

Zeitschrift:	Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières
Herausgeber:	Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres
Band:	18 (1920)
Heft:	9
Artikel:	Trigonometrische Längenbestimmung geodätischer Grundlinien nach A. Tichy : Referat und Kritik
Autor:	Baeschlin, F.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-186239

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

die Genauigkeit erreicht, die mit dem betreffenden Rechenschieber überhaupt erreicht werden kann. Durch Addition der auf diese Weise berechneten Strecke x zu der bekannten Strecke a erhält man die gewünschte Strecke c .

Bei Dreiecken mit sehr spitzem Winkel können auf diese Weise sehr lange Strecken noch auf eine Genauigkeit von ± 1 cm berechnet werden. Aber auch im extremsten Falle, beim gleichschenkligen Dreieck, ist die Strecke x immer noch kleiner als $\frac{1}{3}$ der Strecke c , so dass auch in diesem Falle die dreimal grössere Strecke mit der gleichen Genauigkeit erhalten werden kann, die durch eine Berechnung der ganzen Strecke nach der Formel: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ mit dem Rechenschieber erreicht worden wäre.

Th. Wyss, Grundbuchgeometer.

Trigonometrische Längenbestimmung geodätischer Grundlinien nach A. Tichy.

Referat und Kritik.

Auf Wunsch verschiedener Leser dieser Zeitschrift treten wir auf eine schon vor geraumer Zeit propagierte Längenmessmethode ein.

In erster Linie liegt es uns daran, die Methode, die in vielen Fällen nutzbringende Verwendung finden kann, zur Kenntnis unserer Leser zu bringen. In einem zweiten Teile beschäftigen wir uns mit einer Kritik der Methode.

Unter dem Titel unseres Referates hat A. Tichy, Inspektor der österreichischen Staatsbahnen, in den Nummern 1—5 der «Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architektenvereins», Jahrgang 1909, eine neue Methode zur Längenbestimmung geodätischer Grundlinien entwickelt. Die Abhandlung ist auch als Sonderabdruck erschienen.

Die Grundidee des Verfahrens beruht darauf, aus einem mässig langen Maßstab (Etalon) (Länge 1.2 Meter) aus Invarmetall mit Hilfe der sogenannten Rautenmethode in mehrfacher Anwendung durch trigonometrische Messungen auf grössere Strecken überzugehen, die je nach Umständen zwischen 70 und 900 Meter liegen. Grössere Entfernungen wer-

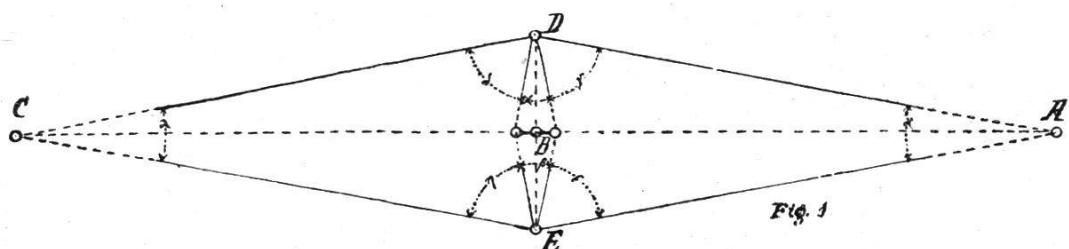
den durch Aneinandersetzen der Enddiagonalen von solchen Rauten bestimmt.

Eine geeignete, geschickt konstruierte Apparatur vermeidet so weit als möglich das Auftreten von gefährlichen systematischen Fehlern.

Tichy benutzt die Methode in vierfacher Form, die wir kurz skizzieren wollen.

a) Vergrösserung der Etalonlänge mit zwei Faktoren.

