Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 23 (1925)

Heft: 4

Artikel: Compensation simplifiée d'une station observée d'après la "méthode des secteurs" [suite et fin]

Autor: Baeschlin, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-189027

SCHWEIZERISCHE
Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik
ORGAN DES SCHWEIZ. GEOMETERVEREINS
REVUE TECHNIQUE SUISSE DES MENSURATIONS ET AMÉLIORATIONS FONCIÈRES
ORGANE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES GÉOMÈTRES

Redaktion: F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)

Ständiger Mitarbeiter für Kulturtechnik: H. FLUCK, Dipl. Kulturingenieur, Neuchâtel, 9, Passage Pierre qui roule. — Collaborateur attitré pour la partie en langue française: CH. ROESGEN, ingénieur-géomètre, Genève, 11, rue de l'Hôtel-de-Ville — Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats.

Expedition, Inseraten- und Abonnements-Annahme:
BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR VORM. G. BINKERT, WINTERTHUR

Jährlich 12 Nummern (erscheinend am zweiten Dienstag jeden Monats) und 12 Inseraten-Bulletins (erscheinend am vierten Dienstag jeden Monats)	**No. 4** des **XXIII. Jahrganges** der „Schweiz. Geometerzeitung". **14. April 1925**	Jahresabonnement Fr. 12.— (unentgeltlich für Mitglieder) Inserate: 50 Cts. per 1spaltige Nonp.-Zeile

Compensation simplifiée d'une station observée d'après la «Méthode des secteurs».

Par *F. Baeschlin*, Professeur de géodésie à l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich.

(Suite et fin.)

Après avoir fixé la valeur de k_0, nous trouvons d'après la première équation de (II')

$$x_0 = \frac{[p_x l_x]}{[p_x]} + \frac{4 R - \left\{\frac{[p_x l_x]}{[p_x]} + \frac{[p_y l_y]}{[p_y]} + \frac{[p_z l_z]}{[p_z]}\right\}}{[p_x] \left\{\frac{1}{[p_x]} + \frac{1}{[p_y]} + \frac{1}{[p_z]}\right\}} \qquad (V)$$

$\frac{[p_x l_x]}{[p_x]}$ représente la moyenne arithmétique générale de toutes les valeurs qui peuvent être obtenues pour le secteur A B; désignons cette moyenne par L_x

$$\frac{[p_x l_x]}{[p_x]} = L_x; \quad L_x \text{ a le poids } [p_x], \text{ représenté par } P_x;$$

$$P_x = [p_x], \; P_y = [p_y], \; P_z = [p_z].$$

D'une manière analogue:

$$\frac{[p_y l_y]}{[p_y]} = L_y; \; \frac{[p_z l_z]}{[p_z]} = L_z.$$

L_y a le poids $[p_y]$, L_z a le poids $[p_z]$.

Posons en outre:

$$\frac{1}{[p_x]} + \frac{1}{[p_y]} + \frac{1}{[p_z]} = \frac{1}{P}$$

Nous remarquons dès lors que P, représente le poids de la somme des valeurs des secteurs $L_x + L_y + L_z$.

$$P \equiv \frac{1}{\frac{1}{[p_x]} + \frac{1}{[p_y]} + \frac{1}{[p_z]}}$$

Par ces abréviations nous obtenons de (V)

$$x_0 = L_x + \frac{4\,R - (L_x + L_y + L_z)}{P_x \cdot \frac{1}{P}}$$

$L_x + L_y + L_z - 4\,R$ représente la différence de la somme des valeurs combinées des secteurs à 4 R; désignons la par W

$$W = L_x + L_y + L_z - 4\,R.$$

Nous obtenons ainsi la formule finale

$$x_0 = L_x - W \frac{\frac{1}{P_x}}{\left(\frac{1}{P_x} + \frac{1}{P_y} + \frac{1}{P_z}\right)} \qquad (VI^x)$$

Par analogie, nous obtenons:

$$y_0 = L_y - W \frac{\frac{1}{p_y}}{\left(\frac{1}{P_x} + \frac{1}{P_y} + \frac{1}{P_x}\right)} \qquad (VI^y)$$

$$z_0 = L_z - W \frac{\frac{1}{P_z}}{\left(\frac{1}{P_x} + \frac{1}{P_y} + \frac{1}{P_z}\right)} \qquad (VI^z)$$

De ceci nous déduison le théorème:

*L'excédent à 4 droits de la somme des valeurs moyennes des secteurs sera **réparti** entre eux proportionnellement aux valeurs réciproques des poids de chacun d'entre eux.*

