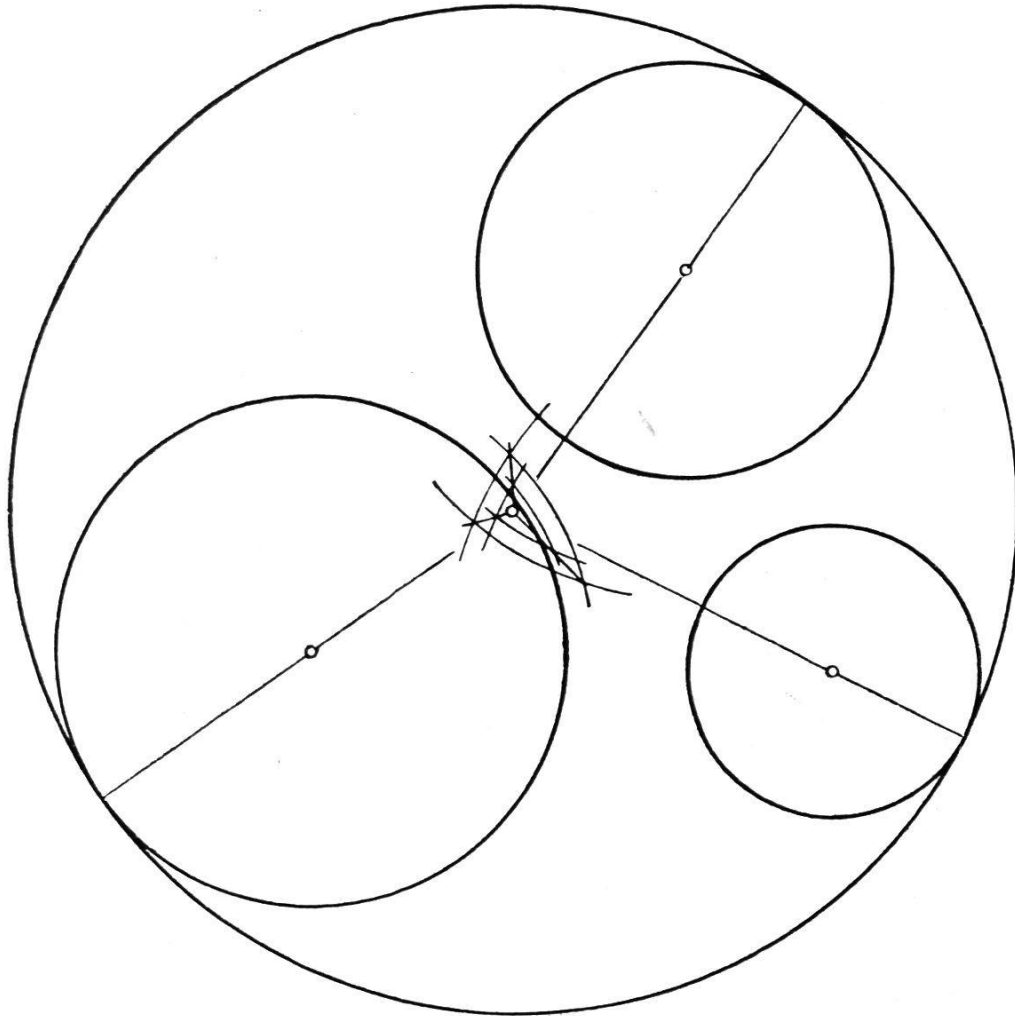


Fig 4.

Bei 8 dieser Schnittpunkte kommt für den Kreis k_2 sowohl innere als äußere Berührung vor, was je 2 Berührungskreise mit verschiedenen Radien voraussetzt. Einzelne dieser acht ersten Schnittpunkte können auch wegfallen. Die übrigen 8 Schnittpunkte M , welche in der Tabelle unterstrichen sind, entsprechen der Lösung der gestellten Aufgabe und sind Mittelpunkte von Kreisen, die je alle 3 gegebenen berühren, und zwar im Sinne der entsprechenden Indices von M .

Zur Kontrolle müssen auch die Hyperbeln des Kreispaares k_1 und k_3 , nämlich $h_{1i\ 3i}$, $h_{1a\ 3a}$, $h_{1i\ 3a}$, $h_{1a\ 3i}$ durch dieselben 8 Punkte gehen.

