

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik =
Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 24 (1926)

Heft: 5

Artikel: Zur Gewichtsverteilung bei der eingehängten Dreieckskette

Autor: [s.n.]

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-189584>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 10.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SCHWEIZERISCHE Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik

ORGAN DES SCHWEIZ. GEOMETERVEREINS

REVUE TECHNIQUE SUISSE DES MENSURATIONS ET AMÉLIORATIONS FONCIÈRES

ORGANE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES GÉOMÈTRES

Redaktion: F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)

Ständiger Mitarbeiter für Kulturtechnik: Dr. H. FLUCK, Dipl. Kulturingenieur, Neuchâtel, 9, Passage Pierre qui roule. — Collaborateur attitré pour la partie en langue française: CH. ROESGEN, ingénieur-géomètre, Genève, 11, rue de l'Hôtel-de-Ville — Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats.

□ Expedition, Inseraten- und Abonnements-Annahme: □
BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR VORM. G. BINKERT, WINTERTHUR

Jährlich 12 Nummern
(erscheinend am zweiten Dienstag
jeden Monats)
und 12 Inseraten-Bulletins
(erscheinend am vierten Dienstag
jeden Monats)

No. 5
des **XXIV. Jahrganges** der
„Schweiz. Geometerzeitung“.
11. Mai 1926

Jahresabonnement Fr. 12.—
(unentgeltlich für Mitglieder)
Ausland Fr. 15.—

Inserate:
50 Cts. per 1spaltige Nonp.-Zeile

Zur Gewichtsverteilung bei der eingehängten Dreieckskette.

I.

In einer früheren Arbeit* wurde gezeigt, wie sich in einer freien Dreieckskette die Fehler der einzelnen Dreiecke auf den Endpunkt übertragen und welche Gewichtsverteilung zur besten Punktbestimmung führt. Die Untersuchung gelangte zu dem Ergebnis, daß jene Dreiecke am schärfsten beobachtet werden müssen, welche der Grundlinie zunächst liegen.

Bei der eingehängten Dreieckskette könnte die gleiche Aufgabe gestellt werden entweder betreffend einen in der Kettenmitte gelegenen Punkt, womit die Frage nach der Querverschiebung gelöst wäre, oder betreffend eine nahe der Mitte befindliche Dreiecksseite. Dieser Fall, bei dem nur eine Funktion zu behandeln ist, soll vorausgeschickt werden.

Zu Grunde gelegt wurde eine aus sieben Dreiecken bestehende Kette, welche ohne Richtungsanschluß zwischen die Punkte P und Q eingehängt ist (Abb. 1). Wählt man die Richtung PF als x -Achse und P als Nullpunkt, dann erhält man für die Südwinkel der einzelnen Seiten:

* Ueber die günstigste Gewichtsverteilung . . . , Denkschrift des J. V. Akad., 1912.

$$\sigma_{PF} = 0, \quad \sigma_{FD} = (19+14) - (17+16),$$

$$\sigma_{DA} = (19+14+13+8) - (17+16+11+10),$$

$$\sigma_{AG} = (19+14+13+8+7+2) - (17+16+11+10+5+4)$$

und mit dem Näherungswert o' , an Stelle des noch unbekannten o , die vorläufigen Seitenlängen $k', f', c' \dots h' \dots$