Diese einfachste von allen brauchbaren Varianten der Methode ist in Abbildung 1 veranschaulicht. Als normal abge-



steckt gilt eine solche Rautenfigur dann, wenn auf eine halbe Minute (sexagesimal) genau die Strecken $\overline{A-C}$ und $\overline{D-E}$ einander rechtwinklig kreuzen und $\alpha = \beta$; $\gamma = \delta$; schliesslich wenn auf eine ganze Minute genau $\alpha = \gamma$ ist. Die Punkte A, B, C liegen in einer Vertikalebene und in dieser die zu messende Grundlinie selbst, so dass $\overline{A-B}$ und $\overline{B-C}$ sich als zwei fast gleich lange korrespondierende Teilstrecken dieser Grundlinie darstellen. Punkt B wird derart mit dem auf seinem besonderen Stativ angebrachten Etalon besetzt, dass sein Halbierungspunkt in das Lot des Punktes B und seine in die Horizontalebene gebrachte Längenaxe in die Richtung $A-C$ zu liegen kommt. Gleichzeitig werden in den Loten der Punkte A und C scharf pointierbare Signale auf eigenen soliden Stativen angebracht. Die Punkte D und E sind Theodolitstände. Von D aus werden jene vier Richtungen, welche die Horizontalwinkel γ , α , δ und von E aus analog jene vier Richtungen beobachtet, welche die Horizontalwinkel ϵ , β , η einschliessen. Behufs Beobachtung dieser zwei Gruppen von je vier Richtungen können eventuell die Stände D und E gleichzeitig besetzt und abgetan werden, wenn anstatt nur eines Theodoliten deren zwei zur Verfügung stehen. Immerhin, also auch wenn mit nur einem Theodoliten beobachtet wird, muss

die über den Punkten A, B, C etablierte Garnitur in konstruktiver Hinsicht der Bedingung entsprechen, dass daran während der ganzen Beobachtungsdauer aller acht Richtungen absolut nichts berührt werden darf, d. h. die Endmarken des in B errichteten Etalons, sowie auch die beiden Signalmarken in B und C müssen ohne weiteres sowohl von D als von E aus mit gleicher Exaktheit pointierbar sein.

Sei nun ein für allemal die bekannte halbe Länge des Etalons mit a bezeichnet, so ist aus Abbildung 1:

$$\overline{A-B} = \frac{1}{2} \left[a \cotg \frac{\alpha}{2} \cdot \tg \left(\gamma + \frac{\alpha}{2} \right) + a \cotg \frac{\beta}{2} \tg \left(\varepsilon + \frac{\beta}{2} \right) \right]$$

und ebenso

$$\overline{B-C} = \frac{1}{2} \left[a \cotg \frac{\alpha}{2} \cdot \tg \left(\frac{\alpha}{2} + \delta \right) + a \cotg \frac{\beta}{2} \tg \left(\frac{\beta}{2} + \eta \right) \right]$$

Unter der Voraussetzung der Kenntnis des mittleren Winkelmessungsfehlers und dass nahezu $\alpha = \beta = \varepsilon = \gamma$ sei, ergibt sich

$$m_{\log A C} = d \left(\log \tg \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\text{für den mittleren Fehler von } \frac{\alpha}{2} = \frac{m}{2},$$

dabei ist m der mittlere Fehler eines gemessenen Winkels.

Wenn die geodätische Grundlinie in mehrere oder viele Rautenfiguren zu je zwei Teilstrecken zerlegt ist und die sämtlichen Teilstrecken fast einerlei Länge haben, so ist der mittlere Fehler auf eine 1 km lange Strecke:

$$m_{1 \text{ km}} = \pm m_T \sqrt{\frac{1000}{T}}$$

[vorausgesetzt, dass keine systematischen Fehler wirksam seien.]
(Zusatz des Referenten.)

Der mittlere Fehler einer x km langen Strecke ist dann (unter der gleichen Voraussetzung)

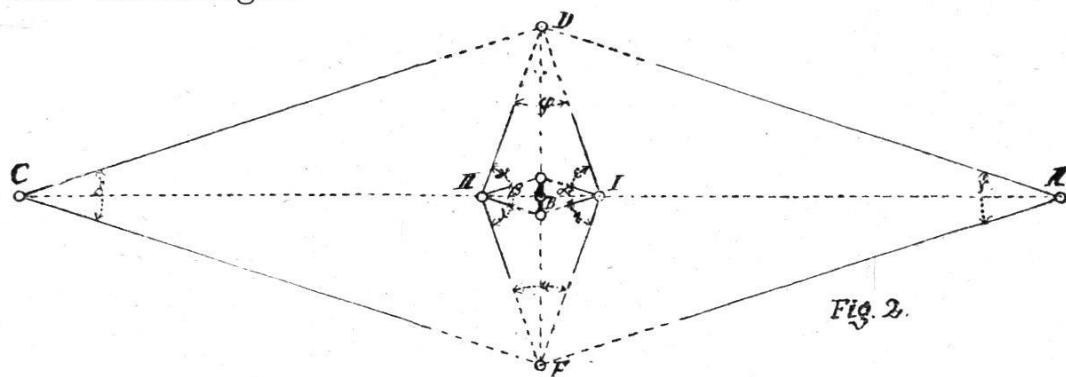
$$m_{x \text{ km}} = m_{1 \text{ km}} \sqrt{x}.$$

