SCHWEIZERISCHE
Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik
ORGAN DES SCHWEIZ. GEOMETERVEREINS
REVUE TECHNIQUE SUISSE DES MENSURATIONS ET AMÉLIORATIONS FONCIÈRES
ORGANE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES GÉOMÈTRES

Redaktion: F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)
Ständiger Mitarbeiter für Kulturtechnik: H. FLUCK, Dipl. Kulturingenieur, Neuchâtel, 9, Passage Pierre qui roule. — Collaborateur attitré pour la partie en langue française: CH. ROESGEN, ingénieur-géomètre, Genève, 11, rue de l'Hôtel-de-Ville — Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats.

Expedition, Inseraten- und Abonnements-Annahme:
BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR VORM. G. BINKERT, WINTERTHUR

Jährlich 12 Nummern (erscheinend am zweiten Dienstag jeden Monats) und 12 Inseraten-Bulletins (erscheinend am vierten Dienstag jeden Monats)	No. 3 des **XXIII. Jahrganges** der „Schweiz. Geometerzeitung". **10. März 1925**	Jahresabonnement Fr. 12.— (unentgeltlich für Mitglieder) Inserate: 50 Cts. per 1spaltige Nonp.-Zeile

Compensation simplifiée d'une station observée d'après la « Méthode des secteurs ».

Par *F. Bæschlin*, Professeur de géodésie à l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich.

Comme suite à l'article de M. H. Zölly, Ingénieur, Chef de la Section de géodésie du Service topographique fédéral, « La méthode des secteurs en triangulation » nous nous proposons de prouver que le système de compensation employé dans l'exemple traité est rigoureusement conforme à la méthode des moindres carrés.

Ce procédé est absolument identique à celui qui est employé et prescrit dans les « Exemples modèles pour la triangulation de IVe ordre. »

La « Méthode des secteurs » est basée sur le principe suivant: un certain nombre de directions principales (d'après les prescriptions suisses, trois ou quatre) sont choisies; les angles formés par deux directions principales consécutives (angles de secteurs) sont mesurés directement; l'addition de ces angles de secteurs formera le tour d'horizon à quatre droits. Les directions intermédiaires (directions secondaires) sont rattachées aux directions principales de manière à ce que la somme des angles observés forme l'angle de secteur; une direction intermédiaire n'entrera qu'une fois dans une telle somme. Un angle secondaire ne sera en aucun cas formé par deux directions situées dans deux secteurs différents.

Les « Exemples modèles » permettent en outre le choix de directions principales secondaires ; dans ce cas, il est essentiel qu'aucun angle subordonné n'empiète sur un secteur principal secondaire.

Nous voyons dans la figure 1 la manière de répartir les angles lorsqu'une direction principale secondaire a été adoptée. On reconnaît dans l'exemple du Piz Michel que les directions Calanda et Piz Kesch sont des directions principales secondaires.

Le mode de compensation simplifié est si clairement visible dans l'exemple choisi par M. Zölly, qu'il est superflu d'entrer dans plus de détails.