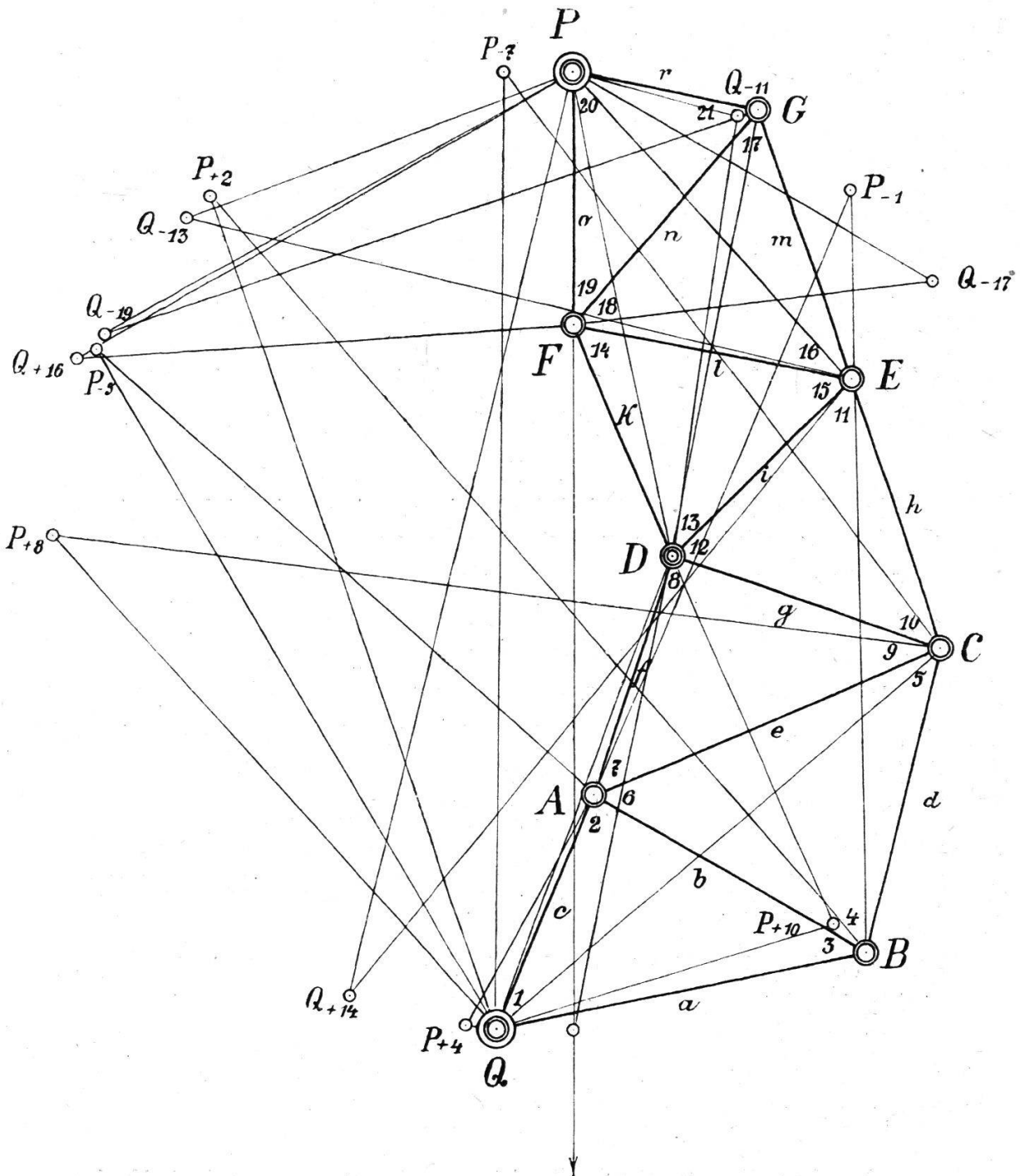


Abbildung 1.

Damit können die Koordinaten des vorläufigen Kettenendpunktes Q' , welcher in der Verbindungsgeraden PQ liegt, angesetzt werden:

$$x_{Q'} = o' + k' \cos \sigma_{FD} + f' \cos \sigma_{DA} + c' \cos \sigma_{AQ},$$

$$y_{Q'} = k' \sin \sigma_{FD} + f' \sin \sigma_{DA} + c' \sin \sigma_{AQ}$$

und die Entfernung $PQ' = L'$ wird:

$$\begin{aligned} L'^2 = & o'^2 + k'^2 + f'^2 + c'^2 + 2 o' k' \cos \sigma_{FD} + 2 o' f' \cos \sigma_{DA} \\ & + 2 o' c' \cos \sigma_{AQ} + 2 k' f' \cos (\sigma_{DA} - \sigma_{FD}) + 2 k' c' \cos (\sigma_{AQ} - \sigma_{FD}) \\ & + 2 f' c' \cos (\sigma_{AQ} - \sigma_{DA}). \end{aligned}$$

Setzt man die Länge PQ , welche aus den gegebenen Koordinaten zu berechnen ist, gleich L und beachtet, daß

$$\frac{h}{h'} = \frac{L}{L'}$$

sein muß, so folgt für die in der ungefähren Kettenmitte liegenden Seite h :

$$h = h' \frac{L}{L'} = L : \left(\frac{L'^2}{h'^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{L}{R_2^{\frac{1}{2}}}.$$

Es ist demnach die Gesamtänderung in h zufolge der fehlerhaften Koordinaten von P und Q und der fehlerbehafteten Dreieckswinkel

$$dh = \frac{dL}{R_2^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2} \frac{L dR}{R^{\frac{3}{2}}} = \frac{h}{L} dL - \frac{1}{2} \frac{h^3}{L^2} dR$$

$$\begin{aligned} \text{mit } dR = & \frac{\partial R}{\partial 1} d1 + \frac{\partial R}{\partial 2} d2 + \frac{\partial R}{\partial 4} d4 + \frac{\partial R}{\partial 5} d5 + \dots + \frac{\partial R}{\partial 19} d19 \\ & + \frac{\partial R}{\partial 20} d20, \end{aligned}$$

da in jedem Dreieck nur zwei Winkel als unabhängige Größen zu betrachten sind.