Unbedingt notwendig ist es nicht, dass die beiden Teilstrecken in einer und derselben Rautenfigur fast vollständig gleich lang seien; aber es ist zweckmässig im Hinblick auf den anzustrebenden grösstmöglichen Genauigkeitsgrad der Operation.

b) *Vergrösserung der Etalonlänge mit 3 Faktoren.*

So oft die Terrainbeschaffenheit die dazu erforderliche, etwas grössere Ausdehnung der Operation in die Breite gestattet, ist es bedeutend vorteilhafter, nicht mit Kettengliedern zu zwei, sondern mit solchen zu drei Vergrösserungsfaktoren vorzugehen, weil — unter Voraussetzung gleich langer Teilstrecken in beiden Fällen — im Verfahren mit drei Faktoren alle Winkel bedeutend günstiger ausfallen und folglich ein dementsprechend höherer Genauigkeitsgrad erzielt wird.

Die Figur 2 veranschaulicht die Anordnung in einer solchen Rautenfigur.



Die Figur soll analog abgesteckt sein, wie die Raute mit 2 Faktoren; auch hier sollen die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta, \mu$ auf eine halbe bis höchstens eine ganze Minute genau gleich gross abgesteckt werden.

Theodolitstandpunkte sind A, I, II, und C. Signale stehen in D und E.

Falls mit zwei Theodoliten gearbeitet werden kann, wird der eine auf A und I, der andere gleichzeitig auf C und II aufgestellt.

$$\overline{AB} = \frac{1}{2} \left[a \cotg \frac{\alpha}{2} \cdot \tg \frac{\varepsilon + \alpha + \eta}{2} \cotg \frac{\gamma}{2} + a \cotg \frac{\beta}{2} \cdot \tg \frac{\varepsilon + \beta + \lambda}{2} \cotg \frac{\gamma}{2} \right]$$

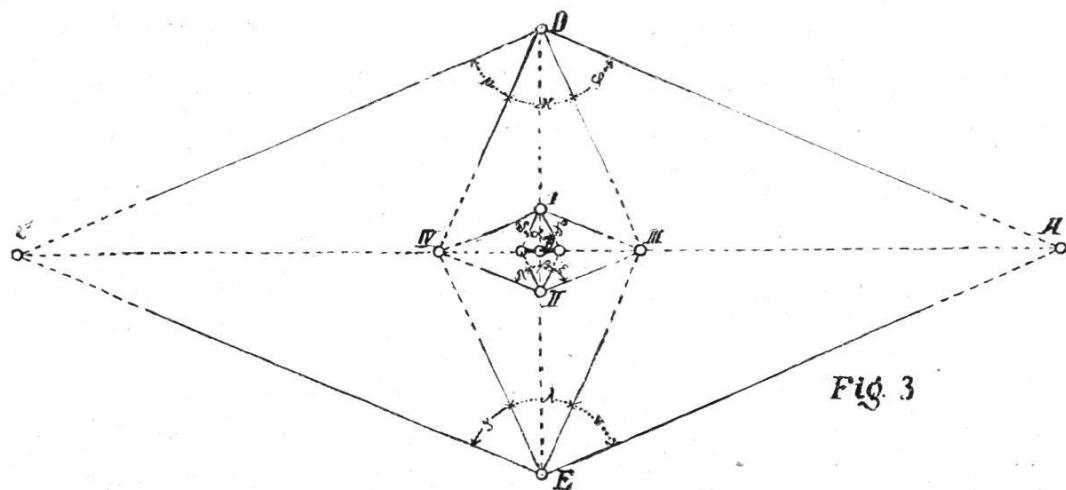
$$\overline{BC} = \frac{1}{2} \left[a \cotg \frac{\alpha}{2} \cdot \tg \frac{\varepsilon + \alpha + \eta}{2} \cotg \frac{\delta}{2} + a \cotg \frac{\beta}{2} \cdot \tg \frac{\varepsilon + \beta + \lambda}{2} \cotg \frac{\delta}{2} \right]$$

$$m_{\log T} = \pm 1.224745 d \left(\log \tan \frac{\alpha}{2} \right)$$

für den mittleren Fehler von $\frac{\alpha}{2} = \frac{m}{2}$.

