

|                     |  |
|---------------------|--|
| <b>Zeitschrift:</b> | Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières |
| <b>Herausgeber:</b> | Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres  |
| <b>Band:</b>        | 23 (1925)  |
| <b>Heft:</b>        | 7  |
| <b>Artikel:</b>     | Du choix d'un système de projection  |
| <b>Autor:</b>       | Ansermet, A.   |
| <b>DOI:</b>         | <a href="https://doi.org/10.5169/seals-189036">https://doi.org/10.5169/seals-189036</a>  |

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 29.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

SCHWEIZERISCHE  
**Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik**  
 ORGAN DES SCHWEIZ. GEOMETERVEREINS  
**REVUE TECHNIQUE SUISSE DES MENSURATIONS ET AMÉLIORATIONS FONCIÈRES**  
 ORGANE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES GÉOMÈTRES

Redaktion: F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)

Ständiger Mitarbeiter für Kulturtechnik: H. FLUCK, Dipl. Kulturingenieur, Neuchâtel, 9, Passage Pierre qui roule. — Collaborateur attitré pour la partie en langue française: CH. ROESGEN, ingénieur-géomètre, Genève, 11, rue de l'Hôtel-de-Ville — Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats.

Expedition, Inseraten- und Abonnements-Annahme:   
 BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR VORM. G. BINKERT, WINTERTHUR

Jährlich 12 Nummern  
 (erscheinend am zweiten Dienstag  
 jeden Monats)  
 und 12 Inseraten-Bulletins  
 (erscheinend am vierten Dienstag  
 jeden Monats)

**No. 7**  
 des **XXIII. Jahrganges** der  
 „Schweiz. Geometerzeitung“.  
 14. Juli 1925

Jahresabonnement Fr. 12.—  
 (unentgeltlich für Mitglieder)  
 Ausland Fr. 15.—

Inserate:  
 50 Cts. per 1spaltige Nonp.-Zeile

### Du choix d'un système de projection.

On entend par projection en géodésie une correspondance telle qu'à chaque point du sphéroïde terrestre corresponde un point unique et bien déterminé de la mensuration. En d'autres termes si  $\varphi$  et  $\lambda$  définissent les coordonnées géographiques

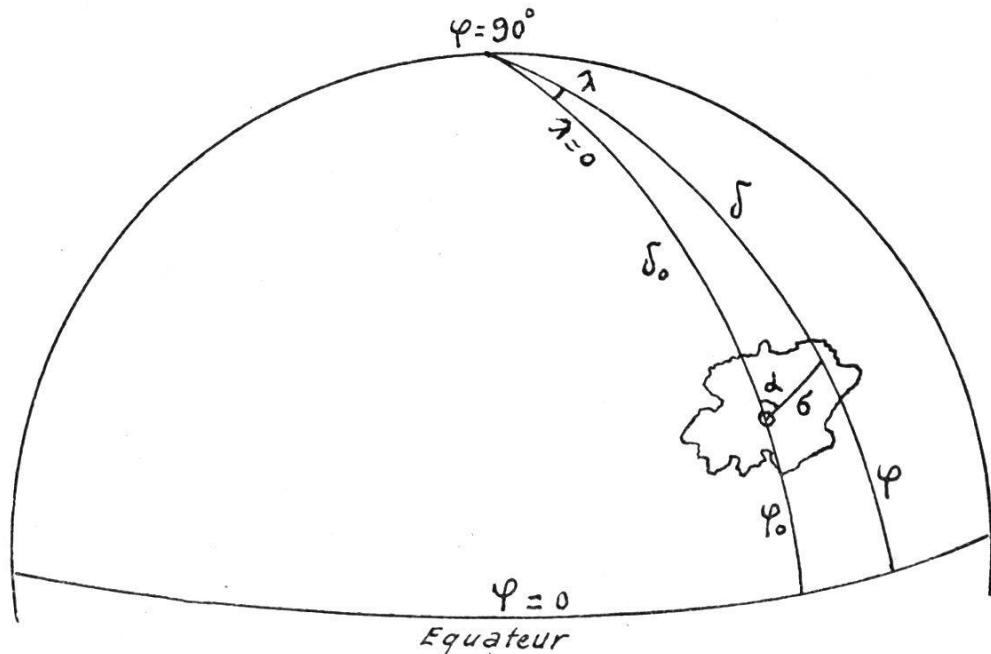


Figure 1.

(Fig. 1)  $x$  et  $y$  les coordonnées planes, à chaque couple de valeurs  $(\varphi, \lambda)$  correspond un couple unique  $(x, y)$  et réciproquement.

Ces coordonnées seront donc liées entre elles par certaines relations dites « formules de transformation de coordonnées ».