Damit man die Entwicklung der Differentialquotienten leichter verfolgen könne, sollen die einzelnen Glieder von

$$R = \frac{L'^2}{h'^2}$$

ausführlich angeschrieben werden:

$$\left(\frac{o'}{h'} \right)^2 = \left(\frac{o}{h} \right)^2 = \left[\frac{\sin (19+20) \sin 16 \sin 13 \sin 10}{\sin 20 \sin 17 \sin 14 \sin (10+11)} \right]^2,$$

$$\left(\frac{k'}{h'}\right)^2 = \left(\frac{k}{h}\right)^2 = \left[\frac{\sin (13+14) \sin 10}{\sin 14 \sin (10+11)} \right]^2,$$

$$\left(\frac{f'}{h'}\right)^2 = \left(\frac{f}{h}\right)^2 = \left[\frac{\sin 11 \sin (7+8)}{\sin (10+11) \sin 7} \right]^2,$$

$$\left(\frac{c'}{h'}\right)^2 = \left(\frac{c}{h}\right)^2 = \left[\frac{\sin 11 \sin 8 \sin 5 \sin (1+2)}{\sin (10+11) \sin 7 \sin 4 \sin 1} \right]^2,$$

$$\frac{2 o' k'}{h'^2} \cos \sigma_{FD} = \frac{2 o}{h} \cdot \frac{k}{h} \cos [(19+14) - (17+16)],$$

$$\frac{2 o' f'}{h'^2} \cos \sigma_{DA} = \frac{2 o}{h} \cdot \frac{f}{h} \cos [(19+14+13+8) - (17+16+11+10)],$$

$$\frac{2 o' c'}{h'^2} \cos \sigma_{AQ} = \frac{2 o}{h} \cdot \frac{c}{h} \cos [(19+14+13+8+7+2) - (17+16+11+10+5+4)],$$

$$\frac{2 k' f'}{h'^2} \cos (\sigma_{DA} - \sigma_{FD}) = \frac{2 k}{h} \cdot \frac{f}{h} \cos [(13+8) - (11+10)],$$

$$\frac{2 k' c'}{h'^2} \cos (\sigma_{AQ} - \sigma_{FD}) = \frac{2 k}{h} \cdot \frac{c}{h} \cos [(13+8+7+2) - (11+10+5+4)],$$

$$\frac{2 f' c'}{h'^2} \cos (\sigma_{AQ} - \sigma_{DA}) = \frac{2 f}{h} \cdot \frac{c}{h} \cos [(7+2) - (5+4)].$$

Es wird also zunächst

$$\frac{\partial R}{\partial 1} = \frac{2}{h} \frac{\partial \left(\frac{c}{h}\right)}{\partial 1} [c + f \cos (\sigma_{AQ} - \sigma_{DA}) + k \cos (\sigma_{AQ} - \sigma_{FD}) + o \cos \sigma_{AQ}]$$

und wegen

$$x_Q = o + k \cos \sigma_{FD} + f \cos \sigma_{DA} + c \cos \sigma_{AQ} = PQ \cos \sigma_{PQ}$$

$$y_Q = +k \sin \sigma_{FD} + f \sin \sigma_{DA} + c \sin \sigma_{AQ} = PQ \sin \sigma_{PQ}$$

— wobei P als Nullpunkt und PF als positive x -Achse gilt sowie oben — nach leichter Umformung

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial 1} &= \frac{2}{h} \frac{\partial \left(\frac{c}{h}\right)}{\partial 1} (x_Q \cos \sigma_{AQ} + y_Q \sin \sigma_{AQ}) \\ &= -\frac{2}{h} \frac{\partial \left(\frac{c}{h}\right)}{\partial 1} (x_Q \cos \sigma_{QA} + y_Q \sin \sigma_{QA}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{h} \frac{\partial \left(\frac{c}{h} \right)}{\partial 1} QP \cos (\sigma_{QA} - \sphericalangle 1 - \sigma_{QO}) \\
 &= \frac{2}{h} \frac{\partial \left(\frac{c}{h} \right)}{\partial 1} \cdot QP_{-1},
 \end{aligned}$$

wenn mit P_{-1} die Projektion des Punktes P auf die Richtung QA , d. i. Richtung $QB - \sphericalangle 1$ bezeichnet wird; ferner ist

$$\frac{\partial \left(\frac{c}{h} \right)}{\partial 1} = - \frac{c \sin 2}{h \sin (1+2) \sin 1} = - \frac{a}{h \sin 1}$$

$$\text{und daher } \frac{\partial R}{\partial 1} = - \frac{2 a \cdot QP_{-1} \cdot \sin 1}{h^2 \sin^2 1} = \frac{4 \Delta QBP_{-1}}{h^2 \sin^2 1}, \quad (1)$$

weil a. $QP_{-1} \cdot \sin 1$ dem doppelten Flächeninhalt des Dreieckes QBP_{-1} entspricht. Erfolgt der Umlauf von Q über B nach P_{-1} im Sinne der Uhrzeigerbewegung, dann ist die Dreiecksfläche mit positivem, im Gegenfall mit negativem Vorzeichen einzusetzen.

Auf ähnlichem Wege findet man

$$\frac{\partial R}{\partial 2} = \frac{4 \Delta QBP_{+2}}{h^2 \sin^2 2}, \quad (2)$$

worin P_{+2} die Projektion von P auf die Richtung $QB + \sphericalangle 2$ bedeutet; ebenso

$$\frac{\partial R}{\partial 4} = - \frac{4 \Delta QAP_{+4}}{h^2 \sin^2 4} \quad (4)$$

mit P_{+4} als Projektion von P auf die Richtung $QA + \sphericalangle 4$, was aus der Schreibweise QAP_{+4} zu ersehen ist, ferner

$$\frac{\partial R}{\partial 5} = - \frac{4 \Delta QAP_{-5}}{h^2 \sin^2 5} \quad (5)$$