c) Vergrösserung der Etalonlänge mit 4 Faktoren.

Dieses Verfahren erhellt aus der Figur 3.



Die Punkte A, III, IV, C sind gleichzeitig mit Signalstativen zu besetzen. Die Punkte D, I, II, E sind Theodolitstände. Bei Bearbeitung mit zwei Theodoliten kommt der eine auf D und I, der andere auf E und II in Verwendung.

$$\overline{A-B} = \frac{1}{2} \left[a \cotg \frac{\alpha}{2} \cdot \tg \frac{\gamma + \alpha + \delta}{2} \cdot \cotg \frac{\pi}{2} \cdot \tg \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \right. \\ \left. + a \cotg \frac{\beta}{2} \cdot \tg \frac{\varepsilon + \beta + \eta}{2} \cdot \cotg \frac{\lambda}{2} \cdot \tg \left(\vartheta + \frac{\lambda}{2} \right) \right]$$

$$\overline{B-C} = \frac{1}{2} \left[a \cotg \frac{\alpha}{2} \cdot \tg \frac{\gamma + \alpha + \delta}{2} \cdot \cotg \frac{\pi}{2} \cdot \tg \left(\frac{\pi}{2} + \mu \right) \right. \\ \left. + a \cotg \frac{\beta}{2} \cdot \tg \frac{\varepsilon + \beta + \eta}{2} \cdot \cotg \frac{\lambda}{2} \cdot \tg \left(\frac{\lambda}{2} + \rho \right) \right]$$

$$m_{\log T} = \pm 1.41421 d \left(\log \tg \frac{\alpha}{2} \right)$$

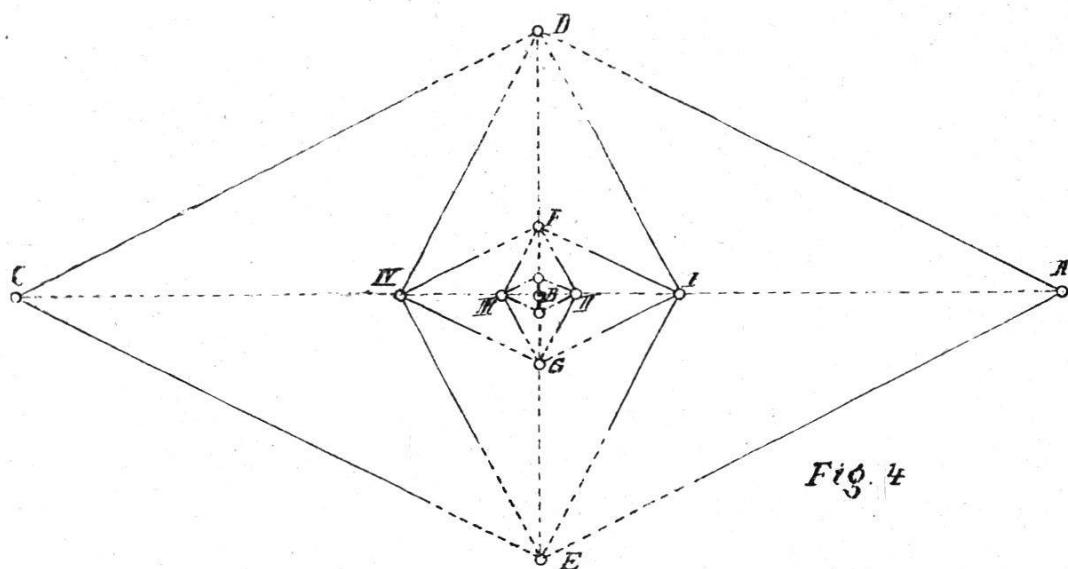
für den mittleren Fehler von $\frac{\alpha}{2} = \frac{m}{2}$.

