Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 17 (1919)

Heft: 10

Artikel: Eine Ausgleichungsaufgabe

Autor: [s.n.]

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-185593

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

La photographie aura, sur le croquis, le grand avantage d'indiquer suffisamment bien le relief du terrain et les détails marquants, pour que les propriétaires puissent aisément reconnaître leurs propriétés et en fixer les limites.

Un agrandissement approprié peut être facilement obtenu de manière à ce qu'on puisse faire figurer sur la photographie une numérotation parcellaire analogue à la numérotation cadastrale ou la désignation succincte des propriétaires.

Il nous paraît donc que, sans calculs compliqués et sans conditions spéciales, la photographie par avions peut remplacer, avantageusement et à bon compte, la confection des croquis, et que son utilisation dans le domaine du Registre foncier peut certainement rendre de grands services. *Ch. Rœsgen.*

Eine Ausgleichungsaufgabe.

Unter dem Titel „Bestimmung einer Geraden aus den gemessenen Koordinaten ihrer Punkte" behandelt Professor Eggert in Heft 1 des Jahrganges 1918 der deutschen „Zeitschrift für Vermessungswesen" eine Ausgleichungsaufgabe, die deswegen ein gewisses theoretisches Interesse bietet, weil sie Anlaß gibt, auf einen wichtigen Grundsatz bei der Behandlung von Ausgleichungsaufgaben hinzuweisen.

Wir werden auch Gelegenheit haben, die Eggert'schen Ergebnisse noch etwas weiter zu führen, und eine, wie es uns scheint, nicht ganz unwesentliche Interpretation jener Ergebnisse zu leisten.

Wir stellen uns folgende Aufgabe:

In der Ebene sind n Punkte gegeben, welche auf einer analytischen Kurve von bekanntem Charakter liegen sollen. In Bezug auf ein beliebig gewähltes rechtwinkliges Koordinatensystem werden die Koordinaten x und y jener n Punkte gemessen. Die Gewichte dieser Koordinatenmessungen für den Punkt x_i, y_i seien p_i und p'_i. Durch eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate sollen die wahrscheinlichsten Werte der Konstanten in der Gleichung der vorliegenden Kurve bestimmt werden.

Für einen Punkt x, y, der auf unserer Kurve liegt, gelte die Gleichung

$$F\ (A,\ B,\ C \ldots .\ x,\ y) = 0, \qquad (1)$$

wobei A, B, C Konstante sind.

Für einen Kreis z. B. würde die Gleichung (1) lauten:

$$(x-A)^2 + (y-B)^2 - C^2 = 0,$$

wobei A und B die Koordinaten des Mittelpunktes, C der Radius des Kreises sind.

Für einen allgemeinen Kegelschnitt aber könnte die Gleichung z. B. in folgender Form geschrieben werden:

$$x^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

oder auch

$$A'x^2 + B'y^2 + 2C'xy + 2D'x + 2E'y + 1 = 0.$$

Bezeichnen wir die wahrscheinlichsten Verbesserungen der gemessenen Koordinaten des Punktes P_i mit v_i und v'_i, so werden die wahrscheinlichsten Koordinaten dieses Punktes bezeichnet mit:

$$X_i = x_i + v_i; \qquad Y_i = y_i + v_i. \qquad (2)$$

Wir erhalten nun folgende n Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} &F\ (A,\ B,\ C \ldots .\ x_1 + v_1,\ y_1 + v'_1) = 0, \\ &F\ (A,\ B,\ C \ldots .\ x_2 + v_2,\ y_2 + v'_2) = 0, \qquad (3) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F\ (A,\ B,\ C \ldots .\ x_n + v_n,\ y_n + v'_n) = 0. \end{aligned}$$

Schon verschiedentlich sind das vorliegende und ähnliche Probleme in der Weise zu lösen versucht worden, daß man den Ansatz für den Punkt P_i folgendermaßen machte:

$$F\ (A,\ B,\ C \ldots .\ x_i,\ y_i) = v_i$$

und daß man dann $[v_i\ v_i]_{i=1}^{i=n}$ zu einem Minimum machte.

So geht z. B. Professor R. Schumann in „Bestimmung einer Geraden aus den gemessenen Koordinaten ihrer Punkte“ vor, veröffentlicht in den Sitzungsberichten der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-naturwissenschaftliche Kl. Abt. IIa, 125. Band, 10. Heft, 1916, Seiten 1429—1466.

