**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

**Herausgeber:** Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

**Band:** 19 (1921)

**Heft:** 5

**Artikel:** Zur Praxis einiger Ausgleichungsaufgaben [Fortsetzung]

**Autor:** Hammer, E.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-186803

Am Schlußbankett im „Du Pont“ waren 80 Herren anwesend, und im Verlaufe der Diskussion wuchs die Teilnehmerzahl auf zirka 120. Herr Präsident Baumgartner verdankte im Namen der Versammlung mit treffenden Worten den Herren Referenten die Vorträge bestens und schloß seine Ansprache, indem er mit Freude das gute Einvernehmen zwischen Vermessungsingenieur und Grundbuchgeometer hervorhob und damit der Hoffnung Ausdruck verlieh, daß dies dem guten Gelingen der Grundbuchvermessung unseres Schweizerlandes dienen möge. Nach den Worten des Herrn Präsidenten wurde die Diskussion eröffnet, welche erfreulicherweise sehr rege benutzt wurde. Die vielen Fragen wurden von den einzelnen Referenten jeweils in erschöpfender Weise beantwortet. Einläßlich darauf einzugehen, fehlt hier der Raum. Eine Sammlung zugunsten der notleidenden Kollegen in Oesterreich (Zeitschrift) ergab den schönen Betrag von Fr. 120.—.

Obwohl um 6 Uhr der offizielle Schluß der lehrreichen Tagung verkündet wurde, war dies vielmehr erst das Zeichen des Präsidenten zur Ueberleitung vom ernsten Teil der Arbeit zum darauf folgenden fröhlichen, zweiten Teil. Die flotte Stimmung brachte es mit sich, daß manches frohe Lied zur Laute erklang und daß manche alte Erinnerung wieder aufgefrischt wurde. Nur zu bald kam die Stunde des Abschiedes, in welcher man mit herzlichem Händedrucke und mit einem

„Auf Wiedersehen im nächsten Jahre!“

auseinanderging.

*Horgen*, im März 1921. *Henri Huber*.

---

## Zur Praxis einiger Ausgleichungsaufgaben.

Von *E. Hammer*, Stuttgart.

(Fortsetzung.)

Die Ausrechnung der einzelnen v gibt (27), was mit (14) zu vergleichen ist (Quadratsumme genügend stimmend mit der

$$(27)\quad \begin{cases} v_1 = +5{,}0\ \text{cm} \\ v_2 = -4{,}3 \\ v_3 = +2{,}2 \\ v_4 = -3{,}3 \end{cases}$$

aus obiger Rechnung, nämlich 59,5); die Verteilung der v in (27) ist ansprechender als die in (14). Zwar ist hier $m_1 = \sqrt{\frac{59}{4-3}} = \pm 7{,}6\ \text{cm}$ (28), also nicht kleiner, sondern sogar etwas größer als in (15) und der mittlere Fehler von z′ ist (29) $m_{z'} = \frac{7,6}{\sqrt{4,3}} = \pm 3,1$, also etwas größer als z′ selbst, dieses also unsicher bestimmt; endlich zeigen (30) $m_x = \pm 4,5$ cm und $m_y = \pm 9,3$ cm etwas größere Beträge als in (16); gleichwohl wird man es für wahrscheinlich halten dürfen, daß das Meter der Lattenmessung um den kleinen Betrag von etwa $^1/_4$ mm verkürzt werden sollte, um es mit dem Koordinatenmeter vergleichbar zu machen. Dieser Betrag braucht nicht in der Lattenlänge zu liegen, sondern kann durch die *Messungsweise* bedingt sein. Bei zahlreichern und besonders *feinern* Längenmessungen als hier in dem Beispiel angenommen sind, wird man bei der vorliegenden Aufgabe jedenfalls gut tun, zu versuchen, ob nicht die Einführung eines z-Gliedes angezeigt ist, das den oben besprochenen systematischen Fehler berücksichtigt.