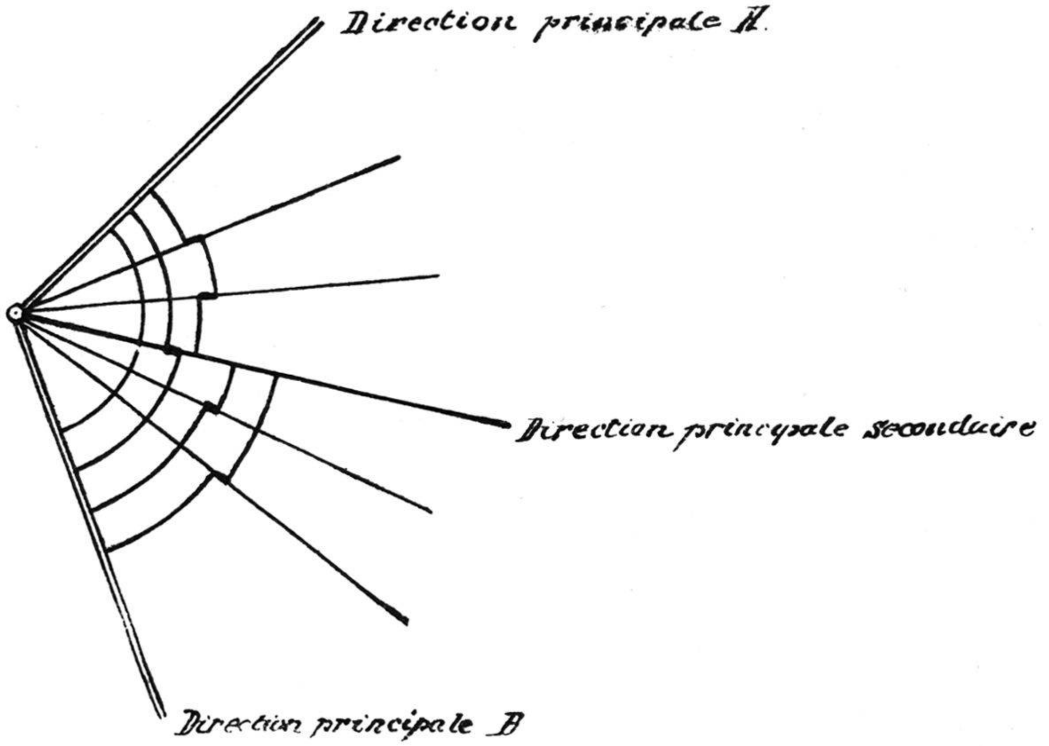

Figure 1.

Nous voulons prouver par ce qui suit que ce système de compensation est rigoureusement conforme à la méthode des moindres carrés. A cet effet nous publions une solution donnée en 1915 par M. R. Ruesch, Ingénieur diplômé, solution qu'il présenta comme cand. ing. à un concours à prix posé par la section des ingénieurs de l'école polytechnique fédérale.

Nous allons nous contenter, afin de simplifier notre démonstration, de choisir le cas où n'intervient aucune direction principale secondaire. Les lecteurs pourront eux-mêmes, sans aucune difficulté, étendre cette démonstration au cas général.

Nous citons comme exemple concret le cas de la figure de la page 31 du sujet traité par M. Zölly.

Nous avons les angles mesurés suivantes:

Tableau I.

Désignation de l'angle	Valeur observée	Poids de l'observation	Amélioration	Valeur compensée	Poids de l'angle compensé
A B	l_{x_0}	p_{x_0}	v_{x_0}	x_0	G_{x_0}
B C	l_{y_0}	p_{y_0}	v_{y_0}	y_0	G_{y_0}
C A	l_{z_0}	p_{z_0}	v_{z_0}	z_0	G_{z_0}
A D	$l_{x_1}{}^{I}$	$p_{x_1}{}^{I}$	$v_{x_1}{}^{I}$	$x_1{}^{I}$	$G_{x_1}{}^{I}$
D F	$l_{x_1}{}^{II}$	$p_{x_1}{}^{II}$	$v_{x_1}{}^{II}$	$x_1{}^{II}$	$G_{x_1}{}^{II}$
F B	$l_{x_1}{}^{III}$	$p_{x_1}{}^{III}$	$v_{x_1}{}^{III}$	$x_1{}^{III}$	$G_{x_1}{}^{III}$
A E	$l_{x_2}{}^{I}$	$p_{x_2}{}^{I}$	$v_{x_2}{}^{I}$	$x_2{}^{I}$	$G_{x_2}{}^{I}$
E B	$l_{x_2}{}^{II}$	$p_{x_2}{}^{II}$	$v_{x_2}{}^{II}$	$x_2{}^{II}$	$G_{x_2}{}^{II}$
B G	$l_{y_1}{}^{I}$	$p_{y_1}{}^{I}$	$v_{y_1}{}^{I}$	$y_1{}^{I}$	$G_{y_1}{}^{I}$
G C	$l_{y_1}{}^{II}$	$p_{y_1}{}^{II}$	$v_{y_1}{}^{II}$	$y_1{}^{II}$	$G_{y_1}{}^{II}$
C H	$l_{z_1}{}^{I}$	$p_{z_1}{}^{I}$	$v_{z_1}{}^{I}$	$z_1{}^{I}$	$G_{z_1}{}^{I}$
H I	$l_{z_1}{}^{II}$	$p_{z_1}{}^{II}$	$v_{z_1}{}^{II}$	$z_1{}^{II}$	$G_{z_1}{}^{II}$
I L	$l_{z_1}{}^{III}$	$p_{z_1}{}^{III}$	$v_{z_1}{}^{III}$	$z_1{}^{III}$	$G_{z_1}{}^{III}$
L A	$l_{z_1}{}^{IV}$	$p_{z_1}{}^{IV}$	$v_{z_1}{}^{IV}$	$z_1{}^{IV}$	$G_{z_1}{}^{IV}$
C K	$l_{z_2}{}^{I}$	$p_{z_2}{}^{I}$	$v_{z_2}{}^{I}$	$z_2{}^{I}$	$G_{z_2}{}^{I}$
K A	$l_{z_2}{}^{II}$	$p_{z_2}{}^{II}$	$v_{z_2}{}^{II}$	$z_2{}^{II}$	$G_{z_2}{}^{II}$

