Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 20 (1922)

Heft: 10

Artikel: Ueber den Fehlerkreis beim Vorwärtseinschneiden

Autor: Hellebrand, Emil

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-187510

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 22.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SCHWEIZERISCHE
Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik
ORGAN DES SCHWEIZ. GEOMETERVEREINS
REVUE TECHNIQUE SUISSE DES MENSURATIONS ET AMÉLIORATIONS FONCIÈRES
ORGANE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES GÉOMÈTRES

Redaktion: F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)
Ständiger Mitarbeiter für Kulturtechnik ad interim: H. FLUCK, Diplomierter Kulturingenieur, Neuchâtel, Case postale
Collaborateur attitré pour la partie en langue française: CH. ROESGEN, ingénieur-géomètre, Genève, 11, rue de l'Hôtel-de-Ville — Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats
Expedition, Inseraten- und Abonnements-Annahme:
BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR VORM. G. BINKERT, WINTERTHUR

Jährlich 12 Nummern (erscheinend am zweiten Dienstag jeden Monats) und 12 Inseraten-Bulletins (erscheinend am vierten Dienstag jeden Monats)	**No. 10** des **XX. Jahrganges** der „Schweiz. Geometerzeitung". **10. Oktober 1922**	Jahresabonnement Fr. 12.— (unentgeltlich für Mitglieder) — Inserate: 50 Cts. per 1spaltige Nonp.-Zeile

Ueber den Fehlerkreis beim Vorwärtseinschneiden.

Von Prof. Dr. *Emil Hellebrand*, Hochschule für Bodenkultur, *Wien*.

1. *Drei Strahlen.*

Bei jeder Punktbestimmung treten gewisse unvermeidliche Fehler in der Lage des Neupunktes auf, d. h. es erscheint letzterer gegen seinen wahren Ort mehr oder minder viel verschoben. Die Größe der Verschiebung kann entweder für alle Richtungen gleich oder verschieden sein. Im ersten Falle haben wir es mit einem Fehlerkreis, im zweiten mit einer Fehlerellipse zu tun.

Daß wir dem Fehlerkreis den Vorzug geben, ist aus theoretischen wie praktischen Gründen selbstverständlich. Doch ist das Auftreten des Fehlerkreises, wie bekannt, an Bedingungen geknüpft, die nicht leicht zu erfüllen sind. Meist schreiben die Geländeverhältnisse Strahlenlängen und Schnittwinkel vor, welche untereinander recht ungleich sind. Es erübrigt dann, noch den Versuch zu machen, ob nicht durch Aenderung der Strahlengewichte ein Fehlerkreis zu erreichen ist.

In der nachstehenden Figur bedeuten 1, 2, 3 die gegebenen Punkte, von welchen aus die Richtungen φ_1, φ_2, φ_3 der Strahlen s_1, s_2, s_3 durch Messung geeigneter Anschlußwinkel festzulegen sind. Die Strahlengewichte seien p_1, p_2, p_3; ihre Summe P.

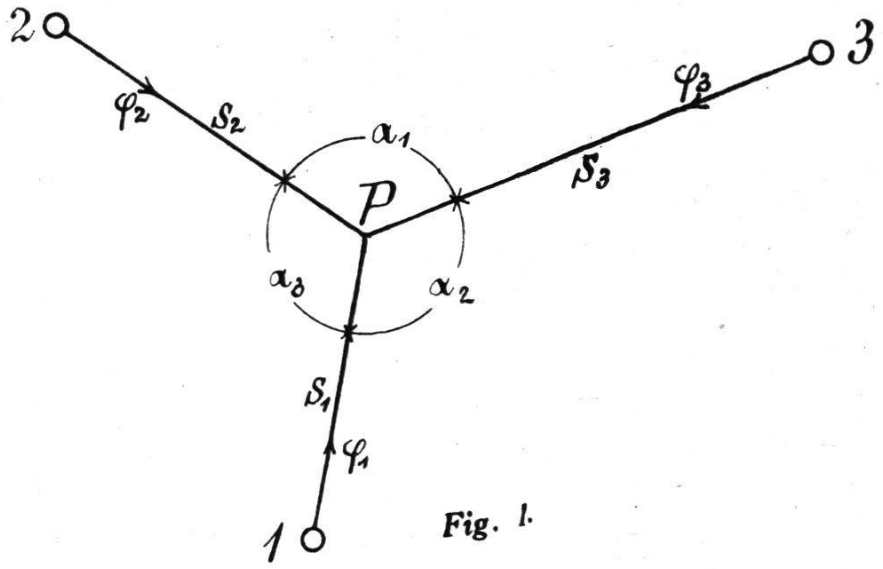

Fig. 1.

