

<b>Zeitschrift:</b>	Schweizerische Geometer-Zeitung = Revue suisse des géomètres
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres
<b>Band:</b>	16 (1918)
<b>Heft:</b>	12
 <b>Artikel:</b>	Graphisches Verfahren zur Reduktion optisch gemessener Polygonseiten [Schluss]
<b>Autor:</b>	Müller, E. / Zwicky, C.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-185058">https://doi.org/10.5169/seals-185058</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Schritt bleibt es noch vorbehalten, für Verzinsung dieser Garantiesumme einzutreten.

In einer der letzten Sitzungen trat die Sektion der Ausbildung der Hülfskräfte näher. Wir nahmen Stellung dazu in dem Sinne, daß wir es für wichtig halten, unsere Hülfskräfte während einer dreijährigen Lehrzeit auszubilden und daneben die nötige Theorie in mehreren kurzen Winterkursen zu übermitteln.

Viel Arbeit gaben im laufenden Jahre die Taxationen der zur Vermessung gelangenden Gemeinden; es ist nur bemühend, zu konstatieren, daß die maßgebenden Instanzen einen Beschuß über die Vergabeung erst erdauern müssen. Von den im Juli ausgeschriebenen Seegemeinden, welche Akten unser Kantonsgeometer innert acht Tagen nach Ablauf der Eingabefrist weiterleitete, sind bis jetzt Weggis und Greppen vergeben worden und zwar beide an unsern Kollegen Schwarzenbach, welcher jetzt unseres Wissens als Erster Grundbuchpläne im Maßstab 1 : 5000 in parzelliertem Gebiete aufnehmen wird. Das nächste Jahr wird uns wieder eine Reihe neuer Gemeinden zur Vermessung bringen.

In Zukunft werden sich die Arbeiten in den Sektionen wohl auf Fragen von rein allgemeinem Interesse beschränken, indem dann die Untergruppen der Privatgeometer und Angestellten die speziellen Interessenfragen verarbeiten werden.

Luzern, im November 1918.

G. Merian.

---

### Graphisches Verfahren zur Reduktion optisch gemessener Polygonseiten.

Von E. Müller, Grundbuchgeometer in Möhlin, und  
C. Zwicky, Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich.

(Schluß.)

Bei dem hier in Frage stehenden Ausdruck  $u = 100 \cdot L \cdot \sin^2 \alpha$  wollen wir jetzt zur Vereinfachung die Maßeinheit ändern, indem wir die bisherige cm-Einheit durch die m-Einheit ersetzen und dementsprechend an Stelle von  $u$  die neue Bezeichnung  $U$  einführen. Man erhält dann, da  $100 \text{ cm} = 1 \text{ m}$  sind:

$$\underline{U = \frac{u}{100} = L \cdot \sin^2 \alpha.} \quad (12)$$

Diese Gleichung dividieren wir noch durch eine konstante Zahl  $a$ , über deren Größe wir später eine zweckentsprechende Verfügung treffen werden. Damit erhält man dann:

$$\underline{\underline{\frac{U}{a} = L \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{a}}.} \quad (13)$$

Nun vergleichen wir die beiden Gleichungen (11) und (13) und suchen dieselben in Uebereinstimmung zu bringen. Zu diesem Zwecke wählen wir in Figur 3 als Abschnitt  $M_0 M$  auf  $m$  das Maß des Lattenabschnittes  $L$ , d. h. wir treffen die Verfügung

$$\underline{x = L}. \quad (14)$$

Sodann bestimmen wir den Punkt  $P$  auf der festen Geraden  $M_0 N_0 = p$  in der Weise, daß wird

$$\frac{z}{e-z} = \frac{\sin^2 \alpha}{a}, \text{ also } a \cdot z = e \cdot \sin^2 \alpha - z \cdot \sin^2 \alpha,$$

was der Fall ist für

$$\underline{\underline{z = e \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{a + \sin^2 \alpha}}.} \quad (15)$$

Die durch die Gleichungen (14) und (15) bestimmten Punkte  $M$  und  $P$  liefern nun durch ihre Verbindungsgerade die Transversale  $t$ , welche mit ihrem Schnittpunkt  $N$  auf  $n$  als Abschnitt  $N_0 N = y$  ergibt:

$$y = x \cdot \frac{z}{e-z} = L \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{a} = \frac{U}{a},$$

so daß man schließlich erhält:

$$\underline{\underline{U = a \cdot y}}. \quad (16)$$

Das in Meter ausgedrückte Maß des Abzuges  $U$  wird also erhalten, indem man den im Maßstabe der Lattenabschnitte  $L$  (wie sie auf der Geraden  $m$  aufgetragen sind) auf der Geraden  $n$  abgelesenen Abschnitt  $y = N_0 N$  mit der konstanten Zahl  $a$  multipliziert. Diese Multiplikation wird am einfachsten dadurch vollzogen, daß man als Bezifferung der Teilstriche von der Skala auf der Geraden  $n$  das  $a$ -fache von  $y$  wählt, womit dieselbe dann direkt in eine  $U$ -Skala übergeht.