Bei dem vorliegenden Zahlenbeispiel mit fast gleich langen L, bei deren Gewichtsfestsetzung ja auch von der Verschiedenheit abgesehen wurde, könnte man diese Untersuchung eines regelmäßigen Fehlers noch abkürzen, indem man die c′ in (22) als gleich betrachtet und dann nach dem *Schreiber*schen Verfahren z′ eliminiert. Man hat dazu bekanntlich von allen a den Betrag $\frac{[a]}{n}$, von allen b den Betrag $\frac{[b]}{n}$, von allen $l$ den Betrag $\frac{[l]}{n}$ abzuziehen, womit die folgende Tafel der Koeffizienten der Verbesserungsgleichungen und der Normalgleichungen und Auflösung der nur noch zwei Normalgleichungen (Rechenschieber) sich ergibt:

| | a′ | b′ | $l'$ | a′a′ | a′b′ | a′$l'$ | b′b′ | b′$l'$ | $l'l'$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | −0,83 | −0,13 | +2 | 0,69 | +0,11 | −1,66 | 0,02 | −0,26 | 4 | |
| | −0,87 | +0,48 | −5 | 0,76 | −0,42 | +4,35 | 0,23 | −2,40 | 25 | |
| (31) | +1,10 | +0,26 | +7 | 1,21 | +0,29 | +7,70 | 0,07 | +1,82 | 49 | (32) |
| | +0,60 | −0,62 | −4 | 0,36 | −0,37 | −2,40 | 0,38 | +2,48 | 16 | |
| Probe | 0 | −0,75 | 0 | 3,02 | −0,39 | +7,99 | 0,70 | +1,64 | 94 | |
| | | +0,74 | | | | | | | | |

Das Ergebnis der ziemlich vereinfachten Rechnung (33) stimmt also noch fast vollständig überein mit dem von (24) bis (26′).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\underline{3{,}02}\,x - 0{,}39\,y + 7{,}99 = 0$ | $\underline{94}$ | $\underline{0{,}70}\,y - 0{,}39\,x + 1{,}64 = 0$ | $\underline{94}$ | |
| | $0{,}70 \quad + 1{,}64$ | $-21$ | $3{,}02 \quad + 7{,}99$ | $-4$ | |
| | $-0{,}05 \quad + 1{,}03$ | | $-0{,}22 \quad + 0{,}91$ | | |
| (33) | $\underline{0{,}65}\,y + 2{,}67 = 0$ | $73$ | $\underline{2{,}80}\,x + 8{,}90 = 0$ | $90$ | (33) |
| | | $-11$ | | $-28$ | |
| | $y = -\frac{2{,}67}{0{,}65} = -4{,}1$ cm | $62$ | $x = -\frac{8{,}90}{2{,}80} = -3{,}2$ cm | $62$ | |
| | $g_y = 0{,}65$ | $= (vv)$ | $g_x = 2{,}80$ | $= [vv]$ | |

Auch weichen die nach (31) und (33) sich ergebenden v, nämlich:

$$(34) \begin{cases} v_1 = +5{,}2 \text{ cm} \\ v_2 = -4{,}2 \;\;,, \\ v_3 = +2{,}4 \;\;,, \\ v_4 = -3{,}4 \;\;,, \end{cases}$$

(Rechenprobe *dieser* Art von Ausgleichung bekanntlich $[v] = 0$), deren Quadratsumme mit 62 zur Ausgleichung stimmt, im Maximum um nur 2 mm von den v in (27) ab. Das z-Glied (rund $^1/_4$ mm pro 1 Meter Verkürzung der gemessenen L) findet sich hier erst nachträglich. Indessen wird dieser Fall sehr nahezu gleicher L bei unserer Aufgabe in Wirklichkeit nicht vorkommen und so der Ansatz der Verbesserungsgleichungen nach (23) vorzuziehen sein.

---

**II.** Die zweite dieser von *Eggert* behandelten Aufgaben ist die Seite 147 am angegebenen Ort aufgestellte Ausgleichung eines ebenen Dreiecks, in dem alle sechs Stücke gemessen sind; sie hat mit Rücksicht auf *Polygon*ausgleichung vielleicht mehr praktisches Interesse als die vorstehende. Die Daten bei *Eggert* lauten wie in (35). Da *drei* unabhängige Stücke des Dreiecks, unter denen also mindestens *eine* Seite sein muß, genügen, um das Dreieck „einfach“ (ohne Ueberbestimmung) geometrisch zu

$$(35) \left\{ \begin{array}{l|l} \alpha = 28^0\,12'\,52'' & a = 79{,}306 \\ \beta = 136^0\,03'\,05'' & b = 116{,}406 \\ \gamma = 15^0\,43'\,55'' & c = 45{,}501 \end{array} \right\}$$

bestimmen, während hier 6 Stücke gemessen sind, so müssen $6 - 3 = 3$ Bedingungsgleichungen vorhanden sein. Zur Gewichtsbestimmung ist a. a. O. angenommen: $m_\alpha = m_\beta = m_\gamma = \pm 7''$; $m_a = \pm 8$ mm, $m_b = \pm 12$ mm, $m_c = \pm 5$ mm. Läßt man also dem mittlern Fehler $\pm 5$, der bei den Winkeln $''$ und bei den Seiten mm bedeutet, das Gewicht 1 entsprechen, so sind als Gewichte der gemessenen Stücke anzunehmen:

$$(36) \quad g_\alpha = g_\beta = g_\gamma = \frac{1}{2}; \qquad g_a = \frac{1}{3}, \; g_b = \frac{1}{6}, \; g_c = 1.$$

