Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 20 (1922)

Heft: 8

Artikel: Gemeinsames Vorwärtseinschneiden von drei Punkten ohne überschüssige Messungen

Autor: Werkmeister, P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-187506

12.	Mathey, Charles . .	geb.	1896,	von	Le Locle
13.	Morf, Robert . . .	„	1894,	„	Zürich
14.	Pouly, Ernest . . .	„	1898,	„	Cullayes
15.	Spörri, Heinrich . .	„	1895,	„	Zürich
16.	Vosseler, Hans Jakob	„	1896,	„	Basel
17.	Weber, Max	„	1897,	„	Zürich
18.	Wolf, Jakob	„	1897,	„	Neunkirch

Gemeinsames Vorwärtseinschneiden von drei Punkten ohne überschüssige Messungen.

Drei Punkte P_1, P_2 und P_3 können gemeinsam dadurch festgelegt werden, daß man in drei Festpunkten A, B und C (Figur 1)

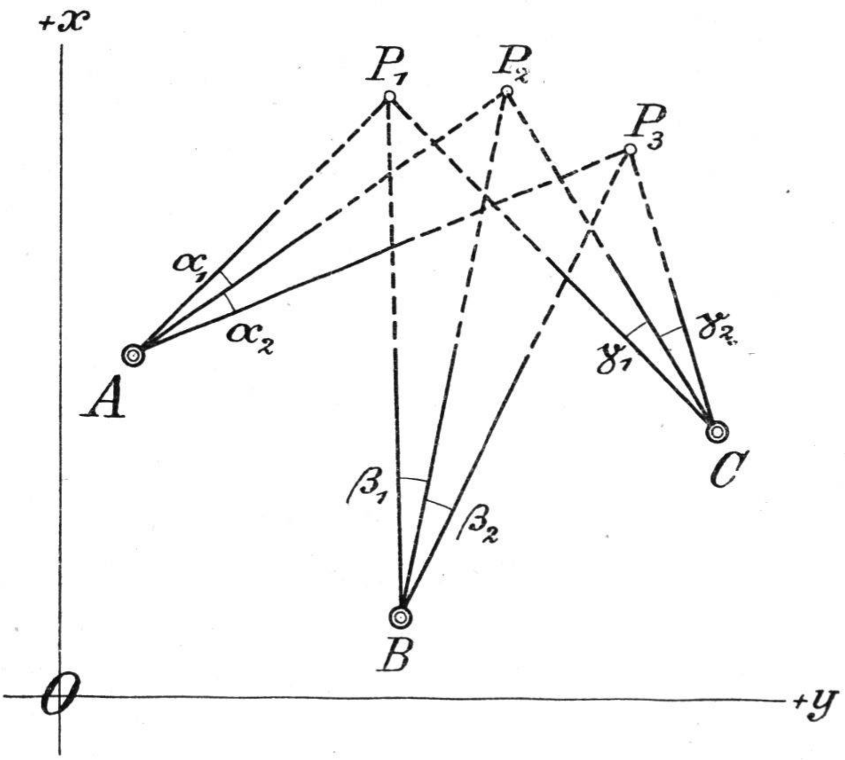

Fig. 1.

mit den gegebenen Koordinaten (x_a, y_a), (x_b, y_b) und (x_c, y_c) die Winkel α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1 und γ_2 zwischen je zwei der drei festzulegenden Punkte mißt. Daß mit Hilfe dieser sechs, voneinander unabhängigen Winkel eine eindeutige Festlegung der drei Punkte P_1, P_2 und P_3 möglich ist, ergibt sich in einfacher Weise aus dem durch die Punkte A, B und C einerseits und die Punkte P_1, P_2 und P_3 anderseits gebildeten Sechseck; die neun zur Bestimmung dieses Sechseckes erforderlichen Stücke sind die beiden Seiten AB und BC, der Winkel ABC und die in A, B und C zu messenden sechs Winkel.

Da die zur Festlegung der Punkte P_1, P_2 und P_3 erforderlichen Winkel in Festpunkten gemessen werden, und die Punkte gemeinsam festgelegt werden, so handelt es sich um ein „gemeinsames Vorwärtseinschneiden von drei Punkten".* Die Messung der sechs Winkel α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1 und γ_2 erfolgt entweder unmittelbar oder mittelbar; die mittelbare Messung ist eine Aufgabe der Photogrammetrie; sie setzt voraus, daß die Punkte P_1, P_2 und P_3 so liegen, daß sie von jedem der Punkte A, B und C aus auf je einem Bild erfaßt werden können.

Die photogrammetrische Lösung der vorliegenden Aufgabe kommt insbesondere dann in Frage, wenn die Punkte P_1, P_2 und P_3 in Bewegung oder nur vorübergehend sichtbar sind.

Besteht die Festlegung der Punkte P_1, P_2 und P_3 in der Bestimmung ihrer Koordinaten (x_1, y_1), (x_2, y_2) und (x_3, y_3), so braucht man zur Ermittlung dieser sechs Unbekannten sechs Gleichungen; diese auf Grund der sechs Winkel α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1 und γ_2 sich ergebenden Gleichungen haben zunächst eine für ihre Auflösung unbequeme Form, mit Hilfe von Näherungswerten $(x_{0,1}, y_{0,1})$, $(x_{0,2}, y_{0,2})$ und $(x_{0,3}, y_{0,3})$ für die gesuchten Koordinaten kann man sie aber mit Benützung des Taylor'schen Satzes linear machen und damit auf eine für ihre Auflösung bequeme Form bringen.