Die Lösung des apollonischen Berührungsproblems läuft also darauf hinaus, diese 8 Schnittpunkte zu konstruieren. Näherungsweise ist dies auf einfache Weise möglich, wenn die Kurvenstücke zwischen zwei nahe dem gesuchten Schnittpunkt gelegenen Punkten des gleichen Hyperbelastes durch die Sekanten ersetzt werden, ähnlich wie beim Rückwärtseinschneiden mit der Kippregel die Kreisbögen mit den

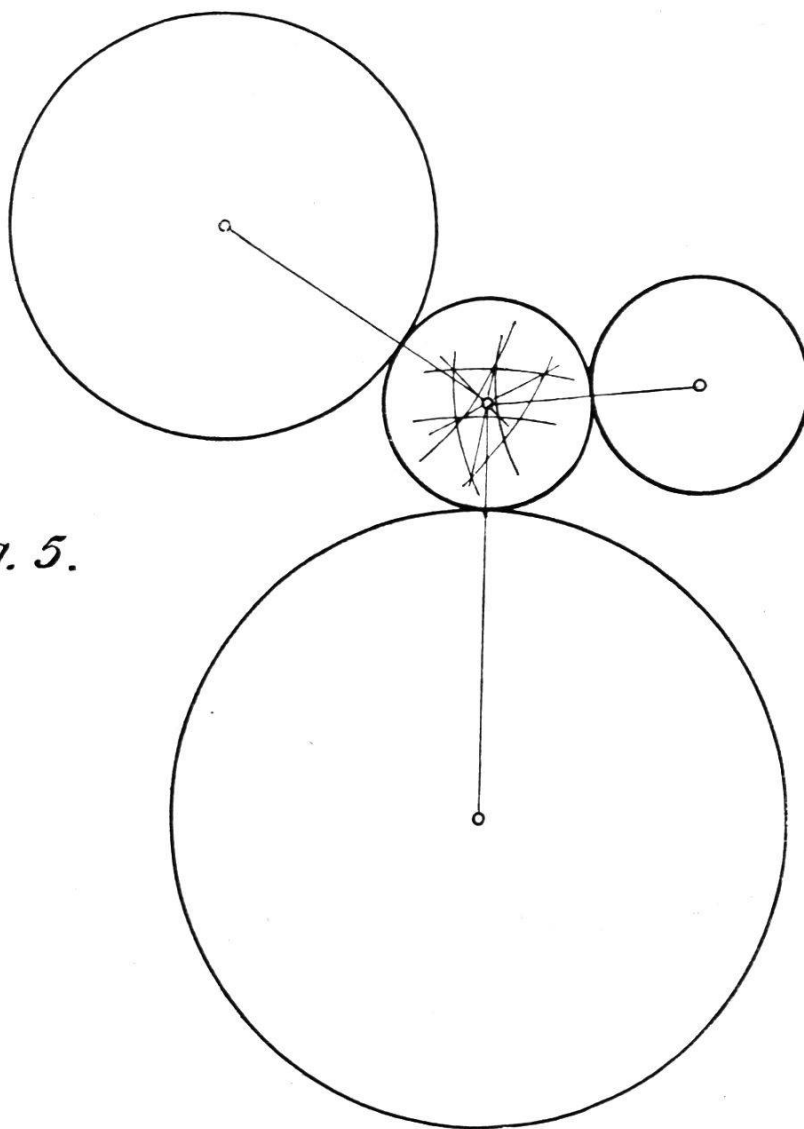


Fig. 5.

konstanten Peripheriewinkeln durch die Kreissekanten ersetzt werden. Gleich wie dort, wird die erreichte Annäherung genügend sein, wenn alle 3 zu einem gesuchten Zentrum gehörenden Sekanten sich mit Zeichnungsgenauigkeit in einem Punkte schneiden.