Für den Differentialquotienten $\frac{\partial R}{\partial 7}$ erhält man zunächst

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R}{\partial 7} &= - \frac{2 e}{h^2 \sin 7} [x_Q \cos \sigma_{DA} + y_Q \sin \sigma_{DA}] \\
 &\quad - \frac{2 c \cot 7}{h^2} [x_Q \cos \sigma_{AQ} + y_Q \sin \sigma_{AQ}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2c}{h^2} [x_Q \sin \sigma_{AQ} - y_Q \cos \sigma_{AQ}] \\
 & = -\frac{2e}{h^2 \sin 7} [x_Q \cos \sigma_{DA} + y_Q \sin \sigma_{DA}] \\
 & -\frac{2c}{h^2 \sin 7} [x_Q \cos (\sigma_{AQ} - 7) + y_Q \sin (\sigma_{AQ} - 7)];
 \end{aligned}$$

setzt man hierin

$$c = e \cos (2 + 6) + QC \cdot \cos AQC,$$

$$\sigma_{DA} = (\sigma_{AQ} - 7) - (2 + 6) - 180^\circ, \text{ so wird}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R}{\partial 7} &= \frac{2}{h^2 \sin 7} [x_Q \{e \sin (2 + 6) \sin (\sigma_{AQ} - 7) \\
 & \quad - QC \cdot \cos AQC \cdot \cos (\sigma_{AQ} - 7)\}
 \end{aligned}$$

$$+ y_Q \{-e \sin (2 + 6) \cos (\sigma_{AQ} - 7) - QC \cdot \cos AQC \cdot \sin (\sigma_{AQ} - 7)\}]$$

und mit $e \sin (2 + 6) = QC \sin AQC$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R}{\partial 7} &= -\frac{2 QC}{h^2 \sin 7} [x_Q \cos (\sigma_{AQ} + \sphericalangle AQC - \sphericalangle 7) \\
 & \quad + y_Q \sin (\sigma_{AQ} + \sphericalangle AQC - \sphericalangle 7)] \\
 &= -\frac{2 QC}{h^2 \sin 7} [x_Q \cos (\sigma_{QC} - 7) + y_Q \sin (\sigma_{QC} - 7)] \\
 &= -\frac{2 QC \cdot QP}{h^2 \sin 7} \cos (\sigma_{QC} - 7 - \sigma_{QP}) \\
 &= -\frac{2 QC \cdot \sin 7 \cdot QP_{-7}}{h^2 \sin^2 7} = \frac{4 \Delta QCP_{-7}}{h^2 \sin^2 7}. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Eine ähnliche Entwicklung liefert

$$\frac{\partial R}{\partial 8} = \frac{4 \Delta QCP_{+8}}{h^2 \sin^2 8}, \quad (8)$$

wobei P_{+8} als Projektion von P auf die Richtung $QC + \sphericalangle 8$ aufzufassen ist.

Etwas umständlicher gestaltet sich die Berechnung der Ableitungen $\frac{\partial R}{\partial 10}$ und $\frac{\partial R}{\partial 11}$. Es ist nach Ordnung der Glieder

$$\frac{\partial R}{\partial 10} = \frac{2 og}{h^3 \sin 10} (o + k \cos \sigma_{FD} + f \cos \sigma_{DA} + c \cos \sigma_{AQ})$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2kg}{h^3 \sin 10} [k + o \cos \sigma_{FD} + f \cos (\sigma_{DA} - \sigma_{FD}) + c \cos (\sigma_{AQ} - \sigma_{FD})] \\
 & + \frac{2fct12}{h^2} [f + o \cos \sigma_{DA} + k \cos (\sigma_{DA} - \sigma_{FD}) + c \cos (\sigma_{AQ} - \sigma_{DA})] \\
 & + \frac{2cct12}{h^2} [c + o \cos \sigma_{AQ} + k \cos (\sigma_{AQ} - \sigma_{FD}) + f \cos (\sigma_{AQ} - \sigma_{DA})] \\
 & + \frac{2f}{h^2} [o \sin \sigma_{DA} + k \sin (\sigma_{DA} - \sigma_{FD})] \\
 & \quad + \frac{2c}{h^2} [o \sin \sigma_{AQ} + k \sin (\sigma_{AQ} - \sigma_{FD})] \\
 & = \frac{2og}{h^3 \sin 10} x_Q + \frac{2kg}{h^3 \sin 10} [x_Q \cos \sigma_{FD} + y_Q \sin \sigma_{FD}] \\
 & + \frac{2fct12}{h^2} [x_Q \cos \sigma_{DA} + y_Q \sin \sigma_{DA}] \\
 & \quad + \frac{2cct12}{h^2} [x_Q \cos \sigma_{AQ} + y_Q \sin \sigma_{AQ}] \\
 & + \frac{2f}{h^2} [x_Q \sin \sigma_{DA} - y_Q \cos \sigma_{DA}] + \frac{2c}{h^2} [x_Q \sin \sigma_{AQ} - y_Q \cos \sigma_{AQ}] \\
 & = \frac{2g}{h^3 \sin 10} x_Q [o + k \cos \sigma_{FD}] + \frac{2g}{h^3 \sin 10} y_Q [k \sin \sigma_{FD}] \\
 & + \frac{2ct12}{h^2} [x_Q \{f \cos \sigma_{DA} + c \cos \sigma_{AQ}\} + y_Q \{f \sin \sigma_{DA} + c \sin \sigma_{AQ}\}] \\
 & + \frac{2}{h^2} [x_Q \{f \sin \sigma_{DA} + c \sin \sigma_{AQ}\} - y_Q \{f \cos \sigma_{DA} + c \cos \sigma_{AQ}\}]
 \end{aligned}$$

