

Zeitschrift:	Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières
Herausgeber:	Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres
Band:	24 (1926)
Heft:	8
Artikel:	Du calcul d'une triangulation dans le voisinage de l'origine des coordonnées
Autor:	Ansermet, A.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-189590

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Du calcul d'une triangulation dans le voisinage de l'origine des coordonnées.

En principe il y a deux méthodes bien différentes de calculer une triangulation :

- 1^o on compense directement le réseau sur le sphéroïde, sans s'occuper du mode de projection ; les coordonnées géodésiques sont ensuite transformées en coordonnées cartésiennes par des développements en séries.
- 2^o le calcul s'opère directement dans le plan ; les éléments observés doivent alors au préalable subir des corrections puisque les figures sont déformées par la projection dans une mesure qui varie suivant le système de coordonnées adopté.

On sait que, de plus en plus, ce 2^e procédé est en faveur en géodésie depuis l'introduction des coordonnées conformes.

Les deux méthodes ont cependant ceci de commun que dans un certain « champ » plus ou moins étendu autour de l'origine, la double courbure de la surface terrestre peut être négligée, la triangulation étant calculée directement sur la sphère dite de *même courbure moyenne*; on évite ainsi la double projection. Quelle est l'étendue de ce champ ? C'est ce qu'il convient tout d'abord d'établir.

La sphère de même courbure moyenne à l'origine jouit

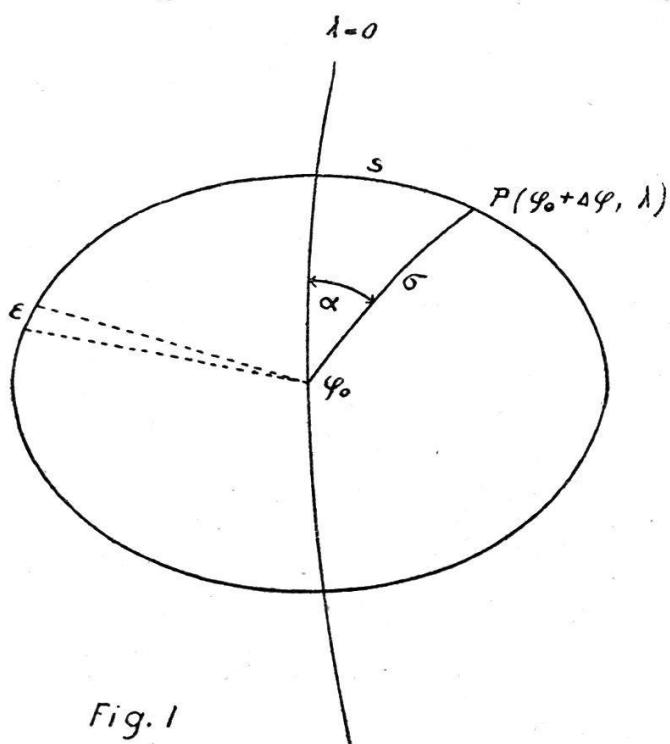


Fig. 1

de la propriété de s'appliquer sur le sphéroïde, les géodésiques d'une des surfaces se transformant en géodésiques de l'autre. En particulier les déformations tant d'azimut que de longueur résultant de cette application seront du 3^e ordre en σ et l'ouverture linéaire ε pour toute la périphérie de la calotte (Fig. 1) du 4^e ordre en σ :

déformation = $\sigma^3 f(a) + \sigma^4 \dots$ ou en coordonnées géographiques:

$$\text{déformation} = C_1 \cdot \bar{\Delta}^3 \varphi + C_2 \cdot \bar{\Delta}^2 \varphi \cdot \lambda + C_3 \cdot \Delta \varphi \cdot \lambda^2 + C_4 \cdot \lambda^3 + \dots = m-1$$

où

$$\begin{cases} \Delta \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \left[\sigma + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \sigma^2} \right] \frac{\sigma^2}{2} + \dots \\ \lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} \left[\sigma + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \sigma^2} \right] \frac{\sigma^2}{2} + \dots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = \frac{V^3}{c} \cos a; \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} = \frac{V}{c} \cdot \frac{\sin a}{\cos \varphi_0} \end{cases} \text{etc. . . .}$$

et en intégrant sur toute la périphérie de la calotte:

$$\int (m-1) ds = \int (m-1) \sigma da = \sigma \int (m-1) da \cong \sigma^4 \int [C'_1 \cos^3 a + C'_2 \cos^2 a \cdot \sin a + C'_3 \cos a \sin^2 a + C'_4 \sin^3 a] da$$

la déformation totale ou ouverture linéaire ε est bien du 4^e ordre en σ ; les coefficients C'_1, C'_2, C'_3, C'_4 sont indépendants de a .