Dann haben wir in üblicher Schreibweise für die Richtungs-Koeffizienten:

$$a_1 = -\frac{\rho \sin \varphi_1}{s_1}, \qquad a_2 = -\frac{\rho \sin \varphi_2}{s_2}, \qquad a_3 = -\frac{\rho \sin \varphi_3}{s_3},$$

$$b_1 = \frac{\rho \cos \varphi_1}{s_1}, \qquad b_2 = \frac{\rho \cos \varphi_2}{s_2}, \qquad b_3 = \frac{\rho \cos \varphi_3}{s_3}$$

und für die Halbachsen der Fehlerellipse:

$$A^2 = \frac{m^2}{2\,D}\,([paa] + [pbb] + W), \tag{1}$$

$$B^3 = \frac{m^2}{2\,D}\,([paa] + [pbb] - W);$$

hiebei ist:

$$D = [paa]\,[pbb] - [pab]\,[pab], \tag{2}$$

$$W^2 = ([pbb] - [paa])^2 + 4\,[pab]^2.$$

Soll nun die Fehlerellipse in einen Kreis übergehen, dann muß die Größe W in den Ausdrücken für A und B verschwinden, also

$$[pbb] - [paa] = 0, \qquad [pab] = 0.$$

Zur Bestimmung der Unbekannten p_1, p_2, p_3 stehen demnach drei Gleichungen zur Verfügung:

$$\begin{aligned} p_1 \qquad\qquad + p_2 \qquad\qquad + p_3 \qquad\qquad &= P \\ p_1 \frac{\cos 2\,\varphi_1}{s_1^2} + p_2 \frac{\cos 2\,\varphi_2}{s_2^2} + p_3 \frac{\cos 2\,\varphi_3}{s_3^2} &= 0 \\ p_1 \frac{\sin 2\,\varphi_1}{s_1^2} + p_2 \frac{\sin 2\,\varphi_2}{s_2^2} + p_3 \frac{\sin 2\,\varphi_3}{s_3^2} &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Ihre Auflösung führt, wenn an Stelle der Richtungsunterschiede die Schnittwinkel α_1, α_2, α_3 eingesetzt werden, zu den Werten:

$$p_1 = \frac{P}{N} s^2_1 \sin 2\alpha_1,$$
$$p_2 = \frac{P}{N} s^2_2 \sin 2\alpha_2, \qquad (4)$$
$$p_3 = \frac{P}{N} s^2_3 \sin 2\alpha_3,$$

mit $N = s^2_1 \sin 2\alpha_2 + s^2_2 \sin 2\alpha_2 + s^2_3 \sin 2\alpha_3$.

Für das Verhältnis der Gewichte hat man daher sehr einfach

$$p_1 : p_2 : p_3 = s^2_1 \sin 2\alpha_1 : s^2_2 \sin 2\alpha_2 : s^2_3 \sin 2\alpha_3, \qquad (5)$$

was sich zeichnerisch leicht darstellen läßt.

Will man auch den Halbmesser des Fehlerkreises berechnen, so setzt man die obigen Werte für p_1, p_2, p_3 in die Gleichungen (1) ein; wegen

$$[pab] = 0, \ [paa] = [pbb], \text{ also } W = 0$$

wird zunächst $D = [paa]^2$ und

$$R^2 = A^2_0 = B^2_0 = \frac{m^2}{[paa]}$$
$$= \frac{m^2}{\rho^2} \cdot \frac{1}{P} \cdot \frac{N}{-2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3}. \qquad (6)$$

