

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik =
Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 19 (1921)

Heft: 4

Artikel: Zur Praxis einiger Ausgleichungsaufgaben [Fortsetzung]

Autor: Hammer, E.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-186798>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SCHWEIZERISCHE Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik

ORGAN DES SCHWEIZ. GEOMETERVEREINS

REVUE TECHNIQUE SUISSE DES MENSURATIONS ET AMÉLIORATIONS FONCIÈRES

ORGANE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES GÉOMÈTRES

Redaktion: F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)

Ständiger Mitarbeiter für Kulturtechnik: Prof. C. ZWICKY, Zürich, Bergstr. 131

Collaborateur attitré pour la partie en langue française: CH. ROESGEN, ingénieur-géomètre,
Genève, 11, rue de l'Hôtel-de-Ville — Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats

□ Expedition, Inseraten- und Abonnements-Annahme: □
BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR VORM. G. BINKERT, WINTERTHUR

Jährlich 12 Nummern
(erscheinend am zweiten Dienstag
jeden Monats)
und 12 Inseraten-Bulletins
(erscheinend am vierten Dienstag
jeden Monats)

No. 4
des **XIX. Jahrganges** der
„Schweiz. Geometerzeitung“.
12. April 1921

Jahresabonnement Fr. 12.—
(unentgeltlich für Mitglieder)

Inserate:
50 Cts. per 1spaltige Nonp.-Zeile

Zur Praxis einiger Ausgleichungsaufgaben.

Von E. Hammer, Stuttgart.

(Fortsetzung.)

3. *Nochmalige Verringerung des Rechenaufwandes.* Versuchen wir (vgl. ebenfalls Hr. II), ob nicht noch geringerer Rechenaufwand hier zum Ziele führt, indem wir die a , b auf 1 Einh.₁ abrunden. Nachdem die L_0 mit der Quadrattafel bestimmt sind, sieht dann die Rechnung wie folgt aus und es ist dann zu ihrer Durchführung keine Ziffer mehr zu schreiben als hier folgt, und kein Rechenhilfsmittel irgend welcher Art, nicht einmal ein Rechenschieber mehr notwendig, einschließlich der Auflösung der Normalgleichungen in (18):

(17)	a	b	l (cm)	aa	ab	al	bb	bl	ll
	− 0,9	− 0,4	+ 4	0,81	+ 0,36	− 3,6	0,16	− 1,6	16
	− 1,0	+ 0,2	− 3	1,00	− 0,20	+ 3,0	0,04	− 0,6	9
	+ 1,0	+ 0,0	+ 9	1,00	—	+ 9,0	—	—	81
	+ 0,5	− 0,9	− 2	0,25	− 0,45	− 1,0	0,81	+ 1,8	4
				3,1	− 0,3	+ 7,4	1,0	− 0,4	110

(18)	$3,1 x - 0,3 y + 7,4 = 0$	110	$1,0 y - 0,3 x - 0,4 = 0$	110
	$\quad \quad \quad 1,0 \quad -0,4$	-18	$\quad \quad \quad 3,1 \quad +7,4$	-0
	$\quad \quad \quad -0,0 \quad +0,7$		$\quad \quad \quad -0,1 \quad -0,1$	
	$\quad \quad \quad 1,0 y + 0,3 = 0$	92	$\quad \quad \quad 3,0 x + 7,3 = 0$	110
	$\quad \quad \quad y = -0,3 \text{ cm}$	-0	$\quad \quad \quad x = -2,4 \text{ cm}$	-18
	$g_y = 1,0$	92	$g_x = 3,0$	92
		= [vv]		= [vv]