Telle est la formule générale de l'application du sphéroïde sur la sphère de courbure moyenne; nous verrons que dans le cas particulier préconisé par Gauss trois des termes sur quatre s'éliminent.

Pour le calcul on utilise généralement la formule

$$\varepsilon = 2 [K_2 + \sqrt{K_1^2 + K_2^2}] \sigma^4$$

pour le sphéroïde:

$$K_1 = \frac{1}{3 \rho_0 N_0^2} \frac{e^2 \cdot \sin \varphi_0 \cos \varphi_0}{1 - e^2} \quad K_2 = 0 \quad e^2 = 1 : 147$$

ρ_0 et N_0 désignant les rayons de courbure principaux
("Annales hydrographiques", Paris 1912)

soit pour $\varphi_0 = 45^\circ$:

distance σ	ouverture ε résultant de l'application de la sphère sur le sphéroïde
102,7 kil.	0,001 m
183,9	0,01 m
327,1	0,10 m

Si nous reprenons la formule générale en posant avec Gauss

$$C_2 = C_3 = C_4 = 0$$

$$\int (m-1) \sigma da = \sigma^4 \int \left[\frac{2 \eta^2}{3 V} \operatorname{tg} \varphi_0 \cos^3 a + \dots \right] da \cong \sigma^4 \int \frac{1}{450} \cos^3 a da$$

toujours pour $\varphi_0 = 45^\circ$ qui correspond au maximum de déformation:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \alpha \cdot d\alpha = \left[\frac{1}{12} \sin 3\alpha + \frac{3}{4} \sin \alpha \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

intégrales qui se calculent aussi par voie graphique.

Soit $\sigma = 1^\circ$ (sexag.) = 1 : 57,3 (radians) = 111 kilom.

$$\sigma^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 \alpha \cdot d\alpha}{450} = \left(\frac{1}{57,3} \right)^4 \frac{6380 \ 000 \ 000}{450} \text{ mm} \cdot \frac{2}{3} = 0,86 \text{ mm}$$

soit la déformation totale pour $1/4$ de calotte; pour la calotte complète l'intégrale s'annule ce qui se voit a priori.

La figure 2 a été établie d'après le tableau ci-dessus pour des champs de 183,9 km et 327,1 km.