und nach Einführung der Strecke QD durch

$$\begin{aligned}
 o + k \cos \sigma_{FD} &= x_Q - DQ \cos \sigma_{DQ} \\
 k \sin \sigma_{FD} &= y_Q - DQ \sin \sigma_{DQ} \\
 f \cos \sigma_{DA} + c \cos \sigma_{AQ} &= DQ \cos \sigma_{DQ} \\
 f \sin \sigma_{DA} + c \sin \sigma_{AQ} &= DQ \sin \sigma_{DQ}
 \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R}{\partial 10} &= \frac{2g}{h^3 \sin 10} [x_Q^2 + y_Q^2] - \frac{2g \cdot DQ}{h^3 \sin 10} [x_Q \cos \sigma_{DQ} + y_Q \sin \sigma_{DQ}] \\
 & + \frac{2ct12 \cdot DQ}{h^2} [x_Q \cos \sigma_{DQ} + y_Q \sin \sigma_{DQ}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2 \cdot DQ}{h^2} [x_Q \sin \sigma_{DQ} - y_Q \cos \sigma_{DQ}] \\
 = & \frac{2 L^2}{h^2 \sin 10} \cdot \frac{g}{h} - \frac{2 DQ}{h^2 \sin 10} x_Q [\cos \sigma_{DQ} \cos 10 - \sin \sigma_{DQ} \sin 10] \\
 & - \frac{2 DQ}{h^2 \sin 10} y_Q [\sin \sigma_{DQ} \cos 10 + \cos \sigma_{DQ} \sin 10]
 \end{aligned}$$

oder mit $x_Q = PQ \cos \sigma_{PQ}$, $y_Q = PQ \sin \sigma_{PQ}$ schließlich

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R}{\partial 10} &= \frac{2 L^2}{h^2 \sin 10} \cdot \frac{g}{h} - \frac{2 DQ \cdot PQ}{h^2 \sin 10} [\cos \sigma_{PQ} \cos (\sigma_{DQ} + 10) \\
 & \quad + \sin \sigma_{PQ} \sin (\sigma_{DQ} + 10)] \\
 &= \frac{2 L^2}{h^2 \sin 10} \cdot \frac{g}{h} - \frac{2 DQ \cdot PQ}{h^2 \sin 10} \cos (\sigma_{DQ} + 10 - \sigma_{QP}) \\
 &= \frac{2 L^2}{h^2 \sin 10} \cdot \frac{g}{h} - \frac{4 \Delta QDP_{+10}}{h^2 \sin^2 10}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Für die weiteren Differentialquotienten ergeben sich die Werte:

$$\frac{\partial R}{\partial 13} = \frac{2 L^2}{h^2 \sin 11} \cdot \frac{i}{k} + \frac{4 \Delta QDP_{-11}}{h^2 \sin^2 11} \tag{11}$$

mit Q_{-11} als Projektion von Q auf die Richtung $PD - \sphericalangle 11$;

$$\frac{\partial R}{\partial 12} = - \frac{4 \Delta PEQ_{-13}}{h^2 \sin^2 13}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial R}{\partial 14} = - \frac{4 \Delta PEQ_{+14}}{h^2 \sin^2 14}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial R}{\partial 16} = - \frac{4 \Delta PFQ_{+16}}{h^2 \sin^2 16}, \tag{16}$$

$$\frac{\partial R}{\partial 17} = - \frac{4 \Delta PFQ_{-17}}{h^2 \sin^2 17}, \tag{17}$$

und für die Winkel des letzten Dreieckes

$$\frac{\partial R}{\partial 19} = - \frac{4 \Delta PGQ_{-19}}{h^2 \sin^2 19}, \tag{19}$$

$$\frac{\partial R}{\partial 20} = - \frac{4 \Delta PGQ_{+20}}{h^2 \sin^2 20}. \tag{20}$$

Das Vorzeichen der Dreiecksfläche bestimmt sich aus der Umfahrungsrichtung gemäß der obigen Schreibweise.