Selbst diese Rechnung stimmt also noch in den Ergebnissen auf wenige Millimeter mit der *Eggertschen* und der in 2. angegebenen überein, sowohl was x_n y_n , als die v betrifft; auch [v v] mit hier 92 bleibt wie in 2. bestehen, und damit, vgl. g_x und g_y , die m. F. der berechneten Abszisse und Ordinate. Daß also auch noch hier praktisch mehr als genügende Genauigkeit erreicht ist, ist jedenfalls angesichts der Klagen über den „Rechenaufwand bei der Anwendung der kleinsten Quadrate“ (beliebter Einwand von solchen, die die Sache nicht kennen) bemerkenswert, wenn man auch meist bei der in 2. eingehaltenen Rechnungsschärfe (Anwendung des Rechenschiebers) stehen bleiben wird. Man muß in der Tat oft staunen über den ganz überflüssigen Dezimalenluxus, der bei den einfachsten Ausgleichungen der niedern Geodäsie getrieben wird und dessen Fortsetzung fast nur durch die Anwendung der die überflüssigen Stellen ohne weitem Rechenaufwand mitliefernden Rechenmaschinen zu erklären ist. Man sollte bei diesen einfachen Aufgaben der Land- und Feldmessung mit z. B. nur zwei Unbekannten viel mehr als es auch heute noch zu geschehen scheint, von der „exakten“ Arbeit mit der Rechenmaschine absehen zu Gunsten der einfachern *mechanisch-logarithmischen* Rechnung mit Hilfe des *Rechenschiebers*.

Eine mit der Frage nach der erforderlichen Rechenschärfe zusammenhängende ist noch die nach der notwendigen *Annäherung* der Näherungswerte der Unbekannten an ihre endgültigen Werte, besonders bei von Haus aus nicht linearen Verbesserungsgleichungen. Es ist sehr einfach zu sehen, daß bei vermittelnden Beobachtungen in dem Falle schon von Anfang an *linearer* Beziehungen zwischen Messungen und Unbekannten, wo bekanntlich die *praktisch* zweckmäßige Durchführung

der Zahlenrechnung ebenfalls fast ausnahmslos schon die Einführung von Näherungswerten für die Unbekannten verlangt, der *Grad* der Annäherung dieser Näherungswerte theoretisch ganz *ohne Einfluß* auf die Endwerte der Unbekannten ist, d. h. für diese Endwerte stets (theoretisch) *genau* dieselben Zahlen erhalten werden, was auch die gebrauchten Näherungswerte sein mögen. Bei von Anfang an *nicht* linearem Zusammenhang zwischen Messungen und Unbekannten *müssen* Näherungswerte der Unbekannten eingeführt werden, und hier ist nun selbstverständlich das Ergebnis der Ausgleichung *nicht mehr unabhängig* vom Grad der Annäherung dieser Werte; dieser Grad der Annäherung der benützten Näherungswerte kommt auch hier nur solange *praktisch* nicht in Betracht, als bei der Entwicklung nach dem Taylorschen Satz die kleinen Größen zweiter Ordnung gegen die erster Ordnung, die nur die ersten Potenzen der gesuchten Korrekturen $x, y \dots$ der Näherungswerte enthalten, tatsächlich nicht in Betracht kommen.

Es ist dem Anfänger sehr zu empfehlen, an bestimmten einfachen Aufgaben, wie der vorliegenden, selbst empirisch festzustellen, *welcher* Annäherungsgrad der Näherungswerte erforderlich ist; er mag z. B. die vorstehende Aufgabe mit der in 2. festgehaltenen Rechenschärfe, die ja für jede vollständig durchgeführte Ausgleichung nur wenige Minuten in Anspruch nimmt, mit Annahmen für (x_0, y_0) durchrechnen, die von denen in (3) um je 10 cm, 20 cm, 50 cm, 1 m abweichen (beachte dabei auch die für schlanke Rechnung beste Wahl des Längensmaßes). Er wird dadurch den Wert „guter“ Näherungswerte für die *Bequemlichkeit* der Durchführung der Ausgleichung schätzen lernen und zugleich ein empirisch begründetes Urteil über den Grad der *erforderlichen* Annäherung gewinnen. Ich möchte auf eine empirische Untersuchung dieser Art bei einer verwandten Aufgabe (Rechnung eines trigonometrischen Neupunktes durch Vorwärtseinschneiden) hinweisen, die kürzlich *Aubell*, ebenfalls wesentlich im didaktischen Interesse angestellt hat (Oesterreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, XVIII, 1920, Seiten 80 bis 85).