Pour la compensation des angles intermédiaires nous retournons aux équations (2'), (3') et (4'); nous en formons la somme et nous obtenons:

$$\text{(VII)}\quad \begin{aligned} & x_1^{I} + x_1^{II} + x_1^{III} + k_{x_1}\left\{\frac{1}{p_{x_1}{}^{I}} + \frac{1}{p_{x_1}{}^{II}} + \frac{1}{p_{x_1}{}^{III}}\right\} \\ & \qquad - \left\{l_{x_1}{}^{I} + l_{x_1}{}^{II} + l_{x_1}{}^{III}\right\} = 0. \end{aligned}$$

Mais $\dfrac{1}{p_{x_1}{}^{I}} + \dfrac{1}{p_{x_1}{}^{II}} + \dfrac{1}{p_{x_1}{}^{III}}$ représente le poids réciproque de la somme $x_1^{I} + x_1^{II} + x_1^{III}$ que nous avons désigné par p_{x_1}. Nous avons d'autre part désigné $l_{x_1}{}^{I} + l_{x_1}{}^{II} + l_{x_1}{}^{III}$ par l'abréviation $[l_{x_1}]$.

En outre, d'après l'équation c, n° 18

$$x_1^{I} + x_1^{II} + x_1^{III} = x_0.$$

Si nous tenons compte de ces relations nous obtenons de l'équation (VIII):

$$\text{(VIII)}\qquad k_{x_1} = \frac{-\,x_0 - [l_{x_1}]}{\dfrac{1}{p_{x_1}}}$$

Posons cette valeur pour k_{x_1} dans l'équation (2'); nous obtenons:

$$x_1^{I} = l_{x_1}{}^{I} + (x_0 - [l_{x_1}])\,\frac{\dfrac{1}{p_{x_1}{}^{I}}}{\left[\dfrac{1}{p_{x_1}}\right]} \qquad \text{(IX')}$$

Par analogie, les équations (3') et (4') nous donnent:

$$x_1^{II} = l_{x_1}{}^{II} + (x_0 - [l_{x_1}])\,\frac{\dfrac{1}{p_{x_1}{}^{II}}}{\left[\dfrac{1}{p_{x_1}}\right]} \qquad \text{(IX'')}$$

$$x_1^{III} = l_{x_1}{}^{III} + (x_0 - [l_{x_1}])\,\frac{\dfrac{1}{p_{x_1}{}^{III}}}{\left[\dfrac{1}{p_{x_1}}\right]} \qquad \text{(IX''')}$$

$x_0 - [l_{x_1}]$ représente la différence entre la valeur compensée du secteur A B et celle formée par la somme $l_{x_1}{}^{I} + l_{x_1}{}^{II} + l_{x_1}{}^{III}$. Ceci nous conduit au théorème: *La différence entre la valeur* *compensée du secteur A B et la somme d'une série d'angles intermédiaires est à répartir entre ceux-ci proportionnellement aux réciproques de leurs poids respectifs.*

Pour toutes les autres sommes d'angles intermédiaires de ce secteur et, par analogie, des autres secteurs, on procèdera d'une manière identique, ce même théorème restant valable.

Nous avons donc démontré que l'application formelle de la méthode des moindres carrés conduit exactement à la méthode de compensation prescrite dans les «formulaires modèles» et utilisée par M. Zoelly dans son exemple du Piz Michel.

Quant au calcul des poids des angles compensés, on établira le système des équations des poids suivant Helmert (Ausgleichsberechnung pag. 264). La résolution de ces systèmes d'équations des poids est absolument identique à la résolution des équations normales; on obtient de cette manière les coefficients des poids et ensuite les poids des angles compensés. Un calcul explicite prendrait beaucoup de place et ne présente pas de difficultés particulières; nous nous contentons donc d'en indiquer les formules finales.