Il résulte immédiatement de cette définition qu'il y a une infinité de systèmes de projections; tous ont ceci de commun qu'ils *déforment* l'image du sphéroïde terrestre. C'est donc par l'étude de ces déformations qu'il convient de commencer.

### *Calcul de la déformation d'un triangle.*

Nous admettons tout d'abord, ce qui simplifie beaucoup le problème, que les coordonnées sont conformes; de plus pour un premier calcul nous négligerons l'aplatissement en posant le rayon de la sphère égal à l'unité. Les coordonnées ( $x, y$ ) seront alors de petites quantités assimilables à des accroissements ce qui permet de développer en séries par rapport à ( $x, y$ ) toutes les formules de la projection; les termes en  $x$  et  $y$  seront dits du « 1<sup>er</sup> ordre » et ainsi de suite. Il y aura donc lieu de distinguer les déformations de 1<sup>er</sup>, 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup> ordre, etc....; cette notion d'ordre des déformations joue un rôle capital. Disons d'emblée que les déformations de 1<sup>er</sup> ordre s'éliminent sans difficulté (voir J. Frischauf, Beiträge zur Landesaufnahme, Teubner, p. 113—116).

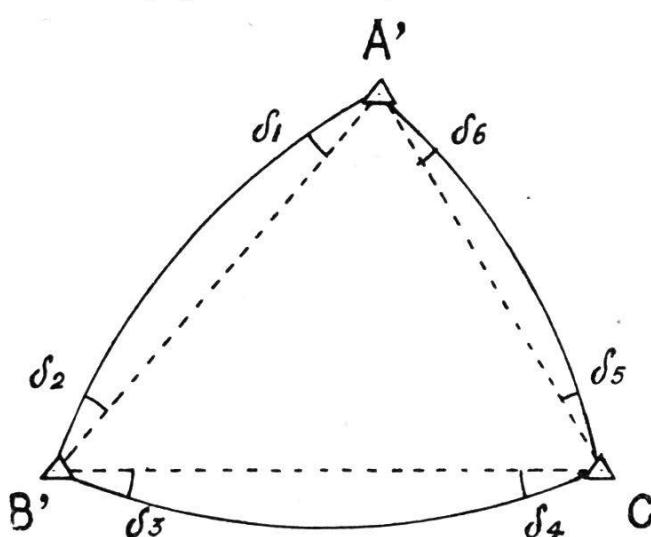


Figure 2.

Soit A' B' C' la projection d'un triangle géodésique (Fig. 2). Il s'agit de calculer l'allongement des côtés et les angles  $\delta_1 \delta_2 \dots \delta_6$  dont la somme est égale à l'excès sphérique; en général il suffira de calculer la longueur des cordes A' B', B' C', C' A' lesquelles ne diffèrent des arcs respectifs que

de petites quantités de 4<sup>e</sup> ordre.

Le coefficient de déformation linéaire  $m$  s'exprimera donc par la série:

$$m = 1 + \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + (T_3) + \dots$$

où  $(T_3)$  est le groupe des termes du 3<sup>e</sup> ordre;  $\gamma$  est en général nul à moins que la projection ne soit pas symétrique par

rapport au méridien central. En fin les termes en  $x$  et  $y$  ont été éliminés en définissant la projection par les séries:

$$\begin{cases} x = \Delta\varphi + \frac{\lambda^2}{2} \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + (T_3) + \dots \\ y = \lambda \cdot \cos \varphi_0 - \lambda \cdot \Delta\varphi \sin \varphi_0 + (T_3) + \dots \end{cases}$$

où  $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$  ( $\varphi_0$  = latitude de l'origine).

La condition ci-dessus énoncée est nécessaire et suffisante pour que la projection soit exempte de déformations de 1<sup>er</sup> ordre (Frischauf, Beiträge..., p. 113—117).

Il reste donc:

$$m = 1 + \alpha x^2 + \beta y^2 + (T_3) + \dots$$

$\alpha$  et  $\beta$  étant liés par la relation fondamentale:

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2}$$

les cas particuliers:  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\alpha = \beta = \frac{1}{4}$  se rapportant

aux projections géométriques classiques. Notons en passant que le système de projection dépend uniquement des termes de 3<sup>e</sup> ordre lesquels seront au nombre de quatre ou de deux suivant que l'image du méridien ne sera pas ou sera un axe de symétrie; dans ce dernier cas un seul paramètre ( $\alpha$  ou  $\beta$ ) suffira à définir la projection.

Si nous revenons à la série qui exprime  $m$  nous constatons qu'elle définit pour chaque valeur de  $m$  un faisceau d'ellipses circonscrit à un carré. La Figure 3 se rapporte à la valeur:

$$(m - 1) = 11 \text{ centimètres par kilomètre.}$$

L'ellipse tracée sur cette figure a pour équation:

$$m = 1 + 0,37 x^2 + 0,13 y^2 + \dots = 1,000 11$$

L'application de cette ellipse à la mensuration de la Suisse sera exposée plus loin.