Für dieses Vierfaktorensystem bedarf es einer vergrösserten Messgarnitur, weil vier Signalstative und Signale nötig werden.

d) Vergrösserung der Etalonlänge mit 5 Faktoren.

Die für das Vierfaktorensystem erforderliche grosse Messgarnitur gestattet auch noch die Erweiterung des Verfahrens auf einen fünften Faktor.

Wie in solchem Falle ein normales Kettenglied abgesteckt sein muss, ist aus der Figur 4 zu ersehen.



In den Punkten D, F, G, E stehen die vier Signalstativen, während A, I, II, III, IV, C Theodolitstände sind. Bei zwei Theodoliten soll der eine die Stationen A, I, II, der andere III, IV, C absolvieren.

Die Formeln zur Berechnung von $\overline{A-B}$ und $\overline{B-C}$ sind den bisherigen ähnlich.

$$m_{\log T} = \pm 1.58114 d \left(\log \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \text{ für den mittleren Fehler}$$

von $\frac{\alpha}{2} = \frac{m}{2}$.

Das Leistungsvermögen der Methode

hinsichtlich des Genauigkeitserfolges der Längenbestimmung ist bedingt:

1. Durch die Exaktheit, mit welcher die effektive Länge des — auf jeden Fall aus Invar von möglichst kleinem Temperaturausdehnungskoeffizienten hergestellten — Etalons festgestellt ist.

2. Durch die Exaktheit, mit welcher die beiden Etalon-

Endmarken und die sämtlichen Signalmarken vom Theodolitfernrohr aus pointierbar sind.

3. Durch die allersolideste Standfestigkeit der Stativen, auf welchen Etalon, Signale und Theodolit angebracht werden.

4. Durch derart normale Absteckung der Rautenfiguren, dass der Einfluss der etwa noch verbleibenden Absteckungsungenaugigkeit — in Ansehung des beabsichtigten Zweckes der Messung — verschwindend klein ausfallen müsse.

5. Durch die jeweilige Grösse der abgesteckten und gemessenen Winkel.

6. Durch den wirklich erzielten Genauigkeitsgrad der Winkelmessung.

Der Einfluss der Fehlerquelle sub 1 kann sich entweder in plus oder in minus geltend machen, kann jedoch nicht sein algebraisches Zeichen wechseln, insofern der aus Invar bester Sorte hergestellte, in einer ausgiebig schützenden hölzernen Hülle eingeschlossene und überdies gegen Sonnenstrahlen beschirmte Etalon in zweckentsprechender Weise mit einem Thermometer ausgestattet ist, welch letzteres während der Messoperation rationell beobachtet wird. Die aus der Fehlerquelle sub 4 kommenden Einflüsse wirken immer nur im gleichen, und zwar die beobachteten Winkel restringierenden, also die Längenresultate erhöhendem Sinne. Deshalb soll dafür gesorgt sein, dass der Einfluss aus den beiden Fehlerquellen sub 1 und 4 verschwindend klein ausfallen müsse. Hingegen machen sich die Einflüsse aus den Fehlerquellen sub 2, 3, 5 und 6 auf die Resultate der einzelnen Teilstreckenlängen stets mit gleicher Wahrscheinlichkeit abwechselnd in \pm geltend und treten immer kumulativ als Grösse des Widerspruches der einzelnen Winkelbeobachtungen gegenüber dem Mittel aus einer mehrmaligen Beobachtungswiederholung desselben Winkels in die Erscheinung.

In diesem Sinne ist aus der nachstehenden, bei Zugrundelegung einer Etalonlänge von 1,2 Meter und einer mittleren Winkelbeobachtungsgenauigkeit von $\pm 1''$ berechneten tabellarischen Uebersicht das Leistungsvermögen der vorangeführten vier Varianten dieser Methode an relativer Längenbestimmungsgenauigkeit zu ersehen.

Tabelle I.