Für eine Dreieckskette, welche aus gleichseitigen Dreiecken besteht, wird die Berechnung obiger Differentialquotienten

an Hand einer Zeichnung sehr einfach; man erhält für die Seitenlänge 1:

$$\begin{aligned} dh = & \frac{1}{4} dL + \frac{1}{2\sqrt{3}} (d1 + d20) + \frac{1}{4\sqrt{3}} (d2 + d19) \\ & + \frac{1}{4\sqrt{3}} (d4 + d17) - \frac{1}{4\sqrt{3}} (d5 + d16) + \frac{\sqrt{3}}{4} (d7 + d14) \\ & + \cdot (d8 + d13) - \frac{\sqrt{3}}{2} (d10 + d11). \end{aligned}$$

Die Kette, welche in der Abbildung dargestellt ist, ergibt unter Benützung der eingezeichneten Dreiecke

QBP_{-1} , $QPB_{+2} \dots$ für $PQ = 8 \text{ km}$:

$$\begin{aligned} dh \text{ cm} = & 0.30 dL \text{ cm} + 0.52 d1'' + 0.42 d2'' - 0.02 d4'' - 0.31 d5'' \\ & + 0.95 d7'' + 0.49 d8'' - 1.17 d10'' + 0.23 d20'' \\ & + 0.20 d19'' + 0.15 d17'' - 0.20 d16'' + 0.60 d14'' \\ & + 0.23 d13'' - 1.03 d11''; \end{aligned}$$

ähnlich folgt für eine kreisbogenförmig gekrümmte Kette — Durchmesser $PQ = 8 \text{ km}$ —, welche aus vier gleichseitigen und drei gleichschenkligen Dreiecken zusammengesetzt ist:

$$\begin{aligned} dh \text{ cm} = & 0.61 dL \text{ cm} + 0.39 (d1'' + d20'') + 1.03 (d2'' + d19'') \\ & - 0.39 (d4'' + d17'') - 1.27 (d5'' + d16'') \\ & + 1.99 (d7'' + d14'') + 1.46 (d8'' + d13'') \\ & - 2.07 (d10'' + d11''). \end{aligned}$$

In allen diesen Fällen tritt die besondere Bedeutung der in der Kettenmitte liegenden Dreiecke hervor.

Will man Aufschluß bekommen über den Einfluß einer besseren Gewichtsverteilung, so setze man

$$\begin{aligned} dh = & f_0 dL + f_1 d1 + f_2 d2 + f_4 d4 + f_5 d5 + f_7 d7 + f_8 d8 \\ & + f_{10} d10 + f_{11} d11 + \dots \end{aligned}$$

und da die Uebertragungsgleichungen alle die gleiche Form

$$\begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} f \\ p \end{bmatrix} = 0$$

aufweisen, werden die Funktionen

$$F_1 = f_1 + r_1 = \frac{p_1}{C_1} \{f_1 (p_2 + p_3) - f_2 p_3\},$$

$$F_2 = f_2 + r_1 = \frac{p_1}{C_1} \{-f_1 p_3 + f_2 (p_1 + p_3)\},$$

$$F_3 = \quad r_1 = -\frac{p_3}{C_1} \{f_1 p_2 + f_2 p_1\}$$

mit $C_1 = p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3$ —

und demnach der Anteil des ersten Dreieckes an dem mittleren Fehler in h , wenn m den mittleren Fehler der Gewichtseinheit bezeichnet:

$$\Delta_1^2 = \left(\frac{m}{\varrho}\right)^2 \left\{ \frac{F_1^2}{p_1} + \frac{F_2^2}{p_2} + \frac{F_3^2}{p_3} \right\} = \left(\frac{m}{\varrho}\right)^2 \frac{p_1 f_2^2 + p_2 f_1^2 + (f_2 - f_1)^2 p_3}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3}$$

Den Kleinstwert der Funktion

$$U = \frac{p_1 a^2 + p_2 b^2 + p_3 c^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3}$$

bei unveränderlicher Summe $p_1 + p_2 + p_3 = q_1$ geben die Werte

$$p_1 = \frac{2 bc \sin \alpha + \sqrt{3}(-a^2 + b^2 + c^2)}{6 bc \sin \alpha + \sqrt{3}(a^2 + b^2 + c^2)} \cdot q_1,$$

$$p_2 = \frac{2 ac \sin \beta + \sqrt{3}(a^2 - b^2 + c^2)}{6 ac \sin \beta + \sqrt{3}(a^2 + b^2 + c^2)} \cdot q_1,$$

$$p_3 = \frac{2 ab \sin \gamma + \sqrt{3}(a^2 + b^2 - c^2)}{6 ab \sin \gamma + \sqrt{3}(a^2 + b^2 + c^2)} \cdot q_1,$$

wobei etwaige komplexe Wurzeln, denen eine praktische Bedeutung nicht zukommt, bereits ausgeschieden sind, insofern als a, b, c den Seiten eines konstruierbaren Dreieckes entsprechen müssen, dessen Winkel dann gleich α, β, γ sind.