**6.** *Die Bedingungsgleichungen.* Als die vorhandenen drei unabhängigen Bedingungsgleichungen nimmt *Eggert* die folgenden an, deren erste man als die einfachsten Koeffizienten aufweisend jedenfalls mitsprechen lassen wird, nämlich die Winkelsummengleichung (***Su***-Gl.) und ferner zwei Gleichungen, die sich aus dem Sinussatz des Dreiecks ergeben, also:

(37) eine ***Su***-Gl. und zwei ***Si***-Gleichungen.

Die Gleichungen lauten also (hier und in allem folgenden bedeuten die stark *unterstrichenen* Buchstaben oder Zahlen die *ausgeglichenen* Werte, also z. B. $\underline{c} = c + v_c$, $\underline{\alpha} = \alpha + v_\alpha$) wie in (38):

$$(38)\left\{\begin{array}{l} \underline{\alpha} + \underline{\beta} + \underline{\gamma} - 180^0 = 0 \\ \underline{a} \cdot \sin \underline{\beta} - \underline{b} \cdot \sin \underline{\alpha} = 0 \\ \underline{a} \cdot \sin \underline{\gamma} - \underline{c} \cdot \sin \underline{\alpha} = 0 \end{array}\right.$$

Die zwei letzten (wobei an Stelle der dritten Gleichung natürlich auch die *letzte* Form des Sinus-Satzes $\underline{b} \cdot \sin \underline{\gamma} = \underline{c} \cdot \sin \underline{\beta}$ hätte gewählt werden können) sind erst linear zu machen, was sehr einfach ist. Das Ergebnis der Ausgleichung, a. a. O. S. 150, ist bei 6-stelliger log-Rechnung der $w_2$ und $w_3$:

$$(39)\left\{\begin{array}{ll|ll} v_\alpha & = -3''22 & v_a & = +1{,}54 \text{ mm} \\ v_\beta & = +0''80 & v_b & = +17{,}40 \;,, \\ v_\gamma & = +10''42 & v_c & = -8{,}30 \;,, \end{array}\right\}$$

mit der $[gvv] = 179{,}9$ (40), womit $-[w\,k] = 180{,}6$ aus den Korrelaten und den Widersprüchen der Bedingungsgleichungen genügend stimmt. Damit wird der mittlere Fehler der Gewichtseinheit $m_1 = \sqrt{\frac{180}{3}} = \pm 7{,}75$ ('' für die Winkel, mm für die Seiten).

Das Beispiel eines Dreiecks mit *allen* 6 gemessenen Stücken ist sehr geeignet, die Notwendigkeit vor Augen zu führen, sich von der gegenseitigen Unabhängigkeit der aufgestellten Bedingungsgleichungen zu überzeugen. Ich würde z. B. wünschen, daß ein Anfänger in der Ausgleichungsrechnung sich bei Gelegenheit dieser Aufgabe fragt: Weshalb sollen in den Gleichungen (38) a und $\alpha$ je zweimal, b, c, $\beta$, $\gamma$ aber nur einmal vorkommen? Symmetrischer wäre doch, alle 6 Stücke je zweimal vorkommen zu lassen, d. h. auf die *erste* Gleichung (38), die ***Su***-Gleichung, zu verzichten, und als die drei Bedingungsgleichungen alle *drei* Formen des Sinus-Satzes in vollständiger, zyklischer Vertauschung anzuschreiben, d. h. die *drei* folgenden Bedingungsgleichungen zu verwenden:

$$(41)\left\{\begin{array}{l} \underline{a}\cdot\sin\underline{\beta} - \underline{b}\cdot\sin\underline{\alpha} = 0, \\ \underline{b}\cdot\sin\underline{\gamma} - \underline{c}\cdot\sin\underline{\beta} = 0, \\ \underline{c}\cdot\sin\underline{\alpha} - \underline{a}\cdot\sin\underline{\gamma} = 0. \end{array}\right.$$