Nous choisissons comme inconnues de notre compensation médiate les valeurs compensées de *tous* les angles mesurés; comme nous avons introduit ainsi trop d'inconnues, il existe entre elles des équations conditionnelles. Nous arrivons de cette manière au cas d'une compensation médiate avec équations conditionnelles entre les inconnues.

On pourrait croire, au premier abord, que ce procédé entraîne une complication inutile, et on serait tenté de supposer que l'emploi d'une compensation purement médiate ou d'une compensation purement conditionnelle serait plus simple. La démonstration que nous cherchons en devient cependant beaucoup plus compliquée.

Les équations d'observation ont toutes la forme

$$l_{x_n}{}^{(m)} - v_{x_n}{}^{(m)} = x_n{}^{(m)};\ l_{y_n}{}^{(m)} - v_{y_n}{}^{(m)} = y_n{}^{(m)} \text{ etc.}$$

$$n = 0,\ 1,\ 2.$$

$$m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Nous obtenons dès lors le système des équations des erreures:

(Voir tableau II, page 53)

Les équations de condition entre les inconnues sont les suivantes:

Coefficients corrélatifs

$$\left.\begin{array}{ll}
k_0 & x_0 - y_0 - z_0 - 4\,R = 0 \\
k_{x_1} & x_1{}^{I} - x_1{}^{II} - x_1{}^{III} - x_0 = 0 \\
k_{x_2} & x_2{}^{I} - x_2{}^{II} - x_0 = 0 \\
k_{y_1} & y_1{}^{I} - x_1{}^{II} - y_0 = 0 \\
k_{z_1} & z_1{}^{I} - z_1{}^{II} - z_1{}^{III} - z_1{}^{IV} - z_0 = 0 \\
k_{z_2} & z_2{}^{I} - z_2{}^{II} - z_0 = 0
\end{array}\right\} \quad (b)$$

D'après le procédé de la compensation médiate avec équations de conditions entre les inconnues (voir Helmert, Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, zweite Auflage, page 263—266) on obtient le système d'équations normales suivant, en annexant aux équations de condition (b) les coefficients corrélatifs ci-dessus:

(Voir tableau III, ci-inclus.)

Pour la résolution du système des équations normales dont la plupart des coefficients sont égaux à zéro, il sera préférable de choisir un mode spécial de calcul autre que l'algorithme de Gauss.

Nous tirons des équations normales (c) No. (2), (3) et (4):

$$(2') \quad \frac{k_{x_1}}{p_{x_1}{}^{I}} = l_{x_1}{}^{I} - x_1{}^{I}$$

$$(3') \quad \frac{k_{x_1}}{p_{x_1}{}^{II}} = l_{x_1}{}^{II} - x_1{}^{II}$$

$$(4') \quad \frac{k_{x_1}}{p_{x_1}{}^{III}} = l_{x_1}{}^{III} - x_1{}^{III}$$

et de là:

$$k_{x_1} = \frac{1}{\left[\dfrac{1}{p_{x_1}}\right]} \left\{[l_{x_1}] - [x_1]\right\}$$