Sei etwa $s_1 = 1$, $s_2 = 2$, $s_3 = 1$

und $\alpha_1 = 240^0$, $\alpha_2 = 60^0$, $\alpha_3 = 60^0$,

dann ist nach Gleichung 5:

$$p_1 : p_2 : p_3 = 1 : 4 : 1,$$

ein Fehlerkreis ist also möglich; sein Halbmesser beträgt nach Gleichung 6:

$$R = \frac{m}{\varphi} \cdot \frac{2}{\sqrt{P}}$$

Wäre hingegen $s_1 = 1$, $s_2 = 2$, $s_3 = 3$

und $\alpha_1 = 60^0$, $\alpha_2 = 150^0$, $\alpha_3 = 150^0$,

so erhielte man

$$p_1 : p_2 : p_3 = 1 : -4 : -9 = -1 : 4 : 9,$$

ein Fehlerkreis wäre wegen des negativen Gewichtes p_1 nicht möglich. Man müßte sich damit begnügen, den kleinsten

mittleren Punktfehler zu erreichen; hiefür wäre im Sinne der seinerzeit entwickelten Formeln*) das Gewichtsverhältnis

$$p_1 : p_2 : p_3 = 14 : 59 : 65 \doteq 1 : 4{,}2 : 4{,}6$$

erforderlich.

Aus Gleichung (5) erkennt man, daß die Entscheidung, ob ein Fehlerkreis auftreten kann oder nicht, ausschließlich von der Größe der Schnittwinkel α_1, α_2, α_3 abhängt.

Bei beliebigen Winkelwerten wird man mit Vorteil das zeichnerische Verfahren anwenden, welches darin besteht, daß der erste Strahl auf dem zweiten abgetragen, der Endpunkt auf den dritten abgelotet wird. Die so entstandenen rechtwinkligen Dreiecke sind den Gewichten proportional, da $s^2 \sin 2\alpha = 2s \sin \alpha \cdot s \cos \alpha$.

Auch die Wirkung der Strahlengewichte ist leicht zu überblicken. Im ersten Beispiel würden die gleich genauen Strahlen s_1 und s_3 mit $\alpha_2 = 60^0$ eine Fehlerellipse entstehen lassen, deren große Achse mit der Halbierungslinie des Winkels zusammenfiele; um dem stärkeren Ausweichen des Punktes nach dieser Richtung vorzubeugen, muß der Strahl s_2 gut bestimmt werden — wegen seiner doppelten Länge ist $p_2 = 4$.

Hat man mehrere Punkte gleicher Ordnung durch Vorwärtseinschneiden festzulegen und sollen die Punktlagen gleich genau, d. h. die Halbmesser der Fehlerkreise gleich groß sein, was stets gefordert werden sollte, so wird man die erforderlichen P-Werte nach Gleichung (6) berechnen; hiebei kann m insolange als unveränderlich gelten, als die Beobachtungsverhältnisse gleichartige bleiben. Für ein schärferes Verfahren empfiehlt es sich, die zulässigen mittleren Winkelfehler vorher zu ermitteln.

Setzt man im obigen Beispiel $m'' = \pm 6''$ und $P = 12$, so wird, wenn die Strahlenlängen km bedeuten,

$$R = \frac{m}{\rho} \cdot \frac{2}{\sqrt{P}} = 1.7 \text{ cm}$$

als Halbmesser des mittleren Fehlerkreises, also jenes Kreises, innerhalb dessen bei 100 Punktbestimmungen 68 Punkte liegen werden. Der vermutlich größte Halbmesser wäre etwa $3 \cdot 1.7 = 5$ cm.

*) Hellebrand, Ueber die günstigste Gewichtsverteilung ... Denkschriften d. Wiener Ak. d. Wiss., 1912.