Dieser Ansatz widerspricht dem Grundsatze der Methode der kleinsten Quadrate, daß die Verbesserungen v der *gemessenen* Größen, deren Gewichte mit p bezeichnet werden mögen, der Bedingung [p v v] = Minimum unterworfen werden sollen; es geht also nicht an, irgend welche Funktionen der gemessenen Größen mit v zu bezeichnen, und dann diese v der bekannten Minimumsbedingung zu unterziehen. Gewiß läßt sich unter Um-

ständen *beweisen*, daß ein solcher Ansatz in Uebereinstimmung mit der korrekten Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate zu bringen ist (wir werden Gelegenheit haben, so etwas für unsere Aufgabe zu beweisen), aber a priori ist ein solcher Ansatz zu verwerfen.

Um unsere Bedingungsgleichungen (3) linear zu machen, wählen wir für die Koeffizienten A, B, C .... Näherungswerte A_0, B_0, C_0 ...., von denen wir voraussetzen wollen, daß sie nur um Größen von der Ordnung der Messungsfehler von den wahrscheinlichsten Werten abweichen.

$$A = A_0 + \Delta A; \quad B = B_0 + \Delta B; \quad C = C_0 + \Delta C \ldots \qquad (4)$$

Entwickeln wir jetzt die Funktionen (3) nach dem Taylor'schen Satze, wobei wir voraussetzen, daß wir die höhern Glieder dieser Entwicklung vernachlässigen dürfen, so erhalten wir zunächst für die erste Gleichung:

$$F\,(A_0 + \Delta A,\ B_0 + \Delta B,\ C_0 + \Delta C,\ \ldots x_1 + v_1,\ y_1 + v'_1) =$$

$$F\,(A_0,\ B_0,\ C_0, \ldots x_1,\ y_1) + \left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)_{A_0, B_0, C_0, x_1, y_1} \Delta A + \frac{\partial F}{\partial B} \Delta B \qquad (6^1)$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial C} \Delta C + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x} v_1 + \frac{\partial F}{\partial y} v'_1 = 0.$$

Wir setzen zur Abkürzung:

$$\left.\begin{array}{l}
F\,(A_0,\ B_0,\ C_0, \ldots x_1,\ y_1) = w_1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
F\,(A_0,\ B_0,\ C_0, \ldots x_n,\ y_n) = w_n \\
\left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)_{A_0, B_0, C_0, \ldots x_1, y_1} = a_1 \ldots \left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)_{A_0, B_0, C_0, \ldots x_n y_n} = a_n \\
\left(\frac{\partial F}{\partial B}\right)_{A_0, B_0, C_0, \ldots x_1, y_1} = b_1 \ldots \left(\frac{\partial F}{\partial B}\right)_{A_0 B_0, C_0, \ldots x_n, y_n} = b_n \\
\left(\frac{\partial F}{\partial C}\right)_{A_0, B_0, C_0, \ldots x_1, y_1} = c_1 \ldots \left(\frac{\partial F}{\partial C}\right)_{A_0, B_0, C_0, \ldots x_n, y_n} = c_n \\
\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{A_0, B_0, C_0, \ldots x_1, y_1} = f_1; \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{A_0, B_0, C_0, \ldots x_1, y_1} = f'_1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{A_0, B_0, C_0, \ldots x_n, y_n} = f_n; \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{A_0, B_0, C_0, \ldots x_n, y_n} = f'_n
\end{array}\right\} \qquad (5)$$

und erhalten damit aus (3) folgende n linearen Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} w_1 + a_1 \Delta A + b_1 \Delta B + c_1 \Delta C + \ldots + f_1 v_1 + f'_1 v'_1 = 0 \\ w_2 + a_2 \Delta A + b_2 \Delta B + c_2 \Delta C + \ldots + f_2 v_2 + f'_2 v'_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_n + a_n \Delta A + b_n \Delta B + c_n \Delta C + \ldots + f_n v_n + f'_n v'_n = 0 \end{array}\right\} \quad (6)$$

Unter Beachtung dieser Bedingungsgleichungen (6) haben wir nach der Methode der kleinsten Quadrate $[p\,v\,v] + [p'\,v,\,v']$ zu einem Minimum zu machen. Damit ist unser Problem zurückgeführt auf die allgemeinste Aufgabe der Methode der kleinsten Quadrate, wie sie z. B. Helmert in seiner „Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate", Leipzig 1907, 2. Auflage, Seite 285 u. ff., ausführlich behandelt.