Hinsichtlich des Faktors  $a$  soll vorläufig nur auf einige all-

gemeine Verhältnisse über den Einfluß seiner Größe aufmerksam gemacht werden. Aus der Gleichung (15) ergibt sich: je kleiner die Zahl  $a$  gewählt wird, desto größer fällt der Abschnitt  $N_0 P = z$  aus, so daß dann für eine um so größere Anzahl von Argumentenwerten  $\alpha$  eine Darstellung durch Skalenstriche erzielt werden kann. Aus der Figur 3 ersieht man ferner, daß mit wachsendem  $z$  auch  $y$  zunimmt; und endlich folgt aus der Gleichung (16) durch Differenzieren:

$$dU = a \cdot d y,$$

d. h. der aus der Zeichnung entnommene Funktionswert  $U$  ist mit einem Fehler  $dU$  behaftet, der das  $a$ -fache des zu erwartenden Streckenfehlers  $dy$  beträgt, somit um so kleiner ausfällt, je kleiner die Zahl  $a$  oder je größer die Strecke  $y = \frac{U}{a}$  gewählt worden ist.

d) *Anwendung.* Obschon die Verhältnisse bezüglich der Strecken  $N_0 P = z$  noch keineswegs ganz klar gestellt sind — es wird dies im folgenden 4. Abschnitt nachgeholt werden — wollen wir nun dazu übergehen, die Anwendung der Theorie unter 3, c an Hand eines Beispiels näher zu erläutern.

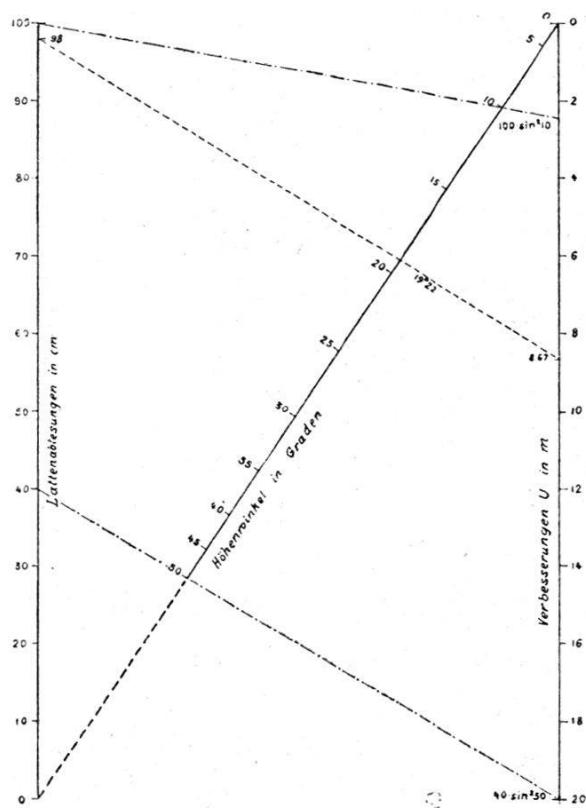


Fig. 4

Fig. 4. Schematisches Nomogramm für die  $u$ -Funktion.

Die Figur 4 ist ein verkleinertes Bild einer Originalfigur, welche folgende Dispositionen und Längen aufweist:

Auf der  $m$ -Vertikalen links ist eine Strecke  $x' = 50$  cm in 500 gleich große Elemente  $d x'$  eingeteilt, wobei  $x'$  der maximalen Lattenablesung  $L = 100$  cm und folglich  $d x' = 1$  mm der Differenz  $\Delta L = 0,2$  cm entspricht. Diese Skala der  $L$  hat also den Maßstab 1 : 2.

Die n-Vertikale rechts zeigt eine gleich lange Strecke  $y' = 50$  cm, welche somit im Maßstab für L ebenfalls  $y = 100$  Einheiten in Centimetern entspricht. Als Maximum des in der Zeichnung zu berücksichtigenden Abzuges ist der Betrag  $U = 20$  m zugrunde gelegt worden, der nun durch jene Strecke  $y'$  angegeben werden soll. Damit ergibt sich für die Größe der konstanten Zahl  $a$ :

$$a = \frac{U}{y'} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} = 0,20.$$