Sollte nun in einem anderen Falle etwa für

$$s_1 = 1 \text{ km}, \quad s_2 = 3 \text{ km}, \quad s_3 = 2 \text{ km und}$$
$$\alpha_1 = 145^0, \quad \alpha_2 = 115^0, \quad \alpha_3 = 100^0$$

die gleiche Genauigkeit erreicht werden, so hätte man beim selben m zunächst $P = 27$ und zwar $p_1 = 3$, $p_2 = 20$, $p_3 = 4$ und daher weiter als zulässige mittlere Fehler der in die Ausgleichsrechnung eingeführten Anschlußwinkel:

$$m''_1 = \pm 3''.5 \quad \text{für } \measuredangle\, 21\,P \text{ oder } \measuredangle\, P\,13$$
$$m''_2 = \pm 1''.3 \quad \text{,,} \quad \measuredangle\, 32\,P \quad \text{,,} \quad \measuredangle\, P\,21$$
$$m''_3 = \pm 3''.0 \quad \text{,,} \quad \measuredangle\, 13\,P \quad \text{,,} \quad \measuredangle\, P\,32.$$

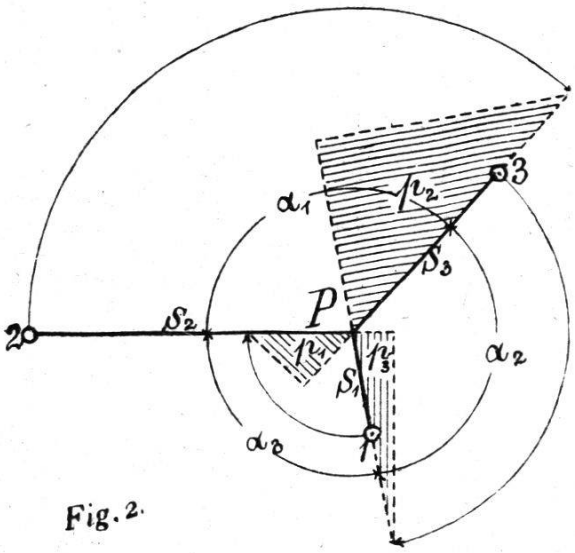

Fig. 2.

Werden beide dem Bestimmungsstrahl anliegenden Winkel gemessen, etwa mit den Gewichten q_1, q'_1, so ist das Strahlengewicht:

$$p_1 = q_1 + q'_1.$$

Die nebenstehende Figur veranschaulicht das letzte Beispiel; die Flächen der schraffierten Dreiecke kennzeichnen die Strahlengewichte.

2. *Vier Strahlen.*

Erweitert man die vorstehende Aufgabe auf den Fall von vier Bestimmungsstrahlen, so treten in die früheren Gleichungen (3) noch die dem vierten Strahl entsprechenden Glieder ein und man hat daher:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = P$$
$$p_1 \frac{\cos 2\varphi_1}{s^2_1} + p_2 \frac{\cos 2\varphi_2}{s^2_2} + p_3 \frac{\cos 2\varphi_3}{s^2_3} + p_4 \frac{\cos 2\varphi_4}{s^2_4} = 0 \quad (7)$$
$$p_1 \frac{\sin 2\varphi_1}{s^2_1} + p_2 \frac{\sin 2\varphi_2}{s^2_2} + p_3 \frac{\sin 2\varphi_3}{s^2_3} + p_4 \frac{\sin 2\varphi_4}{s^2_4} = 0.$$

Drei der Unbekannten können also stets durch die vierte ausgedrückt werden, sodaß auch der Halbmesser des Fehlerkreises in vier Formen dargestellt werden kann, als Funktion von p_1, p_2, p_3 oder p_4.

Jene Gruppe von Gewichten, welche zum kleinsten Halbmesser führt, wird man als zweckmäßigste beibehalten.

Zur Abkürzung der Formeln, deren Entwicklung hier übergangen werden darf, seien eingeführt:

$$\begin{aligned} k_1 &= s^2_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \sin (\alpha_2 + \alpha_3), \\ k_2 &= s^2_2 \sin \alpha_3 \sin \alpha_4 \sin (\alpha_3 + \alpha_4), \\ k_3 &= s^2_3 \sin \alpha_4 \sin \alpha_1 \sin (\alpha_4 + \alpha_1), \\ k_4 &= s^2_4 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin (\alpha_1 + \alpha_2) \\ \text{und } k &= k_1 - k_2 + k_3 - k_4. \end{aligned} \tag{8}$$