Si nous désignons les poids des angles compensés par G, en y ajoutant les mêmes indices que nous avons employés pour les poids p des angles observés, nous obtenons:

$$\frac{1}{G_{x_0}} = \frac{1}{P_x} - \frac{P}{P_x{}^2}; \quad \frac{1}{G_{y_0}} = \frac{1}{P_y} - \frac{P}{P_y{}^2}; \quad \frac{1}{G_{x_0}} = \frac{1}{P_z} - \frac{P}{P_z{}^2} \qquad (A)$$

Ici encore, comme dans la page 20

$$P_x = [p_x]; \; P_y = [p_y]; \; P_z = [p_z],$$

alors que
$$P = \frac{1}{\dfrac{1}{[p_x]} + \dfrac{1}{[p_y]} + \dfrac{1}{[p_z]}}$$

Le poids d'un angle intermédiaire compensé sera donc:

$$\frac{1}{G_{x_n}{}^{(m)}} = \frac{1}{p_{x_n}{}^{(m)}} - \frac{p_{x_n}}{(p_{x_n}{}^{(m)})^2}\left(1 - \frac{p_{x_n}}{G_{x_0}}\right) \qquad (B)$$

p_{x_n} représente ici le poids de la somme de tous les angles, qui avec $x_n{}^{(m)}$, celui-ci inclusivement, forment l'angle de secteur.

Il est facile à démontrer que la formule

$$\frac{1}{G_{x_0}} = \frac{1}{P_x} - \frac{P}{P_x{}^2} \qquad (A')$$

est identique à la formule suivante

$$G_{x_0} = P_x + \cfrac{1}{\cfrac{1}{P_y} + \cfrac{1}{P_z}} \qquad (C')$$

D'après (A′) on a:

$$\frac{1}{G_{x_0}} = \frac{1}{P_x}\left(1 - \frac{P}{P_x}\right) \text{ donc}$$

$$G_{x_0} = P_x \frac{1}{1 - \cfrac{P}{P_x}} = P_x \left(1 + \frac{P}{P_x}\,\frac{1}{1 - \cfrac{P}{P_x}}\right)$$

posant $1 = 1 - \dfrac{P}{P_x} + \dfrac{P}{P_x}$

$$G_{x_0} = P_x + \frac{P}{1 - \cfrac{P}{P_x}} = P_x + \cfrac{1}{\cfrac{1}{P} - \cfrac{1}{P_x}}$$

Mais puisque $\dfrac{1}{P} = \dfrac{1}{P_x} + \dfrac{1}{P_y} + \dfrac{1}{P_z}$

on trouve que $\dfrac{1}{P} - \dfrac{1}{P_x} = \dfrac{1}{P_y} + \dfrac{1}{P_z}$

ce qui démontre l'exactitude de la formule (C′). On déduit de celle-ci le théorème suivant:

Le poids d'un secteur compensé est égal à la somme du poids de la mesure directe et des poids résultant de la combinaison des angles intermédiaires, augmentée du poids résultant de l'amélioration de ce secteur après la fermeture à 4 droits.

Nous obtenons un théorème analogue de la formule (B) qui se laisse aussi écrire dans la forme suivante:

$$G_{x_n}{}^{(m)} = p_{x_n}{}^{(m)} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{G_{x_0} - p_{x_n}} + \left(\cfrac{1}{p_{x_n}{}^{II}} + \cfrac{1}{p_{x_n}{}^{III}}\right)} \qquad (D).$$

Nous renonçons à la déduction de la formule, déduction très simple et identique à la précédente.

La formule (D) nous conduit au théorème:

Le poids d'un angle intermédiaire compensé est égal au poids du même angle observé augmenté d'une valeur qu'on peut considérer comme le poids de la différence de deux angles ayant les poids respectifs:

a) *poids du secteur (compensé) diminué du poids de la somme des angles intermédiaires, dans laquelle est compris l'angle en question;*

b) *poids de la somme des angles intermédiaires de la série correspondante sans l'angle en question.*

Il est facile après ce théorème d'effectuer le calcul des poids pour le cas de directions principales secondaires.

Dans l'exemple du Piz Michel les poids de tous les angles compensés ont été établis de cette manière. (Comparez tableau IV.)

La détermination des poids des angles qui n'ont pas été observés directement est un peu plus compliquée; la solution en est cependant relativement simple, si l'on se base sur la résolution du problème: déterminer les poids des fonctions des inconnues dans le cas d'une compensation médiate avec équations de condition entre les inconnues. Nous ne traiterons pas cette question.

Nous voudrions cependant parler en passant d'une seconde manière de déterminer l'erreur moyenne de l'unité de poids.

M. Zoelly, dans son calcul des erreurs s'est basé sur la valeur de chaque angle. Nous pouvons cependant baser ce calcul sur la moyenne de toutes les observations du même angle; ceci de la manière suivante:

Formons les différences entre la valeur définitive de l'angle compensé et la moyenne arithmétique de toutes les observations directes du même angle. Représentons ces différences par V; l'apport à la somme des carrés des améliorations correspondant à l'unité de poids sera pvv. Formons ainsi pour chaque angle observé directement la somme [pvv].