Hinsichtlich der Lage von n gegenüber der Vertikalen m ist in folgender Weise disponiert worden: Der Nullpunkt  $N_0$  liegt auf der Horizontalen durch den oberen Endpunkt  $M_{100}$  von m, womit dann der untere Endpunkt  $N_{20}$  von n in die Horizontale durch  $M_0$  zu liegen kommt; die Strecken  $M_0 M_{100}$  und  $N_{20} N_0$  bilden also die Höhenseiten eines Rechteckes. Der Abstand zwischen den beiden Vertikalen m und n, d. h. die Grundlinie  $M_0 N_{20}$  jenes Rechteckes, wurde angenommen zu

$$\frac{3}{4} \cdot 50 = 37,5 \text{ cm.}$$

Damit ergibt sich dann als Länge der Diagonalen  $M_0 N_0 = e$  des obigen Rechteckes:

$$\overline{M_0 N_0}^2 = \overline{M_0 N_{20}}^2 + \overline{N_{20} N_0}^2 = \overline{N_0 N_{20}}^2 \cdot \left\{ \left( \frac{3}{4} \right)^2 + 1 \right\} = \frac{25}{16} \cdot \overline{N_0 N_{20}}^2,$$

$$\text{also: } e = \frac{5}{4} \cdot 50 = 62,5 = \frac{1000}{16} \text{ cm} = e.$$

Denken wir uns nun diese Gerade  $N_0 M_0$  noch mit der z-Skala für die Punkte P versehen, so ergibt sich nach der Figur 4 zunächst mit den zwei äußern, durch strichpunktierte Linien dargestellten Transversalen, daß:

$$\begin{aligned} \text{für } L &= 40 \text{ cm mit } \alpha = 50^\circ \text{ wird: } U = 20,00 \text{ m und} \\ &\quad " L = 100 " " \alpha = 10^\circ " U = 2,45 " \end{aligned}$$

In der praktischen Anwendung der Zeichnung werden indessen diese Transversalen nicht gezeichnet, weil sich damit sehr bald ein solcher Wirrwarr von Linien ergeben würde, das ein rasches — und zugleich richtiges — Ablesen von U fast unmöglich machen würde. Die Transversalen werden vielmehr durch eine feine Linie auf der Unterseite einer Glas- oder Zelluloidplatte markiert, womit außer dem Wegfall der Konstruktionslinien auch noch der Vorteil einer größeren Genauigkeit erzielt wird.

Die Figur 4 zeigt ferner mittelst der punktierten mittleren Transversalen, daß sich für das bereits bei der v-Funktion benutzte Beispiel mit  $L = 98,0 \text{ cm}$  und  $\alpha = 19,8^{\circ}$  22 als Funktionswert  $U$  der Betrag  $8,67 \text{ m}$  ergibt. An Hand dieses Beispiels erhält man dann für die Reduktion der optisch gemessenen Polygonseiten den nachfolgenden Rechnungsgang:

1. Näherungswert:  $\Delta = 100 \cdot L = 98,00 \text{ m}$
2. Zugabe(nach Fig. 1):  $v = 0,40 \text{ m}$
3. Summe:  $\Sigma = \Delta + v = 98,40 \text{ m}$
4. Abzug (nach Fig. 4):  $U = 8,67 \text{ m}$
5. Resultat:  $d = \Sigma - U = 89,73 \text{ m}$

In der Praxis kann natürlich die Summe  $\Sigma$  durch Addition im Kopfe gebildet und das Anschreiben der Formeln unterlassen werden.

Hinsichtlich der Genauigkeit für die graphische Bestimmung von  $U$  ergibt sich noch folgendes:

Da für den Maximalbetrag von  $U$ , nämlich für  $U = 20,00 \text{ m}$  oder  $u = 2000 \text{ cm}$ , im Original zur Figur 4 eine Strecke  $y' = 50 \text{ cm}$  zur Verfügung steht, so gilt allgemein:

$$u : y' = 2000 : 50 = 40, \text{ also } u = 40 \cdot y' \text{ und } d_u = 40 \cdot d_{y'}$$

Das Maximum des zu erwartenden linearen Ablesungsfehlers  $\Delta y'$  wollen wir zu  $\pm \frac{1}{4} \text{ mm} = \pm \frac{1}{40} \text{ cm}$  annehmen; dann entspricht diesem Fehler als Maximalfehler für  $u$  der Wert:  $\Delta u = 40 \cdot (\pm \frac{1}{40}) = \pm 1 \text{ cm}$ , so daß die Funktion  $U$  im ganzen Bereich  $0 < U < 20 \text{ m}$  mit der *gleichen*, und jedenfalls hinreichenden Genauigkeit ermittelt werden kann.