Nous sommes maintenant en mesure de calculer un côté  $P_1 P_2$  de la triangulation (Fig. 4) en montrant que la formule connue:

$$\log s - \log S = \frac{1}{6} (\log m_1 + 4 \log m_0 + \log m_2)$$

est générale:

$$S - s = - \int_{P_1}^{P_2} (\alpha x^2 + \beta y^2) ds = - \alpha \int_{P_1}^{P_2} x^2 \frac{dx}{\cos z} - \beta \int_{P_1}^{P_2} y^2 \frac{dy}{\sin z}$$

où  $z$  désigne l'azimut de  $P_1 P_2$  et  $(S - s)$  l'allongement et en négligeant les termes de 3<sup>e</sup> ordre.

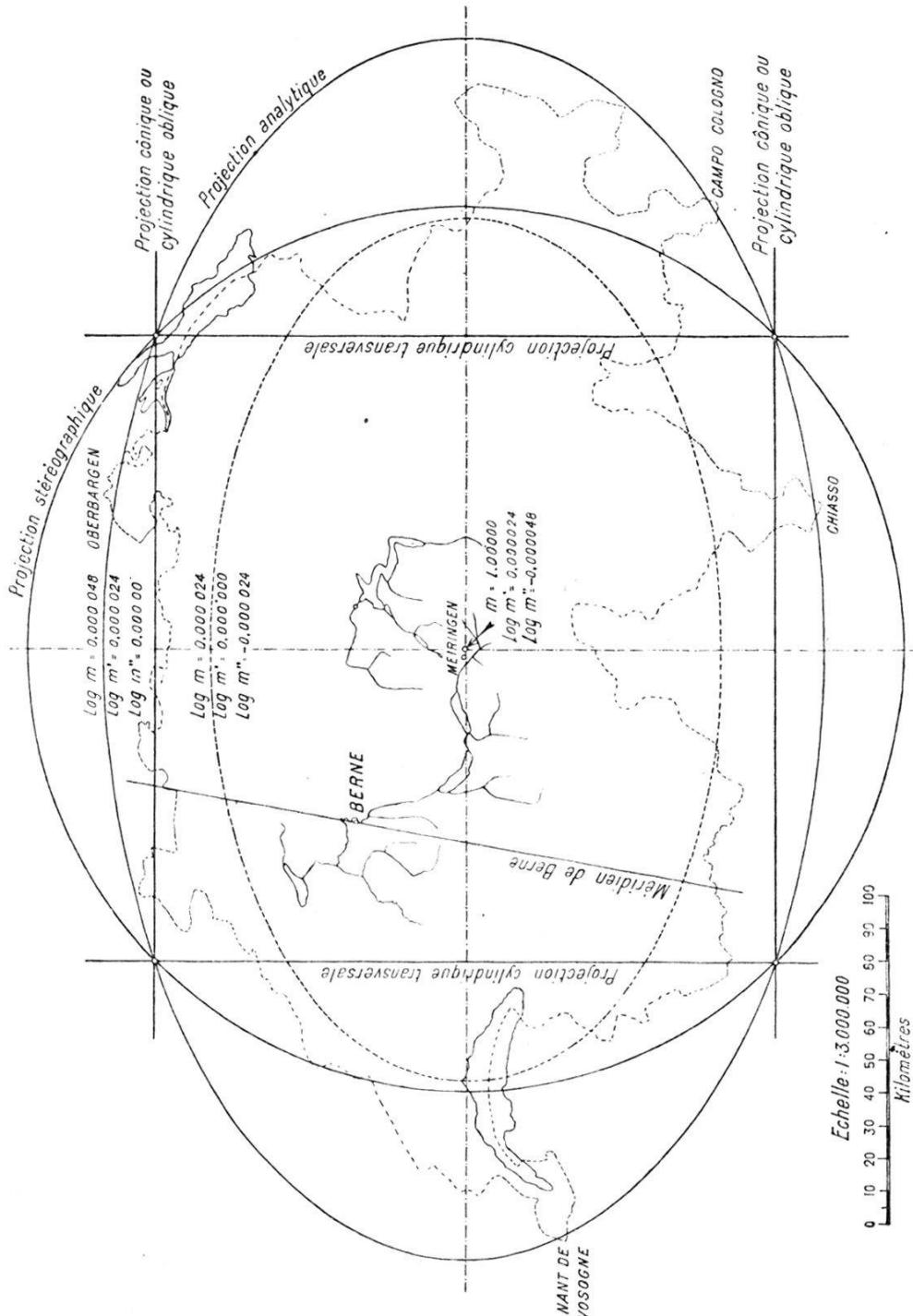


Figure 3.