L'erreur moyenne de l'unité de poids, par conséquent, d'une seule observation sera

$$m = \sqrt{\frac{[pvv]}{d-n}} \text{ où:}$$

d = le nombre des différents angles observés directement,
n = le nombre des angles nécessaires.

Dans le tableau IV les V sont formés et les produits pvv récapitulés:

(Voir tableau IV, page 80.)

Nous avons: $[pvv] = 8{,}5970$; $d = 20$; $n = 11$.

Nous avons donc:

$$m_m = \sqrt{\frac{8{,}5970}{9}} = \sqrt{0{,}9552} = \pm\, 0{,}''977.$$

Avec cette valeur nous avons porté dans le tableau IV les erreurs moyennes des angles compensés dans la colonne m_g.

M. Zoelly, avec la méthode qu'il employa dans son calcul, trouva l'erreur moyenne de l'unité de poids

$$m_e = \sqrt{\frac{140.7}{102}} = \pm 1.''17.$$

On peut en outre considérer que les V sont presque exempts d'erreurs provenant de la division du cercle; les observations ont été effectuées plusieurs fois dans différentes positions du limbe et si l'on tient compte de la méthode employée, la méthode de réitération, on peut prétendre que les erreurs de division du cercle sont presque totalement éliminées.

On peut dès lors calculer l'influence de l'erreur de division du cercle pour chaque angle observé

$$\sqrt{m_e{}^2 - m_m{}^2} = t_w.$$

Nous trouvons pour la station Piz Michel:

$$t_w = \sqrt{1.38 - 0.96} = \pm \sqrt{0.42} = \pm\, 0.''65$$

t_w représente l'influence de l'erreur de division pour un angle. Nous obtenons ensuite l'erreur moyenne d'un double diamètre: (comme dans l'exemple, les lectures ayant été faites sur chaque microscope à gauche et à droite).

$$t_d = \frac{t_w}{\sqrt{2}} = \pm\, 0.''46.$$

Tableau IV.

Calcul de l'erreur moyenne de l'unité de poids pour la station Piz Michel par la méthode des moyennes.

Poids des angles avant et après la compensation.

Angles	Poids de l'angle observé	V	pvv	Poids de l'angle compensé	mg
		$''$			$\pm\ ''$
Bernina-Tambohorn . .	6	+0.22	0.2904	15.0	0.252
Tambohorn-Beverin . .	8	+0.09	0.0648	13.0	0.271
Beverin-Schwarzhorn . .	4	+0.51	1.0404	12.6	0.275
Schwarzhorn-Bernina . .	8	+0.06	0.0288	14.2	0.260
Bernina-Bondasca . . .	11	—0.05	0.0275	16.2	0.243
Bondasca-Tambohorn . .	12	—0.05	0.0300	17.0	0.237
Tambohorn-Piz Curvèr .	3	+0.01	0.0003	5.4	0.421
Piz Curvèr-Beverin . . .	3	±0.00	0.0000	5.4	0.421
Beverin-Stätzerhorn . .	2	+0.29	0.1682	5.0	0.436
Stätzerhorn-Calanda . .	4	+0.14	0.0784	5.7	0.411
Beverin-Calanda	8	—0.24	0.4608	13.8	0.263
Calanda-Rothorn	4	+0.51	1.0404	8.5	0.346
Rothorn-Schwarzhorn. .	7	+0.29	0.5887	10.0	0.309
Calanda-Mattlishorn . .	5	—0.34	0.5780	8.6	0.333
Mattlishorn-Schwarzhorn	5	—0.33	0.5445	8.6	0.333
Calanda-Schwarzhorn . .	6	—0.27	0.4374	15.2	0.251
Piz Kesch-Bernina . . .	4	—0.34	0.4624	9.5	0.317
Piz Kesch-Languard . .	4	—0.88	1.3456	6.6	0.380
Languard-Bernina . . .	4	—0.59	1.3924	6.6	0.380
Schwarzhorn-Piz Kesch .	5	+0.06	0.0180	8.9	0.328
		[pvv] =	8.5970		

Cette valeur t_d doit correspondre assez exactement à l'erreur de division du théodolite employé (Hildebrand n⁰ 13218).

Comme conclusion de ce qui précède, nous pouvons dire que le calcul de l'erreur moyenne de l'unité de poids d'après les deux méthodes fournit des renseignements précieux sur l'exactitude des observations des angles; nous ne saurions trop en recommander l'emploi. La valeur à considérer comme valeur déterminante est m_m d'après mon opinion.