Er würde damit, bei ebenfalls 6-stelliger log-Rechnung, für die Widersprüche in den drei Gleichungen erhalten in Einh.$_6$:
(42) $w_1 = +5{,}8$, $w_2 = -16{,}4$, $w_3 = +8{,}8$ und als Koeffizienten in den Korrelatenausdrücken (hier ebenfalls zweckmäßiger Verbesserungsgleichungen zu nennen) die folgende Zusammenstellung und damit das in (44) folgende System

| | | $v_\alpha$ | $v_\beta$ | $v_\gamma$ | $v_a$ | $v_b$ | $v_c$ | $w$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Bedingungs-Gleichung | I | −0,50 | −0,28 | · | +0,69 | −0,47 | · | +5,8 | (43) |
| | II | · | +0,16 | +0,55 | · | +0,27 | −0,69 | −16,4 | |
| | III | +0,19 | · | −0,37 | −0,27 | · | +0,47 | +8,8 | |
| $\frac{1}{g} =$ | | 2 | 2 | 2 | 3 | 6 | 1 | | |

von Normalgleichungen der Korrelaten $k_1$, $k_2$, $k_3$. Löst er aber nun dieses Gleichungssystem auf, so findet er zunächst

$$\begin{array}{llll} \underline{3{,}41}\ k_1 & -0{,}86\ k_2 & -0{,}75\ k_3 & +5{,}8 = 0 \\ & \quad 1{,}57 & -0{,}73 & -16{,}4 \\ & & \quad 0{,}78 & +8{,}8 \end{array}$$

für $k_3$ ganz genau $\frac{0}{0}$. Die Aufgabe ist also mit *diesem* Ansatz (41) *nicht* lösbar. Weshalb? Der Leser beantworte sich die Frage selbst.

7. *Andere Bedingungsgleichungen* als in (38). Dagegen ist nun allerdings doch die Frage berechtigt: Gibt es nicht doch Gründe, bei dieser Aufgabe zum Teil andere Bedingungsgleichungen zu wählen als (38)? Daß man die *Su*-Gleichung der Winkel als die *eine* Gleichung beibehalten wird, ist schon oben angedeutet, sie hat die einfachsten möglichen Koeffizienten; an die Stelle des Sinus-Satzes aber kann auch jede beliebige andere zwischen Seiten und Winkeln eines ebenen Dreieckes bestehende Beziehung treten. Was ist der Sinus-Satz? Er sagt in der Form (41): Die Summe der Projektionen der drei Seiten eines Dreiecks auf die Richtung *senkrecht* zu einer Seite des Dreiecks (nämlich zu *der* Seite, die in der betreffenden Satzform nicht vorkommt), ist Null; z. B. heißt $a\cdot\sin\beta - b\cdot\sin\alpha = 0$ die Summe der Projektionen der drei Dreiecksseiten auf die Richtung senkrecht zu c (in der c selbst die Projektion 0 gibt) ist 0, und

entsprechend für die zwei andern Formen von (41). Nimmt man also das System der Bedingungsgleichungen (38), so stellt man neben die *Su*-Gleichung der Winkel zwei *Si*-Bedingungen, von denen die erste sagt: die Projektionssumme der drei Seiten des Dreiecks auf die Richtung senkrecht zu c muß 0 sein; die zweite ebenso auf die Richtung senkrecht zu b. Allgemein also eben: Summe der Projektionen der drei Seiten auf *zwei verschiedene* Richtungen je = Null.

Es liegt nun also nahe, als solche zwei verschiedene Richtungen nicht zwei um einen beliebigen (Dreiecks-) Winkel verschiedene zu wählen, sondern zwei zueinander senkrechte, nämlich neben der Richtung senkrecht zu einer Dreiecksseite (also die Richtung der einen Höhe des Dreiecks), was den „Sinus-Satz" ergibt, die Richtung dieser Seite selbst, was den „Cosinus-Satz" oder „Projektionssatz" des Dreiecks gibt; z. B. also neben die jedenfalls beizubehaltende Gleichung (38) 1 zu stellen die zwei weitern Gleichungen:

$$\begin{cases} \underline{a}\cdot\sin\underline{\gamma} - \underline{c}\cdot\sin\underline{\alpha} = 0 & \text{(„Sinus-Satz" mit a, c, Projektion des Dreiecks auf die Richtung } h_b\text{)} \\ \underline{a}\cdot\cos\underline{\gamma} + \underline{c}\cdot\cos\underline{\alpha} - \underline{b} = 0 & \text{(„Projektionssatz" auf die Seite b).} \end{cases}$$