Länge d. Strecke			α		Mittlere Längenfehler in \pm Millimeter für								
A—B		B—D	2		Strecke	1	10	100	500	1000	5000	10,000	
Meter	0	,	"	A—B		Kilometer Strecke							
System mit zwei Faktoren													
160	9.99	3	30	15	6.355	15.889	50.2	159	355	502	1123	1589	
130	8.84	3	53	11	4.659	12.921	40.9	129	289	409	914	1292	
100	7.75	4	25	45	3.151	9.964	31.5	100	223	315	705	996	
80	6.93	4	56	58	2.266	8.012	25.3	80	179	253	567	801	
60	6.00	5	42	38	1.474	6.017	19.0	60	135	190	425	602	
50	5.48	6	15	5	1.118	4.999	15.8	50	112	158	353	500	
40	4.90	6	58	47	0.806	4.031	12.7	40	90	127	285	403	
35	4.58	7	27	34	0.657	3.512	11.1	35	79	111	248	351	
System mit drei Faktoren.													
300	37.80	7	10	52	7.193	13.132	41.5	131	294	415	929	1313	
250	33.48	7	37	33	5.635	11.269	35.6	113	252	356	797	1127	
200	28.84	8	12	25	4.205	9.337	29.5	93	209	295	660	934	
160	24.86	8	49	51	3.131	7.827	24.7	78	175	247	553	783	
130	21.64	9	27	10	2.365	6.559	20.7	66	147	207	464	656	
100	18.17	10	17	56	1.689	5.341	16.9	53	119	169	378	534	
80	15.66	11	4	31	1.267	4.478	14.2	45	100	142	317	448	
60	12.63	11	53	21	0.882	3.600	11.4	36	81	114	255	360	
System mit vier Faktoren.													
400	78.72	11	8	1	7.247	11.459	36.2	115	256	362	810	1146	
350	71.22	11	30	5	6.123	10.349	32.7	103	231	327	732	1035	
300	63.44	11	56	26	5.089	9.292	29.4	93	208	294	657	929	
250	55.33	12	28	50	4.056	8.111	25.7	81	181	257	574	811	
200	46.81	13	10	20	3.092	6.915	21.9	69	155	219	489	692	
160	39.59	13	53	57	2.352	5.880	18.6	59	131	186	416	588	
130	33.88	14	36	32	1.825	5.061	16.0	51	113	160	358	506	
100	27.83	15	33	10	1.328	4.199	13.3	42	94	133	297	420	
System mit fünf Faktoren.													
450	119.73	14	53	57	6.939	10.344	32.7	103	231	327	731	1034	
400	108.96	15	14	17	6.048	9.562	30.2	96	214	302	676	956	
350	97.92	15	37	50	5.156	8.716	27.6	87	195	276	616	872	
300	86.57	16	5	47	4.322	7.891	25.0	79	176	250	558	789	
250	74.81	16	39	36	3.481	6.961	22.0	70	156	220	492	696	
200	62.58	17	22	32	2.692	6.020	19.0	60	135	190	426	602	
160	52.35	18	7	4	2.075	5.187	16.4	52	116	164	367	519	
130	44.34	18	49	56	1.632	4.526	14.3	45	101	143	320	453	

Der Verfasser bespricht dann die Operationen zur Absteckung der Raute und findet, dass ein gewöhnlicher Tachymetertheodolit mit 20" Angabe der Nonien, 30facher Vergrösserung des Fernrohres und Distanzfäden mit der Multiplikationskonstanten 100 zweckentsprechend sind.

Die vergleichende Würdigung

der vier verschiedenen Systeme findet nun, wie es richtig ist, nicht einfach nach den mittleren Fehlern der Tabelle 1 statt, sondern unter Mitbeachtung einer sorgfältigen Kostenschätzung, die wir aber hier übergehen müssen. In übersichtlicher tabellarischer Zusammenstellung findet man in der Arbeit für die verschiedensten Fälle alles Gewünschte. Aus dieser Untersuchung ergibt sich, dass das 5-Faktorensystem keine weitere Oekonomieverbesserung mehr ergibt, weshalb dasselbe definitiv ausgeschaltet wird. Es bleiben also für die praktische Verwendung nur die Systeme mit 2, 3 und 4 Faktoren und zwar letzteres auch wieder nur dort, wo es sich um geodätische Arbeiten im grossen Stil handelt und deshalb die Einführung grosser Messgarnituren mit je vier Signalstativen und zwei Theodoliten sich als ökonomisch vorteilhaft empfiehlt.