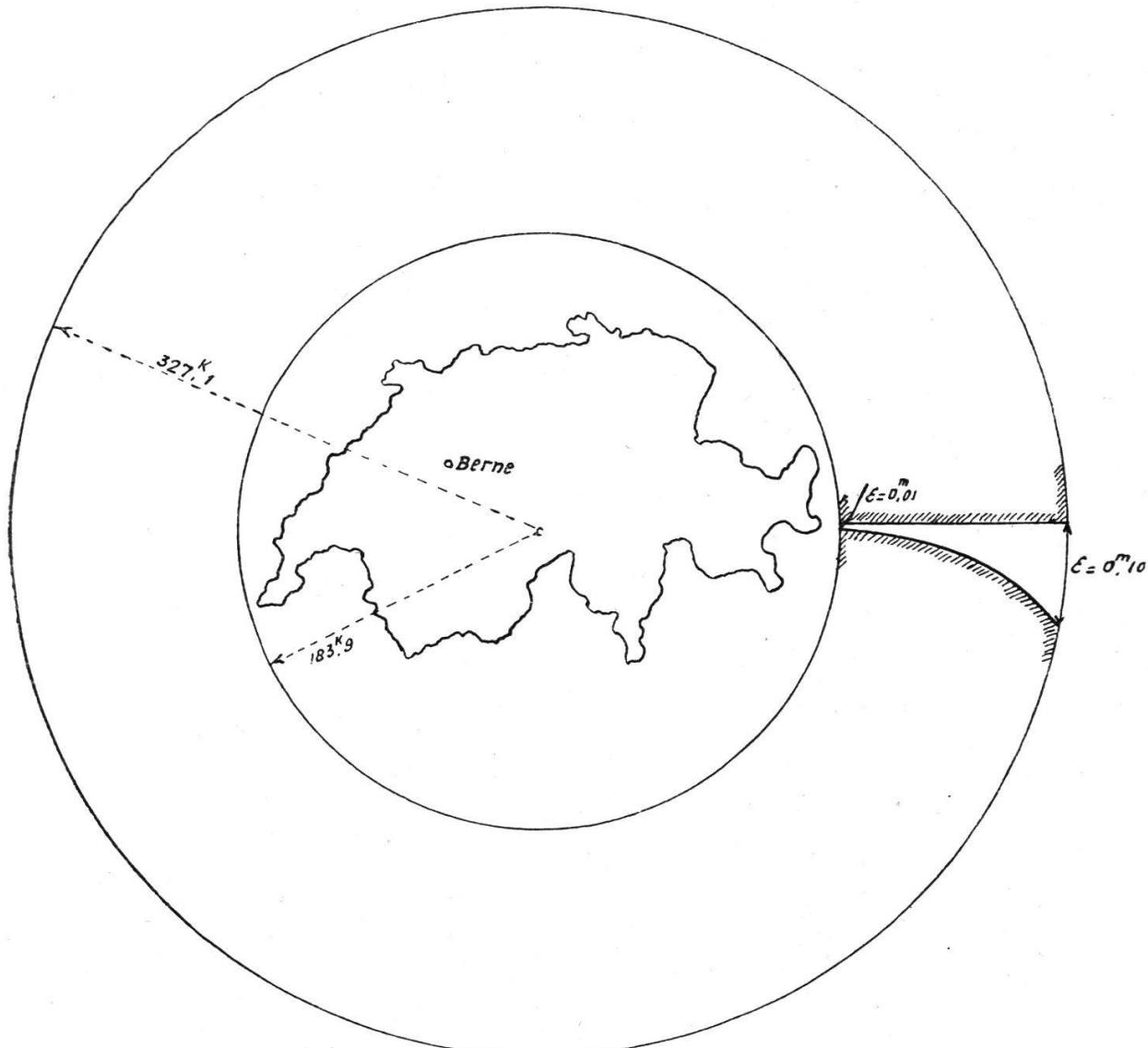


Fig. 2

Il est permis d'admettre que dans un champ de 183,9 kilom. autour de l'origine la double courbure du sphéroïde peut être négligée et par suite la double projection évitée.

Développons donc les séries sphériquement en choisissant comme unité le rayon et en admettant l'image du méridien central comme axe de symétrie :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = A\varphi + \frac{\lambda^2}{2} \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + \frac{a}{3} A\varphi + A\varphi \cdot \lambda^2 \left(\frac{\cos 2\varphi_0}{2} - a \cos^2 \varphi_0 \right) \\ \qquad \qquad \qquad + \dots \\ y = \lambda \cdot \cos \varphi_0 - \lambda \cdot A\varphi \sin \varphi_0 + \frac{\lambda \cdot A\varphi}{2} \cos \varphi_0 (2a - 1) \\ \qquad \qquad \qquad + \frac{\lambda^3}{3} \cos \varphi_0 \left(\frac{\cos 2\varphi_0}{2} - a \cos^2 \varphi_0 \right) \dots \end{array} \right.$$

le paramètre α définissant la projection. On vérifie sans peine les formules de déformation :

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \lambda \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + A\varphi \cdot \lambda (\cos 2\varphi_0 - 2a \cos^2 \varphi_0)$$

$$-\lambda \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + \lambda \cdot \Delta\varphi [\sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 (2a - 1)] + \dots = T_3.$$

T_* , désignant des termes de 3^e ordre;

la déformation linéaire se calcule de même :

$$h^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 = 1 + 2 \alpha \bar{A} \varphi^2 + \lambda^2 \cdot \cos^2 \varphi_0 (1 - 2 \alpha) + T_3.$$

$$h = 1 + \alpha \cdot \bar{A}^2 \varphi + \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \lambda^2 \cdot \cos^2 \varphi_0 + T_3.$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 = \cos^2 \varphi_0 - 2 \Delta \varphi \cdot \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 +$$

$$\lambda^2(2\alpha \cos^2 \varphi_0 - \cos 2\varphi_0) + \lambda^2 \cdot \cos^2 \varphi_0 (\cos^2 \varphi_0 - 2\alpha \cos^2 \varphi_0).$$

$$k = \frac{1}{\cos \varphi} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{ où } \frac{1}{\cos \varphi} =$$

$$\frac{1}{\cos \varphi_0} \left[1 + A\varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi_0 + \frac{A\varphi^2}{2} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi_0) + \frac{A\varphi^3}{6} \dots \right]$$

$$k^2 = 1 + \frac{-2}{4\varphi(2\alpha)} + \lambda^2 \cdot \cos^2 \varphi_0 (1 - 2\alpha) \dots$$

$$k = 1 + a \cdot 4\varphi^{-2} + (0.5 - a) \lambda^2 \cdot \cos^2 \varphi_0 \dots = h \pm T_s.$$

$$m = 1 + ax^2 + \beta y^2 + \dots = 1 + ax^2 + (0.5 - a) y^2 + \dots$$

Cas particuliers: $\alpha = 0.5$ (Project. conique ou Mercator oblique).