Da nun in unserem Falle die dritte Größe $(f_2 - f_1)$ den Unterschied der beiden anderen darstellt, werden α, β, γ gleich 0° bzw. 180° und es verbleibt

$$p_1 : p_2 : p_3 = f_1 (f_1 - f_2) : f_2 (f_2 - f_1) : f_1 f_2$$

und das zugehörige Δ_1^2 wäre theoretisch

$$\Delta_1^2_{\min} = \frac{m^2}{\varrho^2 q_1} (f_1^2 + f_2^2 - f_1 f_2),$$

welches sich jedoch nicht verwirklichen läßt, weil ein p -Wert negativ ist. Im Falle das erste Dreieck der Kette gleichseitig ist, werden — wie oben angegeben —

$$f_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad f_2 = \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

und $p_1 : p_2 : p_3 = 2 : -1 : 2;$

setzt man $p_2 = 0$, dann folgt

$$\Delta_1^2 = \frac{m^2}{\varrho^2} \left\{ \frac{f_2^2}{p_3} + \frac{(f_2 - f_1)^2}{p_1} \right\}$$

und mit $p_1 = \frac{f_1 - f_2}{f_1} q_1$, $p_3 = \frac{f_2}{f_1} \cdot q_1$ ergibt sich der praktisch mögliche Wert

$$\Delta_1^2_{\min} = \frac{m^2}{\varrho^2} \cdot \frac{f_1^2}{q_1}.$$

Wir teilen den einzelnen Dreiecken der abgebildeten Kette die Gewichte $q_1, q_2 \dots q_7$ zu und erhalten aus den früher angeführten f -Werten der Reihe nach:

$$1. \quad f_1 = 0.52, f_2 = 0.42 : p_1 = q_1 \cdot \frac{f_1 - f_2}{f_1} = 0.19 q_1, p_2 = 0,$$

$$p_3 = q_1 \cdot \frac{f_2}{f_1} = 0.81 q_1,$$

$$\Delta_1^2_{\min} = \frac{m^2}{q_1} \cdot 0.52^2;$$

$$2. \quad f_4 = -0.02, f_5 = -0.31 : p_4 = 0, p_5 = q_2 \cdot \frac{f_5 - f_4}{f_5} = 0.93 q_2,$$

$$p_6 = q_2 \cdot \frac{f_4}{f_5} = 0.07 q_2,$$

$$\Delta_2^2_{\min} = \frac{m^2}{q_2} \cdot 0.31^2;$$

$$3. \quad f_7 = 0.95, f_8 = 0.49 : p_7 = q_3 \cdot \frac{f_7 - f_8}{f_7} = 0.48 q_3, p_8 = 0,$$

$$p_9 = q_3 \cdot \frac{f_8}{f_7} = 0.52 q_3,$$

$$\Delta_3^2_{\min} = \frac{m^2}{q_3} \cdot 0.95^2;$$

$$4. \quad f_{10} = -1.17, f_{11} = -1.03 : p_{10} = q_4 \cdot \frac{f_{10} - f_{11}}{f_{10}} = 0.12 q_4,$$

$$p_{11} = 0, p_{12} = q_4 \cdot \frac{f_{11}}{f_{10}} = 0.88 q_4,$$

$$A_4^2 \min = \frac{m^{2''}}{q_4} \cdot 1.17^2;$$

$$5. \quad f_{13} = 0.23, \quad f_{14} = 0.60 : p_{13} = 0, \quad p_{14} = q_5 \cdot \frac{f_{14} - f_{13}}{f_{14}} = 0.62 q_5,$$

$$p_{15} = q_5 \cdot \frac{f_{13}}{f_{14}} = 0.38 q_5,$$

$$A_5^2 \min = \frac{m^{2''}}{q_5} \cdot 0.60^2;$$

$$6. \quad f_{16} = -0.20, \quad f_{17} = +0.15 : p_{16} = q_6 \cdot \frac{f_{16}}{f_{16} - f_{17}} = 0.57 q_6,$$

$$p_{17} = q_6 \cdot \frac{-f_{17}}{f_{16} - f_{17}} = 0.43 q_6, \quad p_{18} = 0,$$

$$A_6^2 \min = \frac{m^{2''}}{q_6} \cdot 0.35^2;$$

$$7. \quad f_{19} = 0.20, \quad f_{20} = 0.23 : p_{19} = 0, \quad p_{20} = q_7 \cdot \frac{f_{20} - f_{19}}{f_{20}} = 0.13 q_7,$$

$$p_{21} = q_7 \cdot \frac{f_{19}}{f_{20}} = 0.87 q_7,$$

$$A_7^2 \min = \frac{m^{2''}}{q_7} \cdot 0.23^2.$$

Faßt man alles zusammen, so lautet der Ausdruck für den mittleren Fehler in der Seite h :

$$M_h^2 = 0.09 m_L^2 + m^{2''} \left(\frac{0.52^2}{q_1} + \frac{0.31^2}{q_2} + \frac{0.95^2}{q_3} + \frac{1.17^2}{q_4} + \frac{0.60^2}{q_5} + \frac{0.35^2}{q_6} + \frac{0.23^2}{q_7} \right);$$

seinen Kleinstwert erreicht M_h^2 bei Voraussetzung der unveränderlichen Gewichtssumme

$$q_1 + q_2 + \dots + q_6 + q_7 = P$$

wegen $0.52 + 0.31 + 0.95 + 1.17 + 0.60 + 0.35 + 0.23 = 4.13$

für $q_1 = \frac{0.52}{4.13} P$, $q_2 = \frac{0.31}{4.13} P$, $q_7 = \frac{0.23}{4.13} P$. Somit hätten

wir bei $P = 84$:

$$q_1 = 11; \quad p_1 = 2, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = 9;$$