Die in unserm Problem auftretenden Bedingungsgleichungen (6) stellen aber einen relativ einfachen Spezialfall des allgemeinen Problemes dar, indem jede Bedingungsgleichung nur zwei Verbesserungen enthält, und jede Verbesserung nur in *einer* Bedingungsgleichung auftritt. Dieser Umstand erlaubt uns, eine einfache Lösung zu erhalten.

Da es sich um eine Minimumsaufgabe ($[p\,v\,v] + [p'\,v'\,v'] =$ Minimum) mit den Nebenbedingungen (6) handelt, so bilden wir, unter Zuhilfenahme von unbestimmten Koeffizienten K_1, $K_2 \ldots K_n$ (Korrelaten) die zusammengesetzte Funktion:

$$\begin{array}{l} \Phi = [p\,v\,v] + [p'\,v'\,v'] \\ - 2\,K_1\,(w_1 + a_1 \Delta A + b_1 \Delta B + c_1 \Delta C + \ldots + f_1 v_1 + f'_1 v'_1) \\ - 2\,K_2\,(w_2 + a_2 \Delta A + b_2 \Delta B + c_2 \Delta C + \ldots + f_2 v_2 + f'_2 v'_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ - 2\,K_n\,(w_n + a_n \Delta A + b_n \Delta B + c_n \Delta C + \ldots + f_n v_n + f'_n v'_n) \end{array} \quad (7)$$

und setzen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial (\Delta A)} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial (\Delta B)} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial (\Delta C)} = 0; \ldots\ldots$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_1} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v_2} = 0; \ldots\ldots \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v_n} = 0;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v'_1} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v'_2} = 0; \ldots\ldots \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v'_n} = 0.$$

Dies liefert folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_1 K_1 + a_2 K_2 + \ldots\ldots + a_n K_n &= 0 \\ b_1 K_1 + b_2 K_2 + \ldots\ldots + b_n K_n &= 0 \\ c_1 K_1 + c_2 K_2 + \ldots\ldots + c_n K_n &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} p_1 v_1 &= f_1 K_1; \quad p_2 v_2 = f_2 K_2; \ldots\ldots p_n v_n = f_n K_n \\ p'_1 v'_1 &= f'_1 K_1; \quad p'_2 v'_2 = f'_2 K_2; \ldots\ldots p'_n v'_n = f'_n K_n \end{aligned} \tag{9}$$

Setzen wir die aus den Gleichungen (9) folgenden Werte für die v und v' in die Gleichungen (6) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} w_1 + a_1 \Delta A + b_1 \Delta B + c_1 \Delta C + \ldots\ldots + \left(\frac{f_1 f_1}{p_1} + \frac{f'_1 f'_1}{p'_1}\right) K_1 &= 0 \\ w_2 + a_2 \Delta A + b_2 \Delta B + c_2 \Delta C + \ldots\ldots + \left(\frac{f_2 f_2}{p_2} + \frac{f'_2 f'_2}{p'_2}\right) K_2 &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_n + a_n \Delta A + b_n \Delta B + c_n \Delta C + \ldots\ldots + \left(\frac{f_n f_n}{p_n} + \frac{f'_n f'_n}{p'_n}\right) K_n &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Wir setzen zur Vereinfachung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{f_1 f_1}{p_1} + \frac{f'_1 f'_1}{p'_1}} &= g_1; \quad \frac{1}{\frac{f_2 f_2}{p_2} + \frac{f'_2 f'_2}{p'_2}} = g_2; \\ \ldots\ldots\ldots \quad & \frac{1}{\frac{f_n f_n}{p_n} + \frac{f'_n f'_n}{p'_n}} = g_n \end{aligned} \tag{11}$$

und erhalten damit aus (10):

$$\begin{aligned} K_1 &= - a_1 g_1 \Delta A - b_1 g_1 \Delta B - c_1 g_1 \Delta C - w_1 g_1 \\ K_2 &= - a_2 g_2 \Delta A - b_2 g_2 \Delta B - c_2 g_2 \Delta C - w_2 g_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K_n &= - a_n g_n \Delta A - b_n g_n \Delta B - c_n g_n \Delta C - w_n g_n \end{aligned} \tag{12}$$

Setzen wir die Werte von (12) in die Gleichungen (8) ein, so erhalten wir nach Multiplikation mit — 1:

$$\begin{aligned} [a\,a\,g]\,\Delta A + [a\,b\,g]\,\Delta B + [a\,c\,g]\,\Delta C + \ldots + [a\,w\,g] &= 0 \\ [a\,b\,g]\,\Delta A + [b\,b\,g]\,\Delta B + [b\,c\,g]\,\Delta C + \ldots + [b\,w\,g] &= 0 \\ [a\,c\,g]\,\Delta A + [b\,c\,g]\,\Delta B + [c\,c\,g]\,\Delta C + \ldots + [c\,w\,g] &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Damit ist die Aufgabe gelöst. Da die Gleichungen (13) Normalgleichungscharakter haben, nennen wir sie die Normalgleichungen der ΔA, ΔB, ΔC, ...