Système des équations des erreurs. (a) *Tableau II.*

(1) $v_{x_0} = x_0 - l_{x_0}$

(2) $v_{x_1}^{I} = x_1^{I} - l_{x_1}^{I}$

(3) $v_{x_1}^{II} = x_1^{II} - l_{x_1}^{II}$

(4) $v_{x_1}^{III} = x_1^{III} - l_{x_1}^{III}$

(5) $v_{x_2}^{I} = x_2^{I} - l_{x_2}^{I}$

(6) $v_{x_2}^{II} = x_2^{II} - l_{x_2}^{II}$

(7) $v_{y_0} = y_0 - l_{y_0}$

(8) $v_{y_1}^{I} = y_1^{I} - l_{y_1}^{I}$

(9) $v_{y_1}^{II} = y_1^{II} - l_{y_1}^{II}$

(10) $v_{z_0} = z_0 - l_{z_0}$

(11) $v_{z_1}^{I} = z_1^{I} - l_{z_1}^{I}$

(12) $v_{z_1}^{II} = z_1^{II} - l_{z_1}^{II}$

(13) $v_{z_1}^{III} = z_1^{III} - l_{z_1}^{III}$

(14) $v_{z_1}^{IV} = z_1^{IV} - l_{z_1}^{IV}$

(15) $v_{z_2}^{I} = z_2^{I} - l_{z_2}^{I}$

(16) $v_{z_2}^{II} = z_2^{II} - l_{z_2}^{II}$

les termes entre crochets [ ] signifient une somme.

Il découle des équations normales (c) No. (5) et (6):

$$(5') \quad \frac{k_{x_2}}{p_{x_2}{}^{I}} = l_{x_2}{}^{I} - x_2{}^{I}$$

$$(6') \quad \frac{k_{x_2}}{p_{x_2}{}^{II}} = l_{x_2}{}^{II} - x_2{}^{II}$$

et de là:

$$k_{x_2} = \frac{1}{\left[\frac{1}{p_{x_2}}\right]} \left\{[l_{x_2}] - [x_2]\right\}$$

Nous posons les valeurs pour k_{x_1} et k_{x_2} dans (c) No. 1:

$$\text{I.} \quad p_{x_0} \cdot x_0 + k_0 - \frac{1}{\left[\frac{1}{p_{x_1}}\right]} \left\{[l_{x_1}] - [x_1]\right\} - \frac{1}{\left[\frac{1}{p_{x_2}}\right]} \left\{[l_{x_2}] - [x_2]\right\}$$

$$- p_{x_0} \cdot l_{x_0} = 0$$

On déduit de ceci, en observant que, d'après les équations: (c) No. (18) et (19) $[x_1] = x_0$ et $[x_2] = x_0$

$$\text{I}'. \quad k_0 + x_0 \left\{p_{x_0} + \frac{1}{\left[\frac{1}{p_{x_1}}\right]} + \frac{1}{\left[\frac{1}{p_{x_2}}\right]}\right\} - \left\{p_{x_0} l_{x_0} + \frac{[l_{x_1}]}{\left[\frac{1}{p_{x_1}}\right]} + \frac{[l_{x_2}]}{\left[\frac{1}{p_{x_2}}\right]}\right\} = 0$$

On sait que le poids d'une somme (p_s) lorsque les poids des différents termes sont p_1, p_2 ... p_n est:

$$\frac{1}{p_s} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n}$$

d'où

$$p_s = \frac{1}{\left[\frac{1}{p}\right]}$$

$\frac{1}{\left[\frac{1}{p_{x_1}}\right]}$ représente dès lors le poids du secteur x résultant des poids des sommes $x_1{}^{I} + x_1{}^{II} + x_1{}^{III}$.

Représentons-le dès à présent par le terme abréviatif

$$p_{x_1} = \frac{1}{\left[\frac{1}{p_{x_1}}\right]}$$

Système des équations normales. (c)

Tableau III.