Graphique des déformations (origine Meiringen).

(Pour  $m-1 = 11$  cm par km,  $\log m = 0.000048$ .

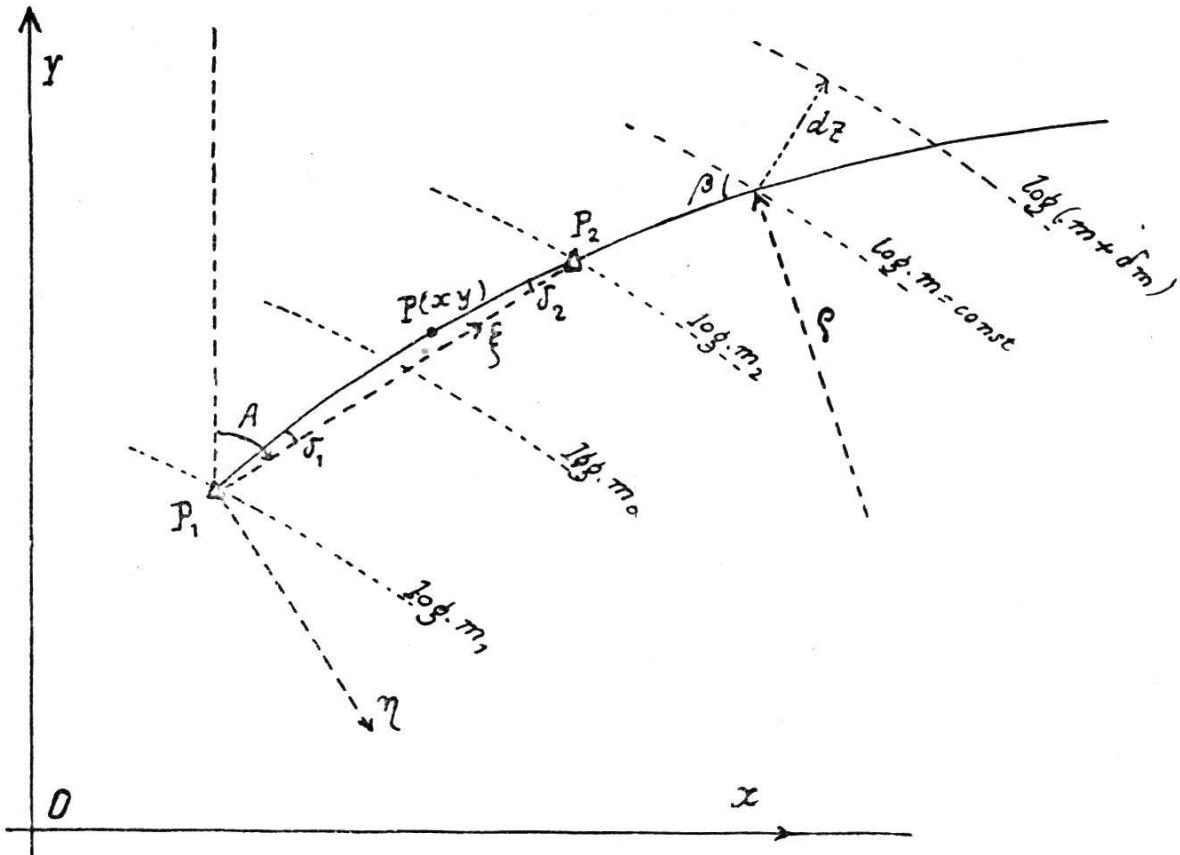


Figure 4.

L'intégration donne en introduisant le point  $P_0 (x_0 \ y_0)$  situé au milieu de  $P_1P_2$ :

$$S = s - \frac{\alpha}{3 \cos z} (x_2^3 - x_1^3) - \frac{\beta}{3 \sin z} (y_2^3 - y_1^3) + \dots$$

et en introduisant  $x_0 = \frac{1}{2} (x_1 + x_2)$   $y_0 = \frac{1}{2} (y_1 + y_2)$

$$\begin{aligned} m_1 &= 1 + \alpha x_1^2 + \beta y_1^2 + \dots & m_0 &= 1 + \alpha x_0^2 + \beta y_0^2 + \dots \\ && m_2 &= 1 + \alpha x_2^2 + \beta y_2^2 + \dots \end{aligned}$$

$$\frac{S}{s} = 1 - \frac{1}{6} [(\alpha x_1^2 + \beta y_1^2) + 4 (\alpha x_0^2 + \beta y_0^2) + (\alpha x_2^2 + \beta y_2^2)]$$

ou sous la forme logarithmique

$$\log s - \log S = \frac{\mu}{6} [(\alpha x_1^2 + \beta y_1^2) + \dots]$$

$$\log s - \log S = \frac{1}{6} (\log m_1 + 4 \log m_0 + \log m_2)$$

Cette formule est donc bien générale.