In der Praxis ist es oft nicht möglich, die Figuren derart abzustecken, wie es nach Massgabe der Tabellen am vorteilhaftesten erscheint. Es ist also von Fall zu Fall immer eine solche Figurendisposition als die vorteilhafteste zu erachten, welche sich der jeweiligen Gestaltung des Terrains anstandslos anpassen lässt.

Da im Zuge einer und derselben geodätischen Grundlinie häufig eine erhebliche Abwechslung im Detail der Terraingestaltung vorkommen kann, so ist in der Praxis die dem beabsichtigten Genauigkeitsgrade entsprechend gewählte Normalfigur als durch den Begriff «womöglich» eingeschränkt zu erachten, und es wird folglich, unter Bedachtnahme auf tunlichst wenig Preisgebung von Vorteil im ökonomischen Prinzip, eine dem Terrain angepasste Abwechslung nicht nur in den Figurensystemen, sondern auch in den Teilstreckenlängen und, mit Rücksicht auf letztere, schliesslich auch in der Anzahl der Sätze bei der Winkelmessung platzgreifen müssen. So z. B. würde es eine unnötige Verteuerung der Arbeit bedeuten, wenn dort, wo das Terrain zur Anordnung abnormal kurzer Teilstrecken gezwungen hat, die Winkelbeobachtung in der normalen, also in einer grössern Anzahl von Sätzen ausgeführt werden wollte, als zur Erreichung des beabsichtigten Genauigkeitsgrades hinreichend ist.

Wie aus der Tabelle 1 zu ersehen ist, erfordert die Figuren-

absteckung eine um so grössere Ausdehnung der Operation in die Breite, auf je mehr Faktoren das System beruht und je länger die Teilstrecken sind. Es kann nun die Terraingestaltung mitunter zwar nicht in die Breite, wohl aber in den Teilstreckenlängen einschränkend wirken. In solchem Falle wird, wenn das Vierfaktorensystem auch Norm wäre, trotzdem eine solche Figur anstandslos angebracht werden können, ausnahmsweise eine Dreifaktorenfigur abzustecken sein. Insofern sich das Terrain zwar nicht der Längen-, wohl aber der Breitenentwicklung nach ungünstig erweist, wird mitunter auch das Dreifaktorensystem nicht anbringbar und in Konsequenz dessen vorübergehend jenes mit zwei Faktoren mit gutem Grunde als das vorteilhafteste zu erachten sein, weil es die geringste Ausdehnung in die Breite erfordert.

Ueberhaupt ist das Zweifaktorensystem zweckmässig und notwendig, wo es sich um das Passieren von Engpässen*, um das Durchdringen von Wäldern, welche nicht gut umgangen werden können, dann um das Uebersetzen von Strömen und sonstigen, zwar übersichtlichen, jedoch unbegehbarren Terrainstrecken von grösserer Ausdehnung handelt.

Wenn mit nur 40 bis 50 m langen Teilstrecken vorgegangen und dabei auf vorteilhafte Auswahl der Standpunkte Rücksicht genommen wird, so ist es ganz gut möglich, selbst in sehr ausgedehnten Wäldern, gleichviel ob mit Alt- oder Jungholz bestockt, mit einem Minimum von Zeit- und Arbeitsaufwand auf das Freihauen der Visuren durchzukommen, insofern der Rekognoszierende es nur verstanden hat, den weniger beschwerlichen Weg zu weisen und insbesondere etwa sumpfigen Bodenstellen geschickt auszuweichen.

Zum Uebersetzen von Strömen und dergleichen Hindernissen, welche breiter sind als dass es noch möglich wäre, dieselben bei der Absteckungsdisposition im freien Raume A—III oder A—IV von Figur 3 unterzubringen, empfiehlt der Verfasser eine besondere Lösung, die auf der Verwendung von je einer 5- bis 7-gliedrigen Zweifaktorenkette auf jedem Ufer beruht. Wir verweisen diesbezüglich auf das Original.

(Fortsetzung folgt.)

* Als Engpässe sind auch von Häuserreihen flankierte Strassen zu betrachten, in welchen anlässlich der Städtevermessung polygonale Züge durchgeführt werden sollen.