(1) $p_{x_0}\cdot x_0 + K_0 - K_{x_1} - K_{x_2} - p_{x_0}\cdot l_{x_0} = 0$ (1)

(2) $p_{x_1}{}^{I}\cdot x_1{}^{I} + K_{x_1} - p_{x_1}{}^{I}\cdot l_{x_1}{}^{I} = 0$ (2)

(3) $p_{x_1}{}^{II}\cdot x_1{}^{II} + K_{x_1} - p_{x_1}{}^{II}\cdot l_{x_1}{}^{II} = 0$ (3)

(4) $p_{x_1}{}^{III}\cdot x_1{}^{III} + K_{x_1} - p_{x_1}{}^{III}\cdot l_{x_1}{}^{III} = 0$ (4)

(5) $p_{x_2}{}^{I}\cdot x_2{}^{I} + K_{x_2} - p_{x_2}{}^{I}\cdot l_{x_2}{}^{I} = 0$ (5)

(6) $p_{x_2}{}^{II}\cdot x_2{}^{II} + K_{x_2} - p_{x_2}{}^{II}\cdot l_{x_2}{}^{II} = 0$ (6)

(7) $p_{y_0}\cdot y_0 + K_0 - K_{y_1} - p_{y_0}\cdot l_{y_0} = 0$ (7)

(8) $p_{y_1}{}^{I}\cdot y_1{}^{I} + K_{y_1} - p_{y_1}{}^{I}\cdot l_{y_1}{}^{I} = 0$ (8)

(9) $p_{y_1}{}^{II}\cdot y_1{}^{II} + K_{y_1} - p_{y_1}{}^{II}\cdot l_{y_1}{}^{II} = 0$ (9)

(10) $p_{z_0}\cdot z_0 + K_0 - K_{z_1} - K_{z_2} - p_{z_0}\cdot l_{z_0} = 0$ (10)

(11) $p_{z_1}{}^{I}\cdot z_1{}^{I} + K_{z_1} - p_{z_1}{}^{I}\cdot l_{z_1}{}^{I} = 0$ (11)

(12) $p_{z_1}{}^{II}\cdot z_1{}^{II} + K_{z_1} - p_{z_1}{}^{II}\cdot l_{z_1}{}^{II} = 0$ (12)

(13) $p_{z_1}{}^{III}\cdot z_1{}^{III} + K_{z_1} - p_{z_1}{}^{III}\cdot l_{z_1}{}^{III} = 0$ (13)

(14) $p_{z_1}{}^{IV}\cdot z_1{}^{IV} + K_{z_1} - p_{z_1}{}^{IV}\cdot l_{z_1}{}^{IV} = 0$ (14)

(15) $p_{z_2}{}^{I}\cdot z_2{}^{I} + K_{z_2} - p_{z_2}{}^{I}\cdot l_{z_2}{}^{I} = 0$ (15)

(16) $p_{z_2}{}^{II}\cdot z_2{}^{II} + K_{z_2} - p_{z_2}{}^{II}\cdot l_{z_2}{}^{II} = 0$ (16)

(17) $+ x_0 + y_0 + z_0 - 4\,R = 0$ (17)

(18) $- x_0 + x_1{}^{I} + x_1{}^{II} + x_1{}^{III} = 0$ (18)

(19) $- x_0 + x_2{}^{I} + x_2{}^{II} = 0$ (19)

(20) $- y_0 + y_1{}^{I} + y_1{}^{II} = 0$ (20)

(21) $- z_0 + z_1{}^{I} + z_1{}^{II} + z_1{}^{III} + z_1{}^{IV} = 0$ (21)

(22) $- z_0 + z_2{}^{I} + z_2{}^{II} = 0$ (22)

D'une manière analogue $\dfrac{1}{\left[\dfrac{1}{p_{x_2}}\right]}$ représentera le poids du secteur x résultant des poids des sommes $x_2^{I} + x_2^{II}$; en abrégé représenté par p_{x2}

$$p_{x_2} = \frac{1}{\left[\dfrac{1}{p_{x_2}}\right]}$$

Le coefficient de x_0 dans la formule I′ représentera alors la somme des poids de toutes les valeurs dont se compose le secteur x.

Le terme absolu de cette opération I′ représente par contre la somme des produits découlant des différentes valeurs du secteur x avec leurs poids respectifs.