4. *Graphische Ableitung der linearen Verbesserungsgleichungen* im Falle nicht linearer Beziehungen zwischen Messungen und Unbekannten bei vermittelnden Beobachtungen. Schon oft und

mit Recht ist empfohlen worden, besonders dem Anfänger zur Verifikation der Entwicklung nach dem Taylorschen Satz (so einfach auch diese bei den wichtigsten vorkommenden Aufgaben zu sein pflegt, so beim Vorwärts- oder Rückwärtseinschneiden eines trigonometrischen Neupunktes), womöglich der algebraischen Entwicklung eine geometrische Veranschaulichung zur Seite zu stellen. Dies ist wichtiger als algebraische „Vereinfachungen“ einfachster Differentiationen; vgl. meine Bemerkungen zu einem Aufsatz von *Werkmeister*, Oesterreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, 1915, Seiten 11 bis 17. Ganz ähnlich bei der vorliegenden Aufgabe: die einfache geometrische Anschauung gestattet sofort die Ablesung des Differentiationsergebnisses, nämlich die Ausdrücke für die Koeffizienten a , b

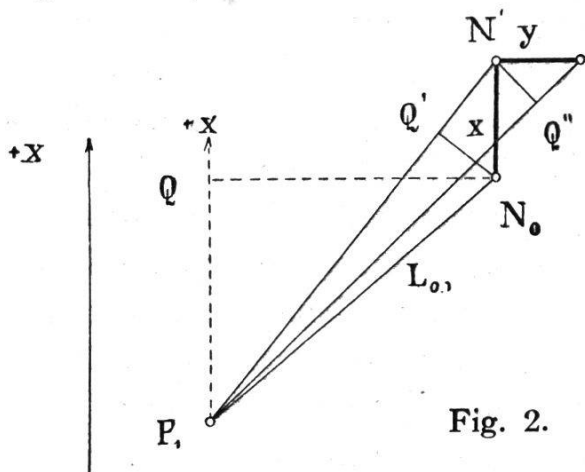


Fig. 2.

nach (4). Der Näherungspunkt N_0 wird um die kleinen Beträge (die Unbekannten der Ausgleichung) x und y nach N^1 und dann nach \underline{N} (endgültige Lage des Neupunktes) verschoben; wie ändert sich damit die Länge $L_{0,1} = P_1 N_0$? Fällt man (ver-

gleiche Figur 2) von N_0 das Lot $N_0 Q'$ auf $P_1 N'$ und von N' das Lot $N' Q''$ auf $P_1 \underline{N}$, so werden damit zwei rechtwinklige Dreiecke $N_0 N' Q'$ und $N' \underline{N} Q''$ mit den kleinen Hypotenusen x und y gebildet, die praktisch genau dem Dreieck $P_1 N_0 Q$ mit Hypotenuse $L_{0,1}$ und Katheten $x_0 - x_1$ und $y_0 - y_1$ ähnlich sind; da ferner praktisch genau $\overline{P_1 Q'} = \overline{P_1 N_0}$ ist, so liest man mit Hilfe dieser zwei kleinen Dreiecke einfach durch Proportion ab:

$$\underline{L}_1 = P_1 \underline{N} = L_{0,1} + Q' N' + Q'' \underline{N} \text{ oder}$$

$$(19) \quad L_1 + v_1 = L_{0,1} + \frac{x_0 - x_1}{L_{0,1}} \cdot x + \frac{y_0 - y_1}{L_{0,1}} \cdot y,$$

wobei selbstverständlich wieder gleichgültig ist, ob im Nenner der zwei kleinen Zusatzglieder rechts $L_{0,1}$ oder L_1 steht; es ist also in Uebereinstimmung mit (4):

$$a_1 = \frac{x_0 - x_1}{L_1} = - \frac{x_1 - x_0}{L_1}; \quad b_1 = \frac{y_0 - y_1}{L_1} = - \frac{y_1 - y_0}{L_1} \text{ u. s. f.,}$$

dritten Unbekannten in (20) $L' = c' = \frac{1}{100} L$. Die Tafel der Koeffizienten der Verbesserungsgleichungen und der drei Normalgleichungen wird damit wie folgt:

	a	b	c'	$\frac{l}{(cm)}$	aa	ab	ac'	al	bb	bc'	bl	c'c'	c'l	ll
3)	-0,93	-0,37	1,24	+4	0,86	+0,34	-1,15	-3,72	0,14	-0,46	-1,48	1,54	+4,96	16
	-0,97	+0,24	1,15	-3	0,94	-0,23	-1,12	+2,91	0,06	+0,28	-0,72	1,32	-3,45	9
	+1,00	+0,02	1,29	+9	1,00	+0,02	+1,29	+9,00	0,00	+0,03	+0,18	1,66	+11,61	81
	+0,50	-0,86	1,19	-2	0,25	-0,43	+0,60	-1,00	0,74	-1,02	+1,72	1,42	-2,38	4
					3,05	-0,30	-0,38	+7,19	0,94	-1,17	-0,30	5,94	+10,74	110

Die Auflösung der drei Normalgleichungen, mit Anwendung des Rechenschiebers [wie für (22) und (23)], die unter Anschreibung der sämtlichen erforderlichen Zahlen fünf Minuten in Anspruch nimmt, sieht also diesmal so aus [erst durch (24) z' und $g_{z'}$; dann durch die vollständige Umstellung in (25) x und g_x , endlich in (26) (26') links und rechts y und g_y doppelt zur Probe]:

(24)	$\begin{array}{r} 3,05x - 0,30y - 0,38z' + 7,2 = 0 \\ \hline 0,94 \quad -1,17 \quad -0,3 \\ \hline -0,03 \quad -0,04 \quad +0,71 \\ \hline 5,94 + 10,7 \\ \hline -0,05 \quad +0,90 \\ \hline 0,91 \quad -1,21 \quad +0,41 \\ \hline 5,89 + 11,60 \\ \hline -1,60 \quad +0,54 \\ \hline 4,29z' + 12,14 = 0 \\ \hline z' = -\frac{12,14}{4,29} = -2,84 \text{ (cm auf } \\ \text{100 m)} \\ \text{oder 0,28 mm Abzug pro Me-} \\ \text{ter der L.} \\ g_{z'} = 4,29. \end{array}$	$\begin{array}{r} 110 \\ \hline -17 \\ \hline 93 \\ \hline -0 \\ \hline 93 \\ \hline -34 \\ \hline 59 \\ \hline = [v] \end{array}$	(25)	$\begin{array}{r} 5,94z' - 1,17y - 0,38x + 10,7 = 0 \\ \hline 0,94 \quad -0,30 \quad -0,30 \\ \hline -0,23 \quad -0,08 \quad +2,12 \\ \hline 3,05 \quad +7,2 \\ \hline -0,02 \quad +0,69 \\ \hline 0,71 \quad -0,38 \quad +1,82 \\ \hline 3,03 \quad +7,89 \\ \hline -0,20 \quad +0,97 \\ \hline 2,83x + 8,86 = 0 \\ \hline x = -\frac{8,86}{2,83} = -3,2 \text{ cm} \\ g_x = 2,83 \end{array}$	$\begin{array}{r} 110 \\ \hline -19 \\ \hline 91 \\ \hline -5 \\ \hline 86 \\ \hline -27_5 \\ \hline 58_5 \\ \hline = [v] \end{array}$
------	---	--	------	---	--

Doppelte Rechnung für y :

(26)	$\begin{array}{r} 5,89z' - 1,21y + 11,60 = 0 \\ \hline 0,91 \quad +0,41 \\ \hline -0,25 \quad +2,39 \\ \hline 0,66y + 2,80 = 0 \\ \hline y = -\frac{2,80}{0,66} = -4,25 \text{ cm} \\ g_y = 0,66 \end{array}$	$\begin{array}{r} 93 \\ \hline -23 \\ \hline 70 \\ \hline -12 \\ \hline 58 \\ \hline = [v] \end{array}$	(26')	$\begin{array}{r} 3,03x - 0,38y + 7,89 = 0 \\ \hline 0,71 \quad +0,82 \\ \hline -0,05 \quad +0,99 \\ \hline 0,66y + 2,81 = 0 \\ \hline y \text{ und } g_y \text{ wie links.} \end{array}$	$\begin{array}{r} 91 \\ \hline -25_5 \\ \hline 70_5 \\ \hline -12 \\ \hline 58_5 \\ \hline = [v] \end{array}$
------	---	---	-------	---	---

(Fortsetzung folgt.)