*Réduction d'azimut:* le calcul de cette réduction est plus compliqué car  $\delta_1 \ \delta_2 \dots \ \delta_6$  dépendent de 4 variables. Nous suiv-

rons la même méthode que le Prof. Jordan (Handbuch der Vermessungskunde III, p. 298), mais en la généralisant:

Exprimons tout d'abord la courbure du côté  $P_1P_2$ :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\delta \log m}{\delta y} \sin A - \frac{\delta \log m}{\delta x} \cos A = 2 \beta y \sin A - 2 \alpha x \cos A$$

où  $A$  désigne l'azimut (Ch. M. Schols; Annales de Delft, 1886, II, p. 180—206)

$$\delta_1 + \delta_2 = \int_{P_1}^{P_2} (\beta' y \sin A - \alpha' x \cos A) ds$$

où  $\beta' = 2 \beta$        $\alpha' = 2 \alpha$

d'autre part en négligeant  $1 : \left[ 1 + \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} - 1$  il vient:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2\eta}{d\xi^2}$$

$$x = x_1 + \xi \sin A \quad y = y_1 + \xi \cos A$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \beta' y_1 \sin A - \alpha' x_1 \cos A + (\beta' - \alpha') \xi \sin A \cos A$$

soit la forme  $A_1 + B_1 \xi$

et en intégrant:  $\delta_1 = \frac{A_1 s}{2} + B_1 \frac{s^2}{6} \quad \delta_2 = \frac{A_1 s}{2} + B_1 \frac{s^2}{3}$  soit:

$$\delta_1 = \frac{s}{6} (3 \beta' y_1 \sin A - 3 \alpha' x_1 \cos A + (\beta' - \alpha') s \cdot \sin A \cos A) + \dots$$

$$\delta_2 = \frac{s}{6} (3 \beta' y_1 \sin A - 3 \alpha' x_1 \cos A + 2 (\beta' - \alpha') s \cdot \sin A \cos A) + \dots$$

où  $P_1P_2 = s$ .

Ces formules sont générales pour les projections conformes.

Pour les coordonnées non conformes l'expression de la courbure des côtés de triangulation est beaucoup plus compliquée; il convient de faire exception pour le système Bonne pour lequel on obtient:

$$1 : \rho = y \sin^3 A - x \cos^3 A.$$

(Schols, Ann. Delft, p. 206.)

*Application à la Suisse.* Les deux tableaux ci-après permettent de se rendre compte de la déformation d'un côté de triangulation; dans le 1<sup>er</sup> tableau nous avons admis un côté de 1 kilomètre orienté de manière à rendre, dans chaque cas, maximum la valeur ( $\delta_1 + \delta_2$ ); la projection est dite « analy-