Wir setzen:

$$\begin{aligned} f_1 v_1 + f'_1 v'_1 &= -\lambda_1 \quad \text{Gewicht } g_1 \\ f_2 v_2 + f'_2 v'_2 &= -\lambda_2 \quad \text{Gewicht } g_2 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ f_n v_n + f'_n v'_n &= -\lambda_n \quad \text{Gewicht } g_n \end{aligned} \tag{14}$$

Da die x und y beobachtungstechnisch voneinander unabhängig sind, können wir aus diesen Gleichungen die mittleren Fehler und damit die Gewichte der λ nach dem Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz berechnen. Da das Gewicht von v_1 p_1, von v'_1 p'_1 ist, so erhalten wir:

$$m^2_{\lambda_1} = f_1^2 m_1^2 + f'^2_1 m'^2_1$$

wo $m_1^2 = \frac{\mu^2}{p_1}$; $m'^2_1 = \frac{\mu^2}{p'_1}$, wenn μ der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist; also folgt:

$$m^2_{\lambda_1} = \mu^2 \left(\frac{f_1 f_1}{p_1} + \frac{f'_1 f'_1}{p_1} \right),$$ woraus weiter folgt:

$$\text{Gewicht von } \lambda_1 = \frac{\mu^2}{m^2_{\lambda_1}} = \frac{1}{\frac{f_1 f_1}{p_1} + \frac{f'_1 f'_1}{p'_1}} = g_1$$

gemäß Gleichung (11).

Analog wird das Gewicht von λ_2 gleich g_2 etc. Dies haben wir bei den Gleichungen (14) schon angedeutet.

Unter Beachtung der Gleichungen (14) ergeben die Gleichungen folgendes:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= w_1 + a_1 \Delta A + b_1 \Delta B + c_1 \Delta C, \ldots \quad \text{Gewicht } g_1 \\ \lambda_2 &= w_2 + a_2 \Delta A + b_2 \Delta B + c_2 \Delta C, \ldots \quad \text{Gewicht } g_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_n &= w_n + a_n \Delta A + b_n \Delta B + c_n \Delta C, \ldots \quad \text{Gewicht } g_n \end{aligned} \tag{15}$$

Fassen wir diese Gleichungen (15) als Fehlergleichungen einer vermittelnden Ausgleichung mit den Unbekannten ΔA, ΔB, $\Delta C \ldots$ auf und geben ihnen die respektiven Gewichte g_1, $g_2, \ldots g_n$, wie wir das schon bei den Gleichungen (15) angedeutet haben, so erkennen wir, daß wir nach diesem Vorgang dieselben Normalgleichungen (13) erhalten wie früher.

Das Gleichungssystem (15), das mit n fingierten Beobachtungen operiert, deren Verbesserungen $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$, deren Gewichte die Größen $g_1, g_2 \ldots g_n$ gemäß den Gleichungen (11) sind, ist total äquivalent den ursprünglichen 2 n Beobachtungen

$x_1\ y_1,\ x_2\ y_2, \ldots x_n\ y_n$ mit den Gewichten $p_1,\ p'_1,\ p_2,\ p'_2, \ldots$ $p_n,\ p'_n$, indem es den Unbekannten $\Delta A,\ \Delta B,\ \Delta C, \ldots$ dieselben Werte und Gewichte gibt, wie die ursprünglichen Beobachtungen, was aus der Identität der Normalgleichungen folgt.

Nachdem dieser Beweis geleistet ist, können wir jetzt unsere Aufgabe viel einfacher lösen, indem wir von den Gleichungen (15) unter Beachtung der Gleichungen (11) für die Gewichte ausgehen. Aber erst jetzt sind wir dazu berechtigt, nachdem die korrekte Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate uns diesen Weg weist. In diesem Sinne sind unsere früheren Bemerkungen aufzufassen.