$$q_2 = 6; \quad p_4 = 0, \quad p_5 = 5, \quad p_6 = 1;$$

$$q_3 = 19; \quad p_7 = 10, \quad p_8 = 0, \quad p_9 = 9;$$

$$\begin{aligned} q_4 &= 24; & p_{10} &= 3, & p_{11} &= 0, & p_{12} &= 21; \\ q_5 &= 12; & p_{13} &= 0, & p_{14} &= 7, & p_{15} &= 5; \\ q_6 &= 7; & p_{16} &= 4, & p_{17} &= 3, & p_{18} &= 0; \\ q_7 &= 5; & p_{19} &= 0, & p_{20} &= 1, & p_{21} &= 4 \end{aligned}$$

und M_h^2 selbst für $m_L = \pm 20$ cm, $m'' = \pm 10''$:

$$M_h^2 = 0.09 \ m_L^2 + \frac{m''^2}{P} \cdot 4.13^2 = (36 + 20.3) \text{ cm}^2$$

$$M_h = \pm 7.5 \text{ cm.}$$

Den Hauptanteil ($\frac{2}{3}$) der ganzen Beobachtungsarbeit beanspruchen die drei Mitteldreiecke. Die Genauigkeit in h , welche aus der gleichmäßigen Gewichtsverteilung hervorgeht

$$M_h^2 = (36 + 43.9) \text{ cm}^2,$$

hätte man in Hinsicht auf das Verhältnis $\frac{20.3}{43.9}$ schon mit 40

Beobachtungen oder rund $\frac{P}{2}$ erreichen können.

II.

Die im ersten Abschnitt behandelte Frage nach der genauesten Bestimmung einer in der Kettenmitte liegenden Seite wird praktisch kaum eine besondere Bedeutung haben; sie gibt aber die Grundlagen für die Untersuchung nach der besten Gewichtsverteilung, wenn ein in der Kettenmitte liegender Dreieckspunkt — etwa D — mit dem geringsten Lagenfehler festgehalten werden soll.

Läßt sich der Punktfehler in allgemeiner Form darstellen, dann gewährt er gleichzeitig einen Einblick in die Querverschiebung, bzw. Durchbiegung einer solchen Kette, bietet die Möglichkeit des Vergleichs mit der Biegung eines Streckenzuges und gibt wertvolle Anhaltspunkte für die Auswahl des geeigneten Instrumentes und für das Ausmaß der erforderlichen Beobachtungsarbeit.

Bezieht man die Koordinaten x , y des Endpunktes Q , wie das im vorhergehenden geschah, auf PF als Richtung der positiven x -Achse, so wird

$$\operatorname{tg} \sigma_{PQ} = \frac{y}{x} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \sigma_{PQ} = \frac{\eta}{\xi},$$

wenn mit x, y die gegebenen — auf P als Nullpunkt umgerechneten — Koordinaten von Q und mit ϱ_{PQ} der zugehörige wahre Südwinkel von PQ bezeichnet wird:

Der Verdrehungswinkel zwischen den beiden Achsen-
systemen $\psi = \varrho - \sigma$

bestimmt sich in üblicher Weise aus

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\operatorname{tg} \varrho - \operatorname{tg} \sigma}{1 + \operatorname{tg} \varrho \operatorname{tg} \sigma} = \frac{xy - yx}{xx + yy}$$

und mit $PQ = L$ wird weiter

$$\cos \psi = \frac{xx + yy}{L^2}, \quad \sin \psi = \frac{xy - yx}{L^2}.$$

Die vorläufigen Koordinaten des fraglichen Punktes D , welche sich also auf die PF -Richtung beziehen, kann man anschreiben:

$$x_D = (o' + k' \cos \sigma_{FD}) \frac{L}{L'}, \quad y_D = k' \sin \sigma_{FD} \cdot \frac{L}{L'};$$

daher lauten die endgültigen Koordinaten von D

$$x_D = x_D \cos \psi - y_D \sin \psi, \quad y_D = y_D \cos \psi + x_D \sin \psi$$

und nach Einsetzung obiger Größen

$$x_D = \frac{1}{L'^2} \{x R_1 + y R_2\}, \quad y_D = \frac{1}{L'^2} \{y R_1 - x R_2\}.$$

(Schluß folgt.)

Bericht über die Grundbuchvermessung in der Gemeinde Grabs nach optischem Verfahren.

In den Monaten Juli/August 1925 wurden mit einer Meß-
ausrüstung, bestehend aus Universaltheodolit Wild mit Distanz-
messer dazu, die Aufnahmen für die Grundbuchvermessung
eines Gebietes von zirka 200 ha der Gemeinde Grabs (Kt.
St. Gallen) gemacht. Die vertraglich geforderte Genauigkeit
weist das Gebiet in die Instruktion III der eidgenössischen
Grundbuchvermessung. Die Resultate lassen aber Schlüsse
ziehen, daß sich der Theodolit mit Distanzmesser auch sehr
gut für Instruktion II eignet. Das vermessene Gebiet befindet
sich am Staudnerberg, südlich des Dorfes Grabs, in einer Höhen-
lage von 500—1200 m. Das Terrain hat eine durchschnittliche
Neigung von 35 % und ist auf drei Seiten von Wald eingefaßt.