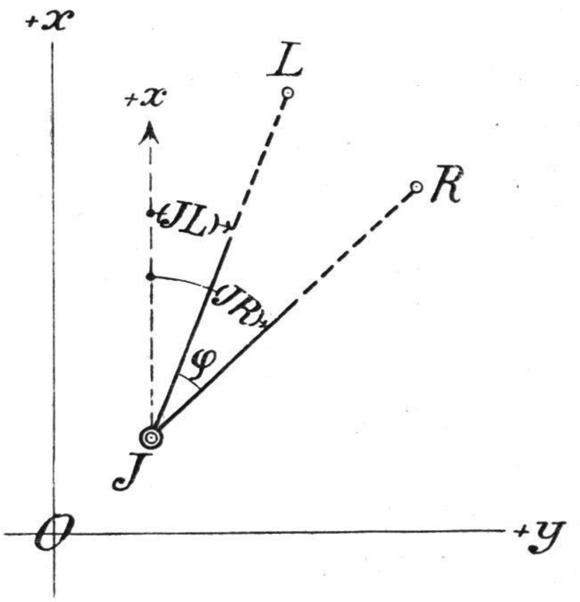

Fig. 2.

Wurde in einem Punkt I (Fig. 2) mit den Koordinaten (x_i, y_i) zwischen einem Punkt L — „Punkt links" — mit den Koordinaten (x_l, y_l) und einem Punkt R — „Punkt rechts" — mit den Koordinaten (x_r, y_r) ein

* Ammermann (vergl. «Zeitschrift für Vermessungswesen» 1922, Seite 290) bezeichnet die vorliegende Aufgabe als «eine Doppelwinkel-Schnittaufgabe».

Winkel φ gemessen, und sind (IL) und (IR) die Richtungswinkel der Geraden IL und IR, so besteht die Gleichung

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\{(IR)-(IL)\} = \frac{\operatorname{tg}(IR)-\operatorname{tg}(IL)}{1+\operatorname{tg}(IR)\operatorname{tg}(IL)},$$

die man auch so schreiben kann:

$$\operatorname{tg}(IL) - \operatorname{tg}(IR) + \operatorname{tg}(IL)\operatorname{tg}(IR)\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi = 0.$$

Beachtet man, daß

$$\operatorname{tg}(IL) = \frac{y_l - y_i}{x_l - x_i} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}(IR) = \frac{y_r - y_i}{x_r - x_i},$$

so geht die zuletzt geschriebene Gleichung über in

$$\frac{y_l - y_i}{x_l - x_i} - \frac{y_r - y_i}{x_r - x_i} + \frac{y_l - y_i}{x_l - x_i}\cdot\frac{y_r - y_i}{x_r - x_i}\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi = 0. \qquad (1)$$

Sind nun $(x_{0,l}, y_{0,l})$ und $(x_{0,r}, y_{0,r})$ Näherungswerte für die Koordinaten von L und R, und setzt man

$$\left.\begin{aligned} x_l &= x_{0,l} + \Delta x_l & y_l &= y_{0,l} + \Delta y_l \\ x_r &= x_{0,r} + \Delta x_r & y_r &= y_{0,r} + \Delta y_r \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

wobei Δx_l, Δy_l; Δx_r und Δy_r die an den Näherungswerten anzubringenden Verbesserungen bedeuten, so erhält man aus der Gleichung (1)

$$\frac{y_{0,l} + \Delta y_l - y_i}{x_{0,l} + \Delta x_l - x_i} - \frac{y_{0,r} + \Delta y_r - y_i}{x_{0,r} + \Delta x_r - x_i} + \frac{y_{0,l} + \Delta y_l - y_i}{x_{0,l} + \Delta x_l - x_i} \cdot \frac{y_{0,r} + \Delta y_r - y_i}{x_{0,r} + \Delta x_r - x_i}\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi = 0.$$

Wendet man auf diese Gleichung den Taylor'schen Satz an, und vernachlässigt man dabei die Glieder zweiter und höherer Ordnung, so ergibt sich an Stelle der Gleichung (1) die lineare Gleichung

$$\begin{aligned}
&\left\{-\frac{y_{0,l} - y_i}{(x_{0,l} - x_i)^2} - \frac{y_{0,l} - y_i}{(x_{0,l} - x_i)^2}\cdot\frac{y_{0,r} - y_i}{x_{0,r} - x_i}\operatorname{tg}\varphi\right\}\Delta x_l \\
&+\left\{\frac{1}{x_{0,l} - x_i} + \frac{1}{x_{0,l} - x_i}\cdot\frac{y_{0,r} - y_i}{x_{0,r} - x_i}\operatorname{tg}\varphi\right\}\Delta y_l \\
&+\left\{\frac{y_{0,r} - y_i}{(x_{0,r} - x_i)^2} - \frac{y_{0,l} - y_i}{x_{0,l} - x_i}\cdot\frac{y_{0,r} - y_i}{(x_{0,r} - x_i)^2}\operatorname{tg}\varphi\right\}\Delta x_r \\
&+\left\{-\frac{1}{x_{0,r} - x_i} + \frac{y_{0,l} - y_i}{x_{0,l} - x_i}\cdot\frac{1}{x_{0,r} - x_i}\operatorname{tg}\varphi\right\}\Delta y_r \\
&+\left\{\frac{y_{0,l} - y_i}{x_{0,l} - x_i} - \frac{y_{0,r} - y_i}{x_{0,r} - x_i} + \frac{y_{0,l} - y_i}{x_{0,l} - x_i}\cdot\frac{y_{0,r} - y_i}{x_{0,r} - x_i}\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi\right\} = 0 \qquad (3)
\end{aligned}$$

(Schluß folgt.)