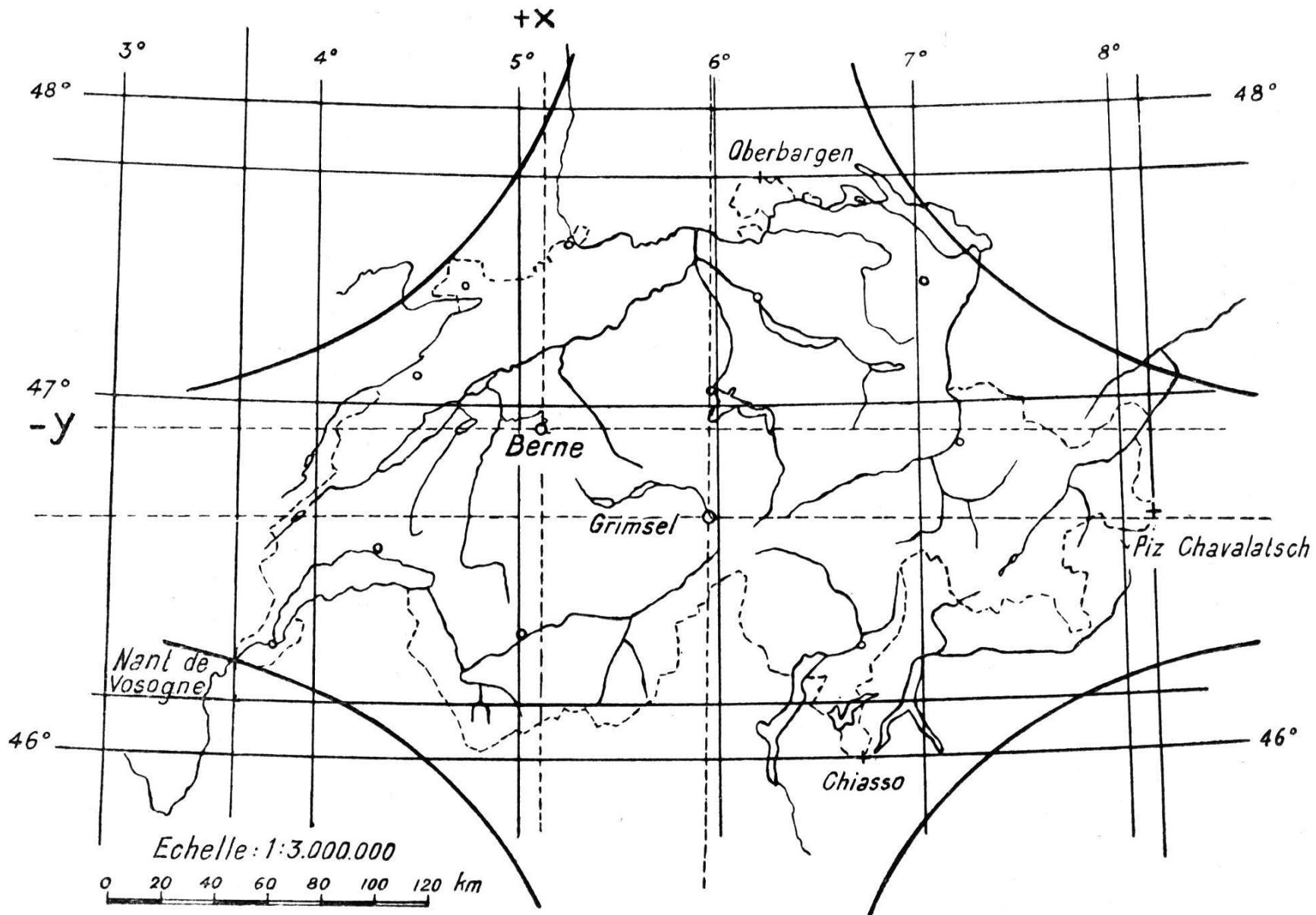


Figure 5.

Hyperbole des déformation constante.  
Système Bonue (origine au Grimsel).

tique » lors qu'elle est définie par des formules non interprétables géométriquement (par exemple:  $\alpha = 0,37$ ;  $\beta = 0,13$ ).

| Projections  | Origine | $(\delta_1 + \delta_2) \max$<br>$S = 1 \text{ km}$ | Lieu        | Origine        | $(\delta_1 + \delta_2) \max$<br>$S = 1 \text{ km}$ | Lieu         |
|--|---------|--|-------------|----------------|--|--------------|
| Conique ou axe oblique                             | Berne   | 0'',64   | Chiasso     | Schinberg      | 0'',56   | Chiasso      |
| Cylindre Gauß                                      | id.     | 1'',20   | Chavalatsch | id.            | 0'',89   | Chavalatsch  |
| Azimutale conforme                                 | id.     | 0'',60   | id.         | Finsteraarhorn | 0'',46   | Martinsbruck |
| Analytique ( $\alpha = 0,37$ ;<br>$\beta = 0,13$ ) | id.     | —  | —           | Meiringen      | 0'',40   | Chiasso      |
| Bonne  | id.     | 1'',20   | Chavalatsch | Grimsel        | 0'',89   | Chavalatsch  |

La supériorité de la projection analytique ( $m = 1 + 0,37 x^2 + 0,13 y^2$ ) ressort clairement de ce tableau; le système Bonne même dans l'hypothèse la plus favorable (origine au Grimsel; Fig. 5) donne lieu à de fortes déformations; les hyperboles de la Fig. 5 correspondent aux déformations:

±49'' sexag. pour les angles,  
±14 centimètres par kilomètre.

La projection de Bonne est à tous les points de vue peu recommandable pour la géodésie.

| Côtés de triangulation         | Proj. Bonne<br>( $\delta_1 + \delta_2$ ) | Proj. stéréo-<br>graphique<br>( $\delta_1 + \delta_2$ ) | Proj. à axe<br>oblique<br>( $\delta_1 + \delta_2$ ) | Observations      |
|--------------------------------|--|---|---|-------------------|
| Feldberg—Lägern . . . . —      | —  | 12'' (sexag)  | 12''  | Ces calculs ont   |
| Feldberg—Hohentwil . . . —     | —  | 17''  | 30''  | été faits avec    |
| Colombier—Trélod . . . . —     | —  | 17''  | 19''  | un canevas gra-   |
| Ghiridione—Menone . . . . 18'' | 9''                                      | 18''  | —   | phique au         |
| Hundstock—Six Madun . . 16''   | 8''                                      | 0''   | —   | 1 : 1 600 000.    |
| Gäbris—Pfänder . . . . —       | 3''                                      | 6''   | —   | Les résultats     |
| Lägern—Hohentwil . . . . —     | 1''                                      | 11''  | —   | les plus intéres- |
| Dôle—Trélod . . . . . 42''     | 21''                                     | 0''   | —   | sants sont seuls  |
| Dôle—Rochers de Naye . 21''    | 10''                                     | 21''  | —   | indiqués.         |
| Muttler—Pitz Daint . . . 33''  | 17''                                     | —   | —   |                   |
| Schwarzhorn—Pitz Bernina 36''  | 18''                                     | —   | —   |                   |