Nous désignerons par le terme abréviatif $[p_x]$:

$$p_{x_0} + \frac{1}{\left[\dfrac{1}{p_{x_1}}\right]} + \frac{1}{\left[\dfrac{1}{p_{x_2}}\right]} = p_{x_0} + p_{x_1} + p_{x_2} = [p_x]$$

Nous désignons en outre:

$$p_{x_0} l_{x_0} + \frac{[l_{x_1}]}{\left[\dfrac{1}{p_{x_1}}\right]} + \frac{[l_{x_2}]}{\left[\dfrac{1}{p_{x_2}}\right]} = p_{x_0} \cdot l_{x_0} + p_{x_1}[l_{x_1}] + p_{x_2}[l_{x_2}] = [p_x \cdot l_x]$$

par $[p_x \cdot l_x]$, et nous obtenons ainsi:

$$k_0 + [p_x]\, x_0 - [p_x\, l_x] = 0 \qquad \text{(II)}.$$

Des équations analogues découlent des équations normales pour y_0 et z_0

$$\left.\begin{aligned} k_0 + [p_x]\, x_0 - [p_x \cdot l_x] &= 0 \\ k_0 + [p_y]\, y_0 - [p_y \cdot l_y] &= 0 \\ k_0 + [p_z]\, z_0 - [p_z \cdot l_z] &= 0 \end{aligned}\right\} \text{(II′)}.$$

La signification des symboles $[p_y]$, $[p_z]$, $[p_y \cdot l_y]$ et $[p_z \cdot l_z]$ ressort évidemment de ce qui précède.

Nous divisons chacune de ces 3 équations par le coefficient de x_0, y_0 et z_0 et nous obtenons par l'addition de ces équations ainsi transformées: (II′).

$$-\left\{\frac{[p_x \cdot l_x]}{[p_x]} + \frac{[p_y \cdot l_y]}{[p_y]} + \frac{[p_z \cdot l_z]}{[p_z]}\right\} + k_0 \left\{\frac{1}{[p_x]} + \frac{1}{[p_y]} + \frac{1}{[p_z]}\right\}$$
$$+ x_0 + y_0 + z_0 = 0 \qquad \text{(III)}$$

Mais $x_0 + y_0 + z_0 = 4\,R$ d'après l'équation c No. 17. Nous obtenons ainsi:

$$k_0 = - \frac{4\,R - \left\{\frac{[p_x \cdot l_x]}{[p_x]} + \frac{[p_y \cdot l_y]}{[p_y]} + \frac{[p_z \cdot l_z]}{[p_z]}\right\}}{\left\{\frac{1}{[p_x]} + \frac{1}{[p_y]} + \frac{1}{[p_z]}\right\}} \qquad \text{IV.}$$

(A suivre.)

Auszug aus der Verordnung betr. die Grundbuchvermessungen

(vom 30. Dezember 1924)

und aus den Erläuterungen dazu.

(Fortsetzung statt Schluß.)

3. *Neuvermessungsarbeiten.*

Art. 20.

Die Kantone bestimmen im Rahmen des allgemeinen Planes über die Durchführung der Grundbuchvermessungen den Zeitpunkt, in dem die einzelnen Gebiete zu vermessen sind.

Neu. Dieser Artikel entspricht der bisherigen Praxis. Es ist Sache jedes Kantons, innerhalb des ihm zugewiesenen Zeitabschnittes und im Rahmen des eidgenössischen Finanzplanes für die Grundbuchvermessungen die Reihenfolge der Vermessungen seines Gebietes festzusetzen.

Art. 21.

Die Vermessung soll in der Regel wenigstens das Gebiet einer politischen oder Einwohnergemeinde oder eines entsprechenden Bezirkes umfassen. Gemeinden mit großer Ausdehnung können in zwei oder mehreren Losen vermessen werden.

Satz 1 entspricht dem bisherigen Art. 21, Abs. 2. Satz 2 ist neu, stimmt aber mit der bisherigen Praxis überein. Die Parzellarvermessung umfaßt in der Regel das Gebiet einer Gemeinde oder eines entsprechenden Bezirkes. Ist die Ausdehnung der Gemeinde derart, daß deren Vermessung einen Zeitraum von mehr als vier Jahren erfordert, so werden auf Begehren der Kantone oder der Gemeinden zwei oder mehrere Vermessungslose gebildet. Die Vermessung dieser Lose kann je nach Bedürfnis *gleichzeitig* durch verschiedene Uebernehmer oder *nacheinander* durch den gleichen Geometer durchgeführt