Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik =

Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 19 (1921)

Heft: 4

Artikel: Zur Praxis einiger Ausgleichungsaufgaben [Fortsetzung]

Autor: Hammer, E.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-186798

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik

ORGAN DES SCHWEIZ. GEOMETERVEREINS
REVUE TECHNIQUE SUISSE DES MENSURATIONS ET AMÉLIORATIONS FONCIÈRES

ORGANE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES GÉOMÈTRES

Redaktion: F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)

Ständiger Mitarbeiter für Kulturtechnik: Prof. C. ZWICKY, Zürich, Bergstr. 131 Collaborateur attitré pour la partie en langue française: CH. ROESGEN, ingénieur-géomètre, Genève, 11, rue de l'Hôtel-de-Ville — Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats

□ Expedition, Inseraten- und Abonnements-Annahme: □ BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR VORM. G. BINKERT, WINTERTHUR

Jährlich 12 Nummern (erscheinend am zweiten Dienstag jeden Monats)

und 12 Inseraten-Bulletins (erscheinend am vierten Dienstag jeden Monats) No. 4

des XIX. Jahrganges der "Schweiz. Geometerzeitung".

12. April 1921

Jahresabonnement Fr. 12.— (unentgeltlich für Mitglieder)

Inserate:

50 Cts. per 1spaltige Nonp.-Zeile

Zur Praxis einiger Ausgleichungsaufgaben.

Von E. Hammer, Stuttgart.

(Fortsetzung.)

3. Nochmalige Verringerung des Rechenaufwandes. Versuchen wir (vgl. ebenfalls Hr. II), ob nicht noch geringerer Rechenaufwand hier zum Ziele führt, indem wir die a, b auf 1 Einh., abrunden. Nachdem die Lo mit der Quadrattafel bestimmt sind, sieht dann die Rechnung wie folgt aus und es ist dann zu ihrer Durchführung keine Ziffer mehr zu schreiben als hier folgt, und kein Rechenhilfsmittel irgend welcher Art, nicht einmal ein Rechenschieber mehr notwendig, einschließlich der Auflösung der Normalgleichungen in (18):

	a	b	l (cm)	aa	ab	a <i>l</i>	bb	b <i>l</i>	11
(17)	-0,9	-0,4	+4	0,81	+0,36	-3,6	0,16	-1,6	16
	-1,0	+0,2	_3	1,00	-0,20	+3,0	0,04	-0,6	9
	+1,0	+0,0	+9	1,00		+9,0			81
	+0,5	-0,9	-2	0,25	-0,45	-1,0	0,81	+1,8	4
			7	3,1	0,3	+7,4	1,0	-0,4	110

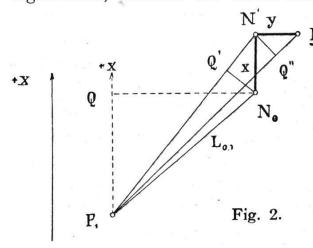
Selbst diese Rechnung stimmt also noch in den Ergebnissen auf wenige Millimeter mit der Eggertschen und der in 2. angegebenen überein, sowohl was x_n y_n , als die v betrifft; auch [v v] mit hier 92 bleibt wie in 2. bestehen, und damit, vgl. gx und gy, die m. F. der berechneten Abszisse und Ordinate. Daß also auch noch hier praktisch mehr als genügende Genauigkeit erreicht ist, ist jedenfalls angesichts der Klagen über den "Rechenaufwand bei der Anwendung der kleinsten Quadrate" (beliebter Einwand von solchen, die die Sache nicht kennen) bemerkenswert, wenn man auch meist bei der in 2. eingehaltenen Rechnungsschärfe (Anwendung des Rechenschiebers) stehen bleiben wird. Man muß in der Tat oft staunen über den ganz überflüssigen Dezimalenluxus, der bei den einfachsten Ausgleichungen der niedern Geodäsie getrieben wird und dessen Fortsetzung fast nur durch die Anwendung der die überflüssigen Stellen ohne weitern Rechenaufwand mitliefernden Rechenmaschinen zu erklären ist. Man sollte bei diesen einfachen Aufgaben der Land- und Feldmessung mit z. B. nur zwei Unbekannten viel mehr als es auch heute noch zu geschehen scheint, von der "exakten" Arbeit mit der Rechenmaschine absehen zu Gunsten der einfachern mechanisch-logarithmischen Rechnung mit Hilfe des Rechenschiebers.