#### Projection du sphéroïde sur la sphère de même courbure moyenne.

Jusqu'à présent nous avons négligé l'aplatissement du sphéroïde ou plutôt nous avons admis l'ellipsoïde terrestre projeté au préalable sur une sphère; on détermine en général le rayon de cette sphère de manière que les deux surfaces aient à l'origine même courbure moyenne. Cette condition est néces-

saire et suffisante pour éliminer les termes de 2<sup>e</sup> ordre dans les séries qui expriment la déformation et la réduction d'azimut (Darboux G., Bulletin des Sciences mathématiques, 1911, p. 58—64).

C'est dans cette propriété fondamentale que réside l'intérêt de la projection du sphéroïde sur la sphère. En particulier on peut appliquer l'une sur l'autre ces deux surfaces sans provoquer une « déchirure » de plus de 1 centimètre à 184 kilomètres de l'origine.

La déformation linéaire  $m'$  sera donc de 3<sup>e</sup> ordre:

$$m' = 1 + C_1 \Delta\varphi^3 + C_2 \Delta\varphi^2 \cdot \lambda + C_3 \Delta\varphi \lambda^2 + C_4 \cdot \lambda^3 + \dots$$

Gauss a préconisé le cas particulier où les coefficients  $C_2 C_3 C_4$  sont nuls; cette solution est particulièrement favorable pour un pays allongé suivant un parallèle;  $m'$  est en général négligeable. Il n'en est pas toujours de même pour la réduction

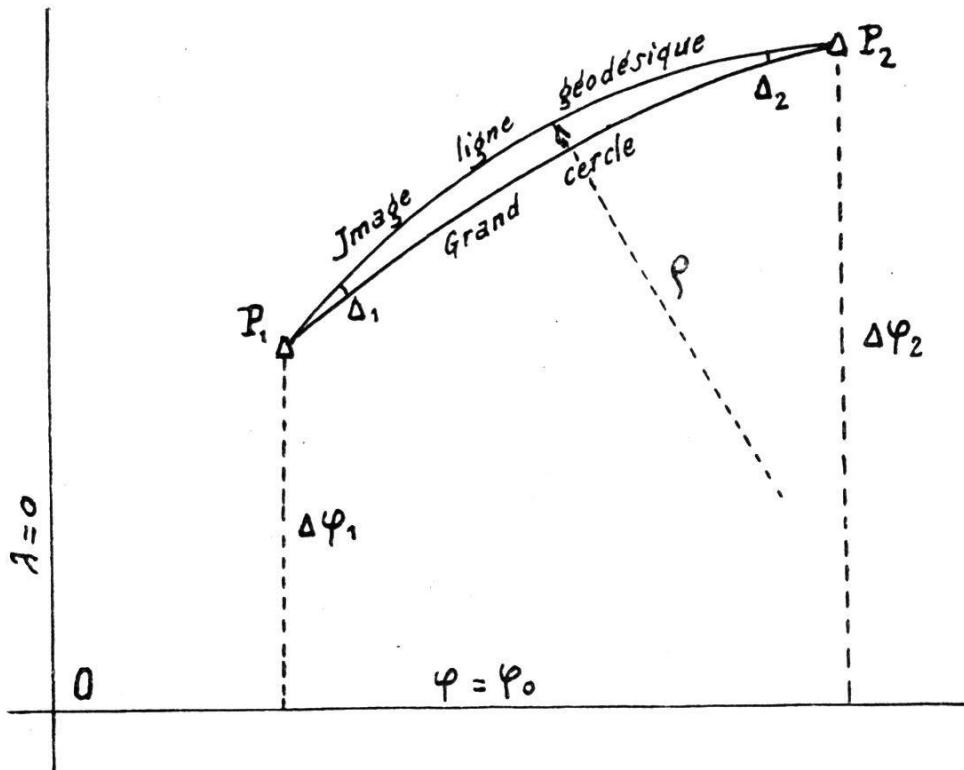


Figure 6.

d'azimut. Soient  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  (Fig. 6) les corrections d'azimut. Ici encore appliquons les formules du Prof. Jordan (Handbuch..., III, p. 574).