An Hand der Figur 3 erkennt man die Gesetzmäßigkeit im Bau dieser Ausdrücke ebenso wie der folgenden:

$$\begin{aligned} N_1 &= s^2_1 (s^2_2 \sin 2\alpha_3 - s^2_3 \sin 2 [\alpha_2 + \alpha_3] + s^2_4 \sin 2\alpha_2) \\ N_2 &= s^2_2 (s^2_3 \sin 2\alpha_4 - s^2_4 \sin 2 [\alpha_3 + \alpha_4] + s^2_1 \sin 2\alpha_3) \\ N_3 &= s^2_3 (s^2_4 \sin 2\alpha_1 - s^2_1 \sin 2 [\alpha_4 + \alpha_1] + s^2_2 \sin 2\alpha_4) \\ N_4 &= s^2_4 (s^2_1 \sin 2\alpha_2 - s^2_2 \sin 2 [\alpha_1 + \alpha_2] + s^2_3 \sin 2\alpha_1) \end{aligned} \tag{9}$$

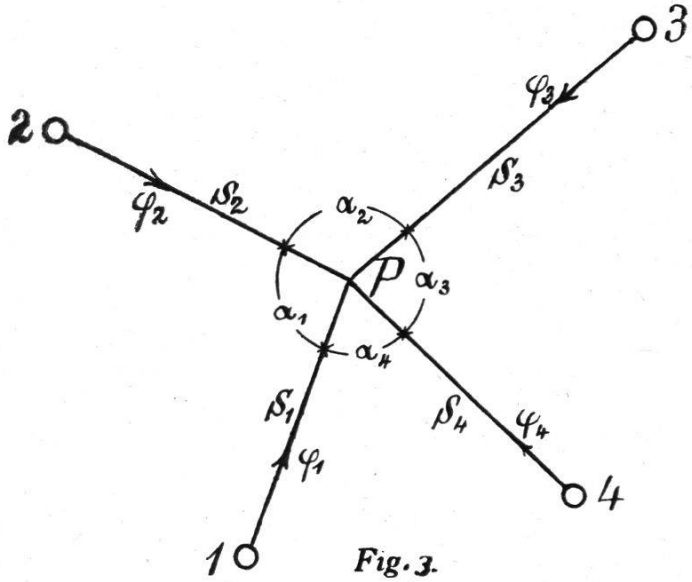

Fig. 3.

Damit erhält man für den Halbmesser die vier Formen:

$$R^2_1 = \frac{m^2}{\rho^2} \cdot \frac{N_1}{Pk_1 - Kp_1},$$

$$R^2_2 = \frac{m^2}{\rho^2} \cdot \frac{N_2}{Pk_2 - Kp_2},$$

$$R^2_3 = \frac{m^2}{\rho^2} \cdot \frac{N_3}{Pk_3 - Kp_3},$$

$$R^2_4 = \frac{m^2}{\rho^2} \cdot \frac{N_4}{Pk_4 - Kp_4}.$$

Der Vollständigkeit wegen sollen auch die Gleichungen für die Gewichte hiehergesetzt werden, ausgedrückt in:

1. p_1:

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{P}{N_1} (s^2_1 s^2_2 \sin 2\alpha_3 - p_1 N_2) \\ p_3 &= \frac{P}{N_1} (s^2_1 s^2_3 \sin 2 [\alpha_1 + \alpha_4] + p_1 N_3) \\ p_4 &= \frac{P}{N_1} (s^2_1 s^2_4 \sin 2\alpha_2 - p_1 N_4) \end{aligned} \tag{11}$$

2. p_2:

$$p_1 = \frac{P}{N_2}(s^2_2\, s^2_1 \sin 2\,\alpha_3 - p_2\, N_1)$$

$$p_3 = \frac{P}{N_2}(s^2_2\, s^2_3 \sin 2\,\alpha_4 - p_2\, N_3) \qquad (12)$$

$$p_4 = \frac{P}{N_2}(s^2_2\, s^2_4 \sin 2\,[\alpha_1 + \alpha_2] + p_2\, N_4)$$

3. p_3:

$$p_1 = \frac{P}{N_3}(s^2_3\, s^2_1 \sin 2\,[\alpha_2 + \alpha_3] + p_3\, N_1)$$

$$p_2 = \frac{P}{N_3}(s^2_3\, s^2_2 \sin 2\,\alpha_4 - p_3\, N_2) \qquad (13)$$

$$p_4 = \frac{P}{N_3}(s^2_3 s^2_4 \sin 2\,\alpha_1 - p_3\, N_4)$$

4. p_4:

$$p_1 = \frac{P}{N_4}(s^2_4\, s^2_1 \sin 2\,\alpha_2 - p_4\, N_1)$$

$$p_2 = \frac{P}{N_4}(s^2_4\, s^2_2 \sin 2\,[\alpha_3 + \alpha_4] + p_4\, N_2) \qquad (14)$$

$$p_3 = \frac{P}{N_4}(s^2_4\, s^2_3 \sin 2\,\alpha_1 - p_4\, N_3)$$

Maßgebend für die Wahl der Gewichte sind die Gleichungen (10). Wo das Einzelngewicht im Nenner ein negatives Vorzeichen aufweist, dort ist die beste Lösung der gestellten Aufgabe zu suchen.

Das nachfolgende Beispiel soll dies näher zeigen. Es sei:

$$s_1 = 1,\ s_2 = 2,\ s_3 = 3,\ s_4 = 4$$

und $\alpha_1 = 60^0,\ \alpha_2 = 90^0,\ \alpha_3 = 150^0,\ \alpha_4 = 60^0$;

damit berechnet man nach den Gleichungen (8);

$$k_1 = -\frac{\sqrt{3}}{4},\ k_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ k_3 = \frac{27\sqrt{3}}{8},\ k_4 = 4\sqrt{3},\ K = -\frac{3\sqrt{3}}{8};$$

ferner nach (9):

$$N_1 = -\frac{13\sqrt{3}}{2},\ N_2 = -16\sqrt{3},\ N_3 = \frac{189\sqrt{3}}{2},\ N_4 = 104\sqrt{3}$$

und schließlich nach (10):

$$R^2_1 = \frac{m^2}{\rho^2} \frac{13}{P - \frac{3}{2} p_1}, \quad R^2_2 = \frac{m^2}{\rho^2} \frac{16}{P + \frac{3}{4} p_2},$$

$$R^2_3 = \frac{m^2}{\rho^2} \frac{14}{P + \frac{3}{2} p_2}, \quad R^2_4 = \frac{m^2}{\rho^2} \frac{13}{P - \frac{3}{32} p_4}.$$

Augenscheinlich ergibt sich der kleinste Wert des Halbmessers für

$$p_1 = 0, \; p_4 = 0;$$

hieraus — übereinstimmend aus (11) und (14) —

$$p_2 = \frac{4\,P}{13}, \; p_3 = \frac{9\,P}{13}$$

und schließlich aus allen vier Formen (10) die Größe

$$R^2_1 = R^2_2 = R^2_3 = R^2_4 = R^2_{min} = \frac{m^2}{\rho^2} \frac{13}{P}.$$

Das Ergebnis lautet also: die Richtungsmessungen sind auf die Strahlen s_2 und s_3 zu beschränken, deren Beobachtungszahlen sich wie 4:9 verhalten müssen; die Richtungen der Strahlen s_1, s_4 entfallen und damit auch die Ausgleichung.

(Schluß folgt.)

Zur Abschätzung der vorübergehenden Mehr- und Minderwerte bei Güterzusammenlegungen.

Das Schätzungsverfahren bei Güterzusammenlegungen zerfällt in zwei deutlich getrennte Teile. In einer ersten Schätzung, die sofort nach der Aufnahme des alten Besitzstandes geschieht, wird auf Grund der natürlichen Fruchtbarkeit der Ertragswert des Bodens bestimmt. Hiebei wird keine Rücksicht genommen auf den Dünger- und Kulturzustand des Bodens, da sich dieselben doch im Laufe der Zusammenlegungsarbeiten ändern. Es ist dann Aufgabe einer zweiten Schätzung, die hieraus resultierenden Mehr- und Minderwerte festzustellen. Mit Vorteil wird diese Schätzung kurz vor der Uebergabe der neuen Grundstücke vorgenommen, am besten unmittelbar vor der Getreideernte.

Vorübergehende Mehrwerte ergeben sich durch das Vorhandensein von Nutzpflanzen (Obstbäume, Esparsette, Luzerne,