Eine mit der Frage nach der erforderlichen Rechenschärfe zusammenhängende ist noch die nach der notwendigen Annäherung der Näherungswerte der Unbekannten an ihre endgültigen Werte, besonders bei von Haus aus nicht linearen Verbesserungsgleichungen. Es ist sehr einfach zu sehen, daß bei vermittelnden Beobachtungen in dem Falle schon von Anfang an linearer Beziehungen zwischen Messungen und Unbekannten, wo bekanntlich die praktisch zweckmäßige Durchführung

der Zahlenrechnung ebenfalls fast ausnahmslos schon die Einführung von Näherungswerten für die Unbekannten verlangt, der Grad der Annäherung dieser Näherungswerte theoretisch ganz ohne Einfluß auf die Endwerte der Unbekannten ist, d. h. für diese Endwerte stets (theoretisch) genau dieselben Zahlen erhalten werden, was auch die gebrauchten Näherungswerte sein mögen. Bei von Anfang an nicht linearem Zusammenhang zwischen Messungen und Unbekannten müssen Näherungswerte der Unbekannten eingeführt werden, und hier ist nun selbstverständlich das Ergebnis der Ausgleichung nicht mehr unabhängig vom Grad der Annäherung dieser Werte; dieser Grad der Annäherung der benützten Näherungswerte kommt auch hier nur solange praktisch nicht in Betracht, als bei der Entwicklung nach dem Taylorschen Satz die kleinen Größen zweiter Ordnung gegen die erster Ordnung, die nur die ersten Potenzen der gesuchten Korrektionen x, y... der Näherungswerte enthalten, tatsächlich nicht in Betracht kommen.

Es ist dem Anfänger sehr zu empfehlen, an bestimmten einfachen Aufgaben, wie der vorliegenden, selbst empirisch festzustellen, welcher Annäherungsgrad der Näherungswerte erforderlich ist; er mag z. B. die vorstehende Aufgabe mit der in 2. festgehaltenen Rechenschärfe, die ja für jede vollständig durchgeführte Ausgleichung nur wenige Minuten in Anspruch nimmt, mit Annahmen für (xo yo) durchrechnen, die von denen in (3) um je 10 cm, 20 cm, 50 cm, 1 m abweichen (beachte dabei auch die für schlanke Rechnung beste Wahl des Längenmaßes). Er wird dadurch den Wert "guter" Näherungswerte für die Bequemlichkeit der Durchführung der Ausgleichung schätzen lernen und zugleich ein empirisch begründetes Urteil über den Grad der erforderlichen Annäherung gewinnen. Ich möchte auf eine empirische Untersuchung dieser Art bei einer verwandten Aufgabe (Rechnung eines trigonometrischen Neupunktes durch Vorwärtseinschneiden) hinweisen, die kürzlich Aubell, ebenfalls wesentlich im didaktischen Interesse angestellt hat (Oesterreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, XVIII, 1920, Seiten 80 bis 85).

4. Graphische Ableitung der linearen Verbesserungsgleichungen im Falle nicht linearer Beziehungen zwischen Messungen und Unbekannten bei vermittelnden Beobachtungen. Schon oft und wit Recht ist empfohlen worden, besonders dem Anfänger zur Verifikation der Entwicklung nach dem Taylorschen Satz (so einfach auch diese bei den wichtigsten vorkommenden Aufgaben zu sein pflegt, so beim Vorwärts- oder Rückwärtseinschneiden eines trigonometrischen Neupunktes), womöglich der algebraischen Entwicklung eine geometrische Veranschaulichung zur Seite zu stellen. Dies ist wichtiger als algebraische "Vereinfachungen" einfachster Differentiationen; vgl. meine Bemerkungen zu einem Aufsatz von Werkmeister, Oesterreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, 1915, Seiten 11 bis 17. Ganz ähnlich bei der vorliegenden Aufgabe: die einfache geometrische Anschauung gestattet sofort die Ablesung des Differentiationsergebnisses, nämlich die Ausdrücke für die Koeffizienten a, b