Um die Hilfspunkte auf den Hyperbeln günstig zu wählen, ersetzen wir in erster Annäherung die Kurven durch ihre Scheiteltangenten und werden so über die ungefähre Lage des gesuchten Mittelpunktes orientiert (in der Fig. 4—6 nicht gezeichnet). Auf diese Weise ist in Fig. 4 der Kreis konstruiert, der die 3 gegebenen einschließend berührt und in Fig. 5 derjenige, der alle 3 ausschließend berührt. Endlich zeigt

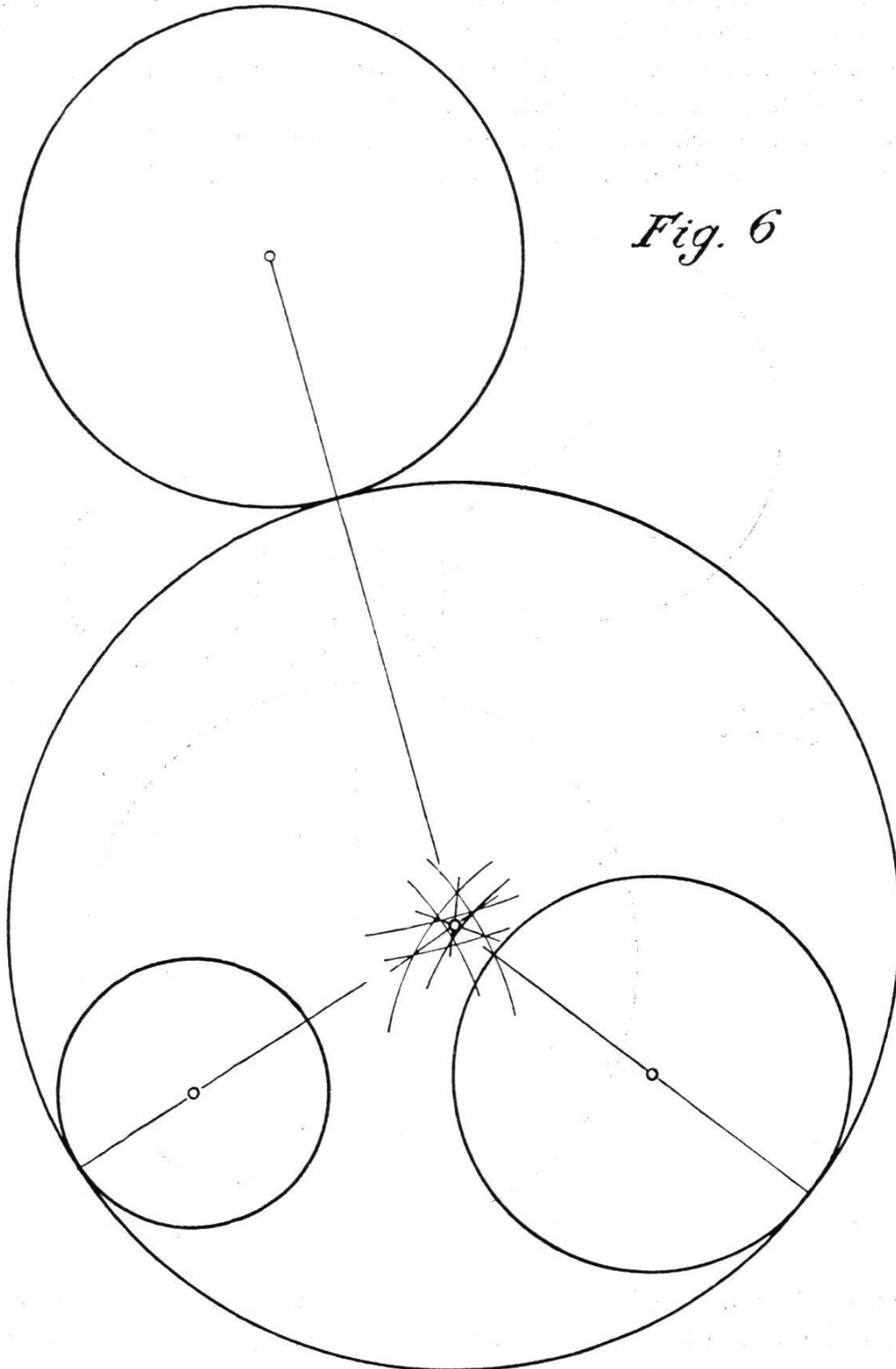


Fig. 6

Fig. 6 die Konstruktion eines Kreises, der zwei der gegebenen einschließend und einen ausschließend berührt. Im Prinzip ganz gleich gestaltet sich die Konstruktion der 5 übrigen Berührungskreise, die deshalb hier nicht besonders aufgeführt werden.

Emil Müller, Frick.