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \Delta\varphi + \frac{1}{2} \lambda^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + \frac{1}{6} \bar{\Delta\varphi} - \frac{1}{2} \Delta\varphi \cdot \lambda^2 \sin^2 \varphi_0 + \dots \\ y = \lambda \cdot \cos \varphi_0 - \lambda \cdot \Delta\varphi \cdot \sin \varphi_0 - \frac{1}{6} \lambda^3 \cdot \cos \varphi_0 \sin^2 \varphi_0 \dots \end{array} \right.$$

$\alpha = 0.25 = \beta$ (Projection stéréographique).

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \Delta\varphi + \frac{1}{2} \lambda^2 \cdot \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + \frac{1}{12} \cdot \bar{\Delta\varphi} \\ \quad - \frac{1}{4} \cdot \Delta\varphi \cdot \lambda^2 (2 \sin^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_0) \dots \\ y = \lambda \cdot \cos \varphi_0 - \lambda \cdot \Delta\varphi \cdot \sin \varphi_0 - \frac{1}{4} \cdot \lambda \cdot \bar{\Delta\varphi} \cos \varphi_0 \\ \quad - \frac{1}{2} \lambda^3 \cdot \cos \varphi_0 (2 \sin^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_0) \dots \end{array} \right.$$

$\alpha = 0$ (Projection transversale de Mercator ou de Gauss).

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \Delta\varphi + \frac{1}{2} \cdot \lambda^2 \cdot \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + \frac{1}{2} \Delta\varphi \cdot \lambda^2 \cos 2 \varphi_0 + \dots \\ y = \lambda \cdot \cos \varphi_0 - \lambda \cdot \Delta\varphi \cdot \sin \varphi_0 - \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot \bar{\Delta\varphi} \cos \varphi_0 \\ \quad + \frac{1}{6} \lambda^3 \cdot \cos \varphi_0 \cos 2 \varphi_0 \dots \end{array} \right.$$

Déformations d'azimut.

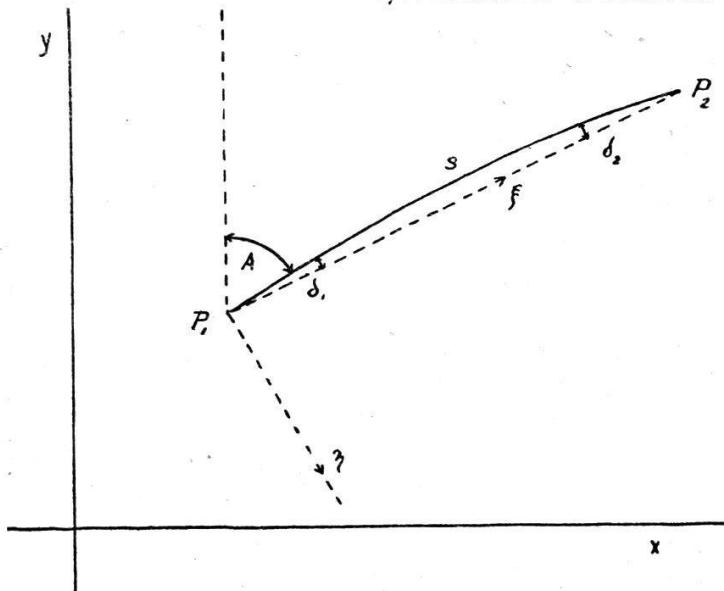


Fig. 3

Nous sommes maintenant en mesure de calculer ces déformations δ_1 , δ_2 qui permettront de compenser le réseau directement dans le plan; nous avons trouvé (« Schweiz. Zeitschrift für Vermessungswesen », 1925, nos 7 et 8):

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} = \beta' \cdot y_1 \sin A - a' x_1 \cos A + (\beta' - a') \xi \sin A \cos A + \dots$$