Nach (4). Der NäherungsNach (4). Umbekannten der Ausgleichung)
x und y nach (1) und
dann nach (1) (endgültige
Lage des Neupunktes) verschoben; wie ändert sich
damit die Länge (4). UmbeNach (5) verschoben; wie ändert sich
damit die Länge (4). UmbeNach (5) verschoben; wie ändert sich
damit die Länge (4). UmbeNach (5) verschoben; wie ändert sich
damit die Länge (4). UmbeNach (5) verschoben; wie ändert sich
damit die Länge (4). UmbeNach (5) verschoben; wie ändert sich
damit die Länge (4). UmbeNach (5) verschoben; wie ändert sich
damit die Länge (4). UmbeNach (5) verschoben; wie ändert sich
damit die Länge (4). UmbeNach (5) verschoben; wie ändert sich
damit die Länge (4). UmbeNach (5) verschoben; wie ändert sich
damit die Länge (4). UmbeNach (5) verschoben; wie ändert sich
damit die Länge (4). UmbeNach (6) verNach (6)

gleiche Figur 2) von N_0 das Lot N_0 Q' auf P_1 N' und von N' das Lot N' Q" auf P_1 N, so werden damit zwei rechtwinklige Dreiecke N_0 N' Q' und N' N Q" mit den kleinen Hypotenusen x und y gebildet, die praktisch genau dem Dreieck P_1 N_0 Q mit Hypotenuse L_0 , und Katheten x_0-x_1 und y_0-y_1 ähnlich sind; da ferner praktisch genau $\overline{P_1}$ Q' = $\overline{P_1}$ $\overline{N_0}$ ist, so liest man mit Hilfe dieser zwei kleinen Dreiecke einfach durch Proportion ab:

$$\underline{L}_{1} = P_{1} \underline{N} = L_{0.1} + Q' N' + Q'' \underline{N} \text{ oder}$$

$$(19) \qquad L_{1} + v_{1} = L_{0.1} + \frac{x_{0} - x_{1}}{L_{0.1}} \cdot x + \frac{y_{0} - y_{1}}{L_{0.1}} \cdot y,$$

wobei selbstverständlich wieder gleichgültig ist, ob im Nenner der zwei kleinen Zusatzglieder rechts L₀,1 oder L₁ steht; es ist also in Uebereinstimmung mit (4):

$$a_1 = \frac{x_0 - x_1}{L_1} = -\frac{x_1 - x_0}{L_1}; \quad b_1 = \frac{y_0 - y_1}{L_1} = -\frac{y_1 - y_0}{L_1} \text{ u.s.f.},$$

während man die l der Verbesserungsgleichungen, wie immer, dadurch erhält, daß je von dem Wert, den die "Funktion", hier das jeweilige L, annimmt mit Einsetzung der Näherungswerte (x_0, y_0) , das gemessene L abzieht, d. h. setzt:

 $l_1 = L_{0,1} - L_1,$ $l_2 = L_{0,2} - L_2,...$ wie in (5) geschehen.

5. Regelmäßige Fehler. Schon in Hr. I habe ich darauf hingewiesen, daß bei der vorliegenden Aufgabe ein systematischer Fehler besonders bemerkenswert ist, ein etwaiger merklicher Unterschied zwischen dem Meter des Koordinatennetzes und dem Meter der Längenmessungen L, sich unmittelbar kundgebend im Verhalten der Vorzeichen der v. Es ist dort auch gezeigt, wie augenfällig ein solcher Fehler bei der graphischen Behandlung dieser Aufgabe wird, und wie er zu bestimmen ist. Nicht umständlicher ist die rechnerische Behandlung der Frage, ob ein solcher Fehler nachweisbar ist oder wahrscheinlich gemacht werden könne. Die Vorzeichen der v in (14) legen in unserem Beispiel nahe, einem regelmäßigen Fehler der angegebenen Art nachzuspüren; neben den zwei großen v mit dem Vorzeichen + sind nur zwei kleine mit dem andern Vorzeichen da und jene, v1 und v3 mit zusammen +13 cm, beziehen sich auf die in N nicht sehr stark gebrochene Strecke von P₁ über N nach P3. Führen wir eine dritte Unbekannte z ein, indem wir setzen:

 $\begin{array}{lll} L_1\left(1-z\right)+v_1=L_{0,1}+a_1\,x+b_1\,y & \text{d. h. die An-}\\ 1 & \text{nahme machen,}\\ 2 & \text{nahme machen,}\\ 1 & \text{nahme machen,}\\ 2 & \text{nahme machen,}\\ 2 & \text{nahme machen,}\\ 3 & \text{nahme machen,}\\ 4 & \text{nahme machen,}\\ 4$

$$(21) \begin{cases} v_1 = a_1 x + b_1 y + L_1 z + (L_{0,1} - L_1) \\ = a_1 x + b_1 y + L_1 z + l_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{cases}$$

so daß die l dieselben bleiben wie oben bei zwei Unbekannten. Wir haben oben in 2. und 3. die rechten Seiten der Ausdrücke für die v in cm genommen, müssen dies also auch für die neuen Glieder $L \cdot z$ tun; um die Koeffizienten $a_1 b_1 c$ von x_1 , y_1 , z von derselben Größenordnung zu bekommen, setzen wir:

(22)
$$z' = 100 z$$
, $z = \frac{1}{100} \cdot z'$ oder die Koeffizienten der

dritten Unbekannten in (20) $L' = c' = \frac{1}{100} L$. Die Tafel der Koeffizienten der Verbesserungsgleichungen und der drei Normalgleichungen wird damit wie folgt:

3)
$$\begin{vmatrix} a & b & c' & l \\ (em) & aa & ab & ac' & al & bb & bc' & bl & c'c' & c'l & ll \\ \hline -0.93 & -0.37 & 1.24 & +4 & 0.86 & +0.34 & -1.15 & -3.72 & 0.14 & -0.46 & -1.48 & 1.54 & +4.96 & 16 \\ -0.97 & +0.24 & 1.15 & -3 & 0.94 & -0.23 & -1.12 & +2.91 & 0.06 & +0.28 & -0.72 & 1.32 & -3.45 & 9 \\ +1.00 & +0.02 & 1.29 & +9 & 1.00 & +0.02 & +1.29 & +9.00 & 0.00 & +0.03 & +0.18 & 1.66 & +11.61 & 81 \\ +0.50 & -0.86 & 1.19 & -2 & 0.25 & -0.43 & +0.60 & -1.00 & 0.74 & -1.02 & +1.72 & 1.42 & -2.38 & 4 \\ \hline & 3.05 & -0.30 & -0.38 & +7.19 & 0.94 & -1.17 & -0.30 & 5.94 & +10.74 & 110 & 10.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 & -1.02 &$$

Die Auflösung der drei Normalgleichungen, mit Anwendung des Rechenschiebers [wie für (22) und (23)], die unter Anschreibung der sämtlichen erforderlichen Zahlen fünf Minuten in Anspruch nimmt, sieht also diesmal so aus [erst durch (24) z' und gz'; dann durch die vollständige Umstellung in (25) x und gx, endlich in (26) (26') links und rechts y und gy doppelt zur Probe]:

$$\frac{3,05 \times -0,30 \times -0,38 \times +7,2=0}{0,94 - 1,17 - 0,3} - \frac{110}{-17} \begin{vmatrix} 5,94 \times -1,17 \times -0,38 \times +10,7=0 \\ 0,94 - 1,17 - 0,3 \\ -0,03 - 0,04 + 0,71 \\ 5,94 + 10,7 \\ -0,05 + 0,90 \end{vmatrix} = \frac{0,91 - 1,21 + 0,41}{5,89 + 11,60} = \frac{93}{0,91} - \frac{0,71 - 0,38 + 1,82}{3,03 + 7,89} = \frac{91}{0,71} - \frac{0,23 - 0,08 + 2,12}{3,05 + 7,2} = \frac{0,71 - 0,38 + 1,82}{3,03 + 7,89} = \frac{91}{0,71} - \frac{0,23 \times +0,69}{0,91} = \frac{100}{0,91} = \frac{0,71 - 0,38 + 1,82}{3,03 + 7,89} = \frac{91}{0,91} = \frac{0,71 - 0,38 + 1,82}{3,03 + 7,89} = \frac{91}{0,91} = \frac{0,71 - 0,38 + 1,82}{3,03 + 7,89} = \frac{91}{0,91} = \frac{0,71 - 0,38 + 1,82}{3,03 + 7,89} = \frac{91}{0,91} = \frac{0,71 - 0,38 + 1,82}{0,91} = \frac{1,91}{0,91} = \frac{0,91}{0,91} = \frac{0,91}{0,$$

Doppelte Rechnung für y:

(Fortsetzung folgt.)