Gehen wir von den Gleichungen (15) aus, so können wir nach der Auflösung der Normalgleichungen (13) die numerischen Werte der $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots \lambda_n$ durch Einsetzen der $\Delta A,\ \Delta B,\ \Delta C$ berechnen. Es stellt sich uns dann noch die Aufgabe, mit Hilfe dieser Größen auch die Verbesserungen v und v' der ursprünglichen Beobachtungen x und y zu berechnen. Aus den Gleichungen (14) und (9) erhalten wir:

$$\frac{f_1\, f_1}{p_1} K_1 + \frac{f'_1\, f'_1}{p'_1} K_1 = -\lambda_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{f_n\, f_n}{p_n} K_n + \frac{f'_n\, f'_n}{p'_n} K_n = -\lambda_n$$

woraus unter Beachtung von (11) folgt:

$$K_1 = -\lambda_1\, g_1;\ K_2 = -\lambda_2\, g_2;\ \ldots\ldots K_n = -\lambda_n\, g_n \qquad (16)$$

Damit erhalten wir aus (9):

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{f_1}{p_1} g_1\, \lambda_1; & v'_1 &= -\frac{f'_1}{p'_1} g_1\, \lambda_1 \\ v_2 &= -\frac{f_2}{p_2} g_2\, \lambda_2; & v'_2 &= -\frac{f'_2}{p'_2} g_2\, \lambda_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n &= -\frac{f_n}{p_n} g_n\, \lambda_n; & v'_n &= -\frac{f'_n}{p'_n} g_n\, \lambda_n \end{aligned} \qquad (17)$$

Es ist also:

$$p_1\, v_1^2 + p'_1\, v'^2_1 = g_1^2\, \lambda_1^2 \left(\frac{f_1^2}{p_1} + \frac{f'^2_1}{p'_1}\right) = g_1\, \lambda_1^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_n\, v_n^2 + p'_n\, v'^2_n = g_n^2\, \lambda_n^2 \left(\frac{f_n^2}{p_n} + \frac{f'^2_n}{p'_n}\right) = g_n\, \lambda_n^2$$

Daraus erkennt man:

$$[p\,v\,v] + [p'\,v'\,v'] = [g\,\lambda\,\lambda] \tag{18}$$

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit wird daher:

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\,v\,v] + [p'\,v'\,v']}{n-u}} = \sqrt{\frac{[g\,\lambda\,\lambda]}{n-u}} \tag{19}$$

wo u die Anzahl der Unbekannten ΔA, ΔB, ΔC, . . . ist.

Bis hieher sind wir im wesentlichen dem eingangs zitierten Artikel von Professor Eggert in der deutschen „Zeitschrift für Vermessungswesen" gefolgt.

Für die fingierten Verbesserungen λ vermögen wir nun eine einfache geometrische Bedeutung nachzuweisen, womit das Ergebnis erst ins rechte Licht gesetzt wird.

Bezeichnen wir den Abstand des Punktes P_i mit den Koordinaten x_i, y_i von der durch die Ausgleichung gelieferten Kurve $F(A, B, C, \ldots x, y) = 0$ mit ρ_i, so können wir leicht zeigen, daß

$$\lambda_i = \rho_i \sqrt{f_i^{\,2} + f'^{\,2}_i} \text{ ist.} \tag{20}$$

Der Abstand d des Punktes x_i, y_i von einem beliebigen Punkte x, y der Kurve $F(A, B, C, \ldots x, y) = 0$ ist

$$d^2 = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2.$$

Soll dies in den Abstand des Punktes x_i, y_i von der Kurve übergehen, so muß x, y so gewählt werden, daß d^2 ein Minimum wird.

Wir bilden daher die zusammengesetzte Funktion

$$\Psi = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 - 2\,K\,F(A, B, C, \ldots x, y)$$

und setzen

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0.$$

Bezeichnen wir den auf der Kurve laufenden Punkt x, y, der das Minimum von d^2, d. i. ρ^2 erzeugt, mit $\overline{x_i}$, $\overline{y_i}$, so haben wir:

$$x_i - \overline{x_i} + K\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\overline{x_i},\,\overline{y_i}} = 0. \quad y_i - \overline{y_i} + K\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\overline{x_i},\,\overline{y_i}} = 0. \tag{21}$$

Dazu kommt noch die Gleichung

$$F(A, B, C, \ldots \overline{x_i}, \overline{y_i}) = 0$$

da der Punkt $\overline{x_i}$, $\overline{y_i}$ auf der Kurve liegt.

(Schluß folgt.)