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2 \eta^2 \cdot q^2}{V^2 A} \cdot \operatorname{tg} Q \cdot \sin \beta = \frac{2 \eta^2 \cdot \Delta\varphi^2}{V^2 A} \cdot \operatorname{tg} \varphi_0 \sin \varphi$$

où  $\beta$  désigne l'azimut de  $P_1P_2$

$$c = a : \sqrt{1 - e^2} \quad \eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi \quad V^2 = 1 + \eta^2 \\ N = c : V \quad A = N : V$$

$$\Delta_1 + \Delta_2 = \int_{P_1}^{P_2} \left[ \frac{2 \eta^2 \Delta\varphi^2}{V^2 A} \operatorname{tg} \varphi_0 \sin \beta \right] ds \cong \frac{2 \eta^2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_0}{V^2 A} \int_{P_1}^{P_2} \Delta\varphi^2 dx$$

$$\Delta_1 + \Delta_2 = K \cdot (\text{M.S.})$$

$K = \text{const.}$  M.S = Moment statique du trapèze de bases  
 $\Delta\varphi_1$  et  $\Delta\varphi_2$ .

Pour la Suisse  $\Delta_1 + \Delta_2 = \text{M.S.} : 93\,000\,000$ .

M.S étant exprimé en  $\text{km}^3$ .

Le calcul se fera par voie graphique; pour quelques côtés de 1<sup>er</sup> ordre de la triangulation fédérale on obtient:

| Désignation des côtés      | $\Delta_1 + \Delta_2$ |
|----------------------------|-----------------------|
| Feldberg-Lägern . . . .    | 0." 00 11             |
| Feldberg—Hohentwil . . . . | 0.00 31               |
| Colombier—Trélod . . . .   | 0.00 29               |
| Trélod—Colleney . . . .    | 0.00 36               |
| Ghiridione—Menone . . . .  | 0.00 18               |
| Ghiridione—Wasenhorn . .   | 0.00 18               |
| Mont Gelé—Dufourspitze .   | 0.00 31               |

En général la courbure d'un côté de triangulation en projection conforme s'exprime par

$$\frac{d \log m}{dz}$$

$dz$  étant mesuré normalement au côté du triangle; cette courbure sera donc nulle pour les côtés perpendiculaires aux lignes d'égale déformation.

*Choix du système de projection et choix de l'origine.*

Nous sommes en mesure maintenant, basés sur la théorie des déformations de rechercher l'origine et le système de coordonnées les plus favorables. Le mathématicien russe Tchebycheff a énoncé le beau théorème (voir Bulletin des Sciences mathématiques 1911, p. 23):

*De toutes les projections conformes, la plus rationnelle est celle pour laquelle la déformation est constante sur toute la périphérie du pays à représenter.*

C'est ce que l'on s'efforce de réaliser par la plus petite ellipse circonscrite à cette périphérie. (A suivre.)

A. Ansermet.

## Ueber den Einfluß der Refraktion auf die tachymetrische Distanzmessung.

Von Grundbuchgeometer *Alfred Aregger*.

Es ist allgemein bekannt, daß bei der tachymetrischen Distanzmessung mit vertikaler Latte gewisse Fehlereinflüsse dadurch verursacht werden, daß die untere Ziellinie einer andern Refraktion unterworfen ist als die obere. Der Unterschied dieser beiden Refraktionen, welche als Differential-Refraktion bezeichnet wird, ist veränderlich und zwar nach einer größeren Zahl von Faktoren, deren wichtigster bei praktischen Messungen nicht bestimmt werden kann.

Zweck dieser Abhandlung soll sein, die hauptsächlichsten Fehlerquellen zu nennen und auch deren Größe annähernd zu bestimmen und schließlich, darauf gestützt, Folgerungen und Regeln für die praktischen Arbeiten zu ziehen.

In der „Deutschen Zeitschrift für Vermessungswesen“, Heft Nr. 18 vom 21. Juni 1911, leitet Prof. Dr. Eggert eine genaue Tachymeter-Formel ab und gibt auch die Resultate von Versuchsmessungen an. Jene wissenschaftliche Abhandlung nehmen wir als Grundlage für unsere Betrachtungen.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

- D = die auf den Horizont reduzierte Distanz, welche wir um die Additionskonstante c des Instrumentes verkleinert denken.
- l = das zwischen den Distanzlinien der Strichplatte (Fadenkreuz) abgelesene Lattenstück.
- k = die tachymetrische Multiplikationskonstante, wobei zu beachten ist, daß dieselbe mathematisch genau durch den Quotient aus dem gemessenen Abstande der Distanzlinien und der ebenfalls genau bestimmten Brennweite des Objektives gebildet wird.
- $\alpha$  = Neigung gegen den Horizont der Mitellinie beider Zielungen.
- B = Barometerstand der Arbeitsstelle.