Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 17 (1919)

Heft: 6

Artikel: Statik der Luft-Seilbahnen [Fortsetzung]

Autor: Zwicky, C.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-185582

nant acte encore une fois des promesses qui ont été faites lors de leur création, à savoir que leur ligne de conduite ne sera pas contraire à celle de la société centrale et que leurs comités respectifs s'entendront avec le Comité central en vue de démarches communes et de directions uniques. *Ch. Rœsgen*

Statik der Luft-Seilbahnen.

Von *C. Zwicky*, Professor an der Eidgen. Technischen Hochschule Zürich.

(Fortsetzung.)

IV.

Die gemeine Kettenlinie als Seilkurve.

1. Die Form der Seilkurve.

a) *Die Gleichung der Seilkurve.* Bei einem Seil mit konstantem Querschnitt F und dementsprechend konstantem Gewicht g pro Längeneinheit des *gebogenen* Seiles ergibt sich für das Gewicht G_x eines Seilstückes s_P zwischen dem tiefsten Seilpunkt P_o und einem beliebigen Zwischenpunkt P:

$$G_x = \int_0^x g_x \, . \, dx = g \, . \, s_P \, .$$

Damit geht die Differentialgleichung erster Ordnung der Seilkurve über in:

$$\frac{dy}{dx} = p_P = \frac{G_x}{H} = \underline{\frac{g}{H} \, . \, s_P = \frac{dy}{dx}} \tag{1}$$

Nun gelten bei der gemeinen Kettenlinie die Beziehungen:

$$y = \frac{a}{2} \cdot \left\{ e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{a}{x}} \right\}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right\}$$

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right\} = \frac{y}{a}, \qquad s_P = \frac{a}{2} \cdot \left\{ e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right\} = a \, . \frac{dy}{dx}$$

Somit ist bei dieser Funktion

$$\underline{\frac{dy}{dx} = \frac{s_P}{a}} \tag{2}$$

Wählt man dann für die Konstante a speziell den Wert: $a = \frac{H}{g}$, so geht die Gleichung (2) in die Gleichung (1) über. Seilkurve und Kettenlinie haben daher den gleichen ersten Differentialquotienten, so daß sich deren Ordinaten y nur durch eine Additionskonstante als Integrationskonstante unterscheiden können. Diese letztere kann dann durch geeignete Parallelverschiebung der Abszissenachse auf den Wert Null gebracht werden, so daß die Gleichung der Kettenlinie direkt als diejenige der Seilkurve betrachtet werden kann.

b) *Die Hyperbelfunktionen.* Sowohl die formalen Beziehungen als auch insbesondere die numerischen Berechnungen gestalten sich bei der Kettenlinie wesentlich einfacher, wenn man dabei von den Hyperbelfunktionen Gebrauch macht.

Zwischen den „*Kreis*funktionen" cos x und sin x einerseits und der Exponentialfunktion e^x anderseits gelten bekanntlich die Beziehungen:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Wenn man nun hierin an Stelle von $i = \sqrt{-1}$ den Wert 1 einsetzt und außerdem für das Argument den neuen Buchstaben φ wählt, dann gehen die beiden obigen Formeln über in diejenigen für die „*Hyperbel*funktionen":

$$\underline{\mathfrak{Cos}\,\varphi = {}^1/_2\,.\,(e^{\varphi} + e^{-\varphi})} \text{ und } \underline{\mathfrak{Sin}\,\varphi = {}^1/_2\,(e^{\varphi} - e^{-\varphi})} \quad (3)$$

Hiebei bedeutet φ eine *Fläche* (= area), wofür abgekürzt $\mathfrak{Ar}$ geschrieben wird.

Ein kurzer Abriß über die Theorie dieser Funktionen findet sich im ersten Teil der „Hütte", der auch eine Tabelle für die numerischen Werte der Funktionen, sowie eine solche für die zugehörigen Logarithmen enthält. Ausführliche Tabellenwerte haben herausgegeben:

Ligowski, Berlin 1890, bei Wilhelm Ernst & Sohn;
Burrau, Berlin 1907, bei G. Reimer.

Unter Benützung der beiden Hyperbelfunktionen $\mathfrak{Sin}\,\varphi$ und $\mathfrak{Cos}\,\varphi$ erhält man nun bei der Kettenlinie

$$\left.\begin{aligned} &\text{mit der Konstanten: } a = \frac{H}{g} \\ &\text{und der Abkürzung: } \varphi = \frac{x}{a} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

die nachfolgenden einfachen Beziehungen:

$$\text{Ordinate:} \quad y = \frac{a}{2}\cdot\left\{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right\}, \text{ also } \underline{y = a\,.\,\mathfrak{Cos}\,\varphi} \quad (5)$$

$$\text{Neigung:} \quad p_P = \frac{1}{2}\left\{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right\} \quad \text{„} \quad \underline{p_P = \mathfrak{Sin}\,\varphi} \quad (6)$$

$$\text{Bogenlänge: } s_P = \frac{a}{2} \cdot \left\{ e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right\} \quad „ \quad \underline{s_P = a \, . \, p_P} \tag{7}$$

$$\text{Argument: } \quad \underline{\varphi = \frac{x}{a} = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\left(\frac{y}{a}\right) = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\; p_P} \tag{8}$$

2. Berechnung der Kettenlinien.

Wie die Parabel, so ist auch die Kettenlinie eindeutig bestimmt, wenn von den zwei Längen l und h, sowie den Neigungen p_A und p_B drei beliebige dieser vier Größen gegeben sind. Die Berechnung der Kettenlinie gestaltet sich aber prinzipiell etwas verschieden, je nachdem sich unter den drei Daten beide Neigungen oder beide Längen befinden. Nur im ersteren Falle ist eine direkte Lösung möglich.

a) *Direkte Berechnung mit den Neigungen p_A und p_B.* Aus diesen beiden Daten lassen sich zunächst einige Verhältniszahlen für die Längen bestimmen.

$$\left.\begin{aligned}
p_B - p_A &= \mathfrak{Sin}\,\varphi_B - \mathfrak{Sin}\,\varphi_A = \frac{s_B - s_A}{a}, \text{ also } p_B - p_A = \frac{s}{a} \\
\varphi_B - \varphi_A &= \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,p_B - \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,p_A = \frac{x_B - x_A}{a}, \;„\; \varphi_B - \varphi_A = \frac{l}{a} \\
\mathfrak{Cos}\,\varphi_B - \mathfrak{Cos}\,\varphi_A &= \frac{y_B - y_A}{a} \text{ also } \mathfrak{Cos}\,\varphi_B - \mathfrak{Cos}\,\varphi_A = \frac{h}{a}
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Je nachdem dann außer den beiden Neigungen p_A und p_B als Länge noch gegeben ist s oder l oder h, erhält man mit den drei Quotienten von (9) weiter:

Aus	Berechnungen		(10)
s	$a = s : \frac{s}{a}$	$l = a \, . \, \frac{l}{a}$	$h = a \, . \, \frac{h}{a}$
l	$a = l : \frac{l}{a}$	$s = a \, . \, \frac{s}{a}$	$h = a \, . \, \frac{h}{a}$
h	$a = h : \frac{h}{a}$	$l = a \, . \, \frac{l}{a}$	$s = a \, . \, \frac{s}{a}$

(Fortsetzung folgt.)