L'équation de l'arc s en $(\eta \xi)$ s'écrira:

$$\eta = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)_0 \xi + \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \right)_0 \frac{\xi^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} \right)_0 \frac{\xi^3}{3!} + \dots$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \right)_0 \xi + \left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} \right)_0 \frac{\xi^2}{2} + \dots$$

δ_1 et δ_2 en valeur absolue s'obtiennent par

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)_0 \quad \operatorname{tg} \delta_2 = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)_s$$

c.-à-d. pour les abscisses $\xi = 0$ et $\xi = s$

$$0 = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)_0 s + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \right)_0 s^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} \right) \frac{s^3}{2} + \dots$$

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)_s = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \right)_0 s + \left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} \right) \frac{s^2}{2} + \dots$$

$$\text{où } \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} = (\beta' - \alpha') \sin A \cdot \cos A.$$

$$\begin{cases} \delta_1 = \frac{s}{6} [3 \beta' y_1 \sin A - 3 \alpha' x_1 \cos A + (\beta' - \alpha') s \sin A \cos A] \dots \\ \delta_2 = \frac{s}{6} [3 \beta' y_1 \sin A - 3 \alpha' x_1 \cos A + 2(\beta' - \alpha') s \cdot \sin A \cos A] \dots \end{cases}$$

Projection stéréographique: $\alpha' = \beta' = 0,5$.

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{s}{4} [y_1 \sin A - x_1 \cos A] + \dots$$

Projection conique ou Mercator oblique $\alpha' = 1$ $\beta' = 0$

$$-\delta_1 = \frac{s}{6} \cos A [3 x_1 + s \cdot \sin A] \dots$$

$$-\delta_2 = \frac{s}{6} \cos A [3 x_1 + 2 s \cdot \sin A] \dots$$

L'interprétation graphique de ces formules est immédiate; quant au maximum de δ_1 et δ_2 il s'obtient en différentiant par rapport à l'azimut A .

Applications: supposons $s = 1$ kilomètre et $x_1 = \pm y_1$ la déformation linéaire est indépendante du système de projection puisque le point P_1 est sur la bissectrice des axes; le tableau ci-après donne un aperçu des valeurs maximums de δ_1 et δ_2 (valeurs absolues):

Valeurs absolues de δ_1 maximum ou δ_2 maximum.

$x_1 = \pm y_1$	$\alpha = \beta = 0,25$	$\alpha = 0,5$ ou $\beta = 0,5$
100 kilom.	0," 18	0," 25
150 "	0," 27	0," 38
200 "	0," 36	0," 50
250 "	0," 44	0," 63

Il n'est donc pas exact d'affirmer comme le fait le Prof. Fasching (« Zeitschr. für Vermessungswesen », 1925, p. 51) que la valeur de δ_{max} est moitié moindre dans la projection stéréographique. Quant à l'influence des termes de 3^e ordre elle est exposée dans le travail déjà cité (« Schweiz. Zeitschr. für Vermessungswesen », 1925, nos 7 et 8) et calculable par une abaque. Pour la triangulation secondaire et dans le voisinage de l'origine on se contentera du calcul ci-dessus qui est simple et justifie la compensation d'un réseau directement dans le plan.

En résumé, pour un pays tel que la Suisse, la triangulation peut se calculer directement dans le plan sans faire intervenir la double courbure du sphéroïde; les formules qui précèdent suffiront pour la triangulation secondaire; pour les longs côtés éloignés de l'axe neutre on développera éventuellement les séries jusqu'aux termes de 3^e ordre.

A. Ansermet.

Berechnung des Wertes von Obstbäumen.

Von Kulturingenieur Dr. H. Fluck, Neuenburg.

A. Allgemeines.

Wie schon früher an dieser Stelle¹ bemerkt wurde, werden bei Obstbaumbewertungen noch häufig Verfahren zur Anwendung gebracht, die einer genauen Kritik nicht standhalten können. Unter diesen Umständen und mit Rücksicht darauf, daß bei Güterzusammenlegungen, Straßen- und Bahnbauten sehr oft Obstbäume taxiert werden müssen, ist es vielleicht nicht unangebracht, daß das Problem der Obstbaumbewertung auch hier einmal zur Sprache kommt.

Für die Taxierung der Obstbäume ist in erster Linie der Ertragswert maßgebend. Wir verstehen darunter die Summe der Barwerte aller künftiger Obstrenten (Obstreinerträge).

¹ 1924, S. 290 ff.