Die Reihenfolge der Bedingungsgleichungen nach vorstehender Ueberlegung in unserem Beispiel mag also sein:

$$\begin{array}{r} \text{I.} \\ \text{II.} \\ \text{III.} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \underline{\alpha} + \underline{\beta} + \underline{\gamma} - 180 = 0 \\ \underline{a}\cdot\cos\underline{\gamma} + \underline{c}\cdot\cos\underline{\alpha} - \underline{b} = 0 \\ \underline{a}\cdot\sin\underline{\gamma} - \underline{c}\cdot\sin\underline{\alpha} = 0 \end{array} \right\} \quad (45)$$

Damit erhalten wir als Bedingungsgleichungen für die v, nachdem die II. und III. Gleichung *linear* gemacht sind:

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{I.} \quad v_\alpha + v_\beta + v_\gamma - w_1 = 0 \\ \text{II.} \quad -\frac{c}{\rho}\sin\alpha\cdot v_\alpha - \frac{a}{\rho}\cdot\sin\gamma\cdot v_\gamma + \cos\gamma\cdot v_a + \cos\alpha\cdot v_c \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - v_b + w_2 = 0 \\ \text{III.} \quad -\frac{c}{\rho}\cos\alpha\cdot v_\alpha + \frac{a}{\rho}\cos\gamma\cdot v_\gamma + \sin\gamma\cdot v_a - \sin\alpha\cdot v_c \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + w_3 = 0 \end{array} \right.$$

Die Ausrechnung für die w gibt, bei II. und III. ebenfalls mit 6-stelligen Logarithmen, wie in **6.**:

$w_1 = -8{,}0$, $w_2 = +24{,}0$, $w_3 = -8{,}8$, und für die Koeffizienten der v die folgende Tabelle:

| | | $v_\alpha$ | $v_\beta$ | $v_\gamma$ | $v_a$ | $v_b$ | $v_c$ | w | (k) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (47) | I. | 1,00 | 1,00 | 1,00 | · | · | · | —8,0 | (+0,41) |
| | II. | −0,10 | · | −0,10$_4$ | +0,96 | —1 | +0,88 | +24,0 | (−2,89) |
| | III. | −0,19 | · | +0,37 | +0,27 | · | —0,47 | − 8,8 | (+12,05) |
| | $\frac{1}{g}$ | 2 | 2 | 2 | 3 | 6 | 1 | | |

$$(48)\quad \begin{cases} \underline{6{,}00}\,k_1 - 0{,}41\,k_2 + 0{,}36\,k_3 - 8{,}0 = 0 \\ \qquad\quad \underline{9{,}59} \quad + 0{,}33 \quad + 24{,}0 \\ \qquad\qquad\qquad \underline{0{,}79} \quad -8{,}8 \end{cases}$$

Die Normalgleichungen der Korrelaten $k_1$, $k_2$, $k_3$ werden damit die links in (48) mit den *erforderlichen* Zahlen angeschriebenen Gleichungen; ihre Auflösung gibt:

(49) $k_3 = +12{,}05$, $k_2 = —2{,}89$, $k_1 = +0{,}41$, wie oben in (47) gleich rechts beigefügt ist. Es ergibt sich damit:

(50) $[g\,v\,v] = —[w\,k] = 179$; ferner erhält man gemäß (47) für die einzelnen v die in (51) zusammengestellten Zahlen, deren $[g\,v\,v] = 177$ genügend mit (50) und ebenso mit der *Eggert*schen Zahl, vgl. (40) stimmt, so daß auch $m_1$ nicht merklich von der *Eggert*schen Zahl abweicht.

(Fortsetzung folgt.)

## Sammlung «Pro Austria».

Mitteilung über Eingänge:

| | | |
|---|---|---|
| Von H. H., Bern . . . . . . . . . . . . . . . | Fr. | 10. — |
| Von J. Baltiner, Basel . . . . . . . . . . . . . | » | 14. — |
| Von E. Vogel, Grundbuchgeometer, Lyß . . . . | » | 10. — |
| Sammlung anläßlich des Vortragskurses in Zürich | » | 120. — |
| Von Ungenannt . . . . . . . . . . . . . . . | » | 16. — |
| Bis 1. April 1921 eingelaufen . . . . . . . . . | Fr. | 170. — |

Die Sammlung wird fortgesetzt und den Kollegen bestens empfohlen.

## Zeitschriftenschau.

1. *Schweizerische Bauzeitung. Heft No. 15.* Wettbewerb für den Ausbau des Länggaß-Quartieres in Bern (Fortsetzung). — *Heft No. 17.* Wettbewerb für den Ausbau des Länggaß-Quartieres in Bern (Schluß). Eine Station für drahtlose Telegraphie in der