Dabei erscheint bei der Verwendung einer Glasplatte der Maximalfehler  $\Delta y' = \pm \frac{1}{4} \text{ mm}$  auf den ersten Blick noch eher als zu hoch eingeschätzt. Es darf indessen nicht übersehen werden, daß bei der Ablesung für  $U$  sich auch die Einstellungsfehler bei den Skalen für  $L$  auf  $\text{m}$  und für  $z$  auf  $\text{p}$  geltend machen, und zwar nicht für alle Transversalen  $t$  in gleicher Weise. Die diesbezüglichen Verhältnisse sind in dem Beispiel in der untersten Transversale in Figur 4 wesentlich ungünstiger als in dem Beispiel mit der obersten Transversale ( $L = 100, \alpha = 10^{\circ}$ ); dort ist nämlich die für  $t$  bestimmende Strecke  $M P$  im Vergleich zu ihrer Verlängerung von  $P$  bis  $N$  sehr kurz, während für das letztere Beispiel das Umgekehrte der Fall ist.

Aus dieser Fehlerbetrachtung ergibt sich dann noch, daß mit der Beschränkung  $0 < U < 20,00 \text{ m}$  der Vorteil erzielt wird, daß die Anwendung der graphischen Methode zur Bestimmung

von U von selbst ausgeschlossen wird für solche Fälle, wo damit ein Resultat mit ungenügender Genauigkeit riskiert werden müßte.

#### 4. Die z-Skala auf $N_0 M_0$ .

Nachdem wir unter 3. d die Anwendung einer nomographischen Darstellung für die U-Funktion gezeigt haben, ist jetzt noch die daselbst als gegeben betrachtete Teilung auf der Diagonale  $N_0 M_0$  einer eingehenden Betrachtung zu unterziehen.

Dabei wird es sich darum handeln, diejenigen Methoden anzugeben, welche geeignet sind, für die Bestimmung der Endpunkte P derjenigen Strecken  $N_0 P = z$ , welche zu rundzahligen Werten des Höhenwinkels  $\alpha$  gehören. Hiefür kommen nun Bestimmungen auf dem Wege der Rechnung oder der Konstruktion in Betracht.

a) *Berechnung.* Die Berechnung der Strecken z erfolgt durch Anwendung der Gleichung (15), welche allgemein und für die speziellen Verhältnisse der Figur 4 lautet:

$$z = e \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{a + \sin^2 \alpha} \quad \text{und} \quad z = \frac{1000}{16} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{0,2 + \sin^2 \alpha} \text{ cm.}$$

Zur allgemeinen Charakterisierung dieser Funktion z bilden wir zunächst deren Ableitung nach  $\alpha$ , wodurch sich ergibt:

$$\frac{dz}{d\alpha} = e \cdot \frac{a \cdot \sin 2\alpha}{(a + \sin^2 \alpha)^2} \quad \text{und} \quad \frac{dz}{d\alpha} = \frac{1000}{16} \cdot \frac{0,20 \cdot \sin 2\alpha}{(0,20 + \sin^2 \alpha)^2}.$$

Da wir diese Funktion z tatsächlich nur für den Bereich  $0 < \alpha < 50^\circ$  brauchen, so hat es für die Ergebnisse in unserer Aufgabe keinen Nachteil, wenn wir uns für  $\alpha > 100^\circ$  eine Definition der Funktion  $\sin \alpha$  erlauben, welche von der richtigen abweicht. Wir definieren daher, daß die Funktion  $\sin \alpha$  für  $\alpha > 100^\circ$  ständig weiter wächst, so daß sie für  $\alpha = \infty$  unendlich groß wird. Für unsere Aufgabe ist es gleichgültig, wie wir diese Definition im Detail wählen. Wir wollen aber, um etwas Bestimmtes zu haben, für  $\alpha \geq 100^\circ$  definieren:

$$\sin \alpha^g = + \frac{\alpha^g}{100}.$$

Es wird dann für

$$\begin{aligned} \alpha &= 100^\circ \quad 200^\circ \quad 300^\circ \quad 400^\circ \dots \quad \infty^\circ \\ \sin \alpha &= +1 \quad +2 \quad +3 \quad +4 \quad +\infty \end{aligned}$$

Mit dieser etwas sonderbar anmutenden Definition, die sich aber später als nützlich erweisen wird, erhält man:

$$\begin{array}{llll} \text{für } \alpha = 0^\circ & 50^\circ & 100^\circ & \infty^\circ \\ z = 0 & \frac{e}{1+2a} & \frac{e}{1+a} & e \\ \frac{dz}{d\alpha} = 0 & e \cdot \frac{4a}{(1+2a)^2} & 0 & - \end{array}$$

Im Bereiche der möglichen Höhenwinkel  $0 < \alpha < 100^\circ$  nimmt die Funktion  $s$  stetig zu, und die Kurve  $z = f(\alpha)$  besitzt in den Punkten mit  $\alpha = 0$  und  $\alpha = 100^\circ$  eine horizontale Tangente. Für den unmöglichen Winkel mit  $\sin \alpha = \infty$  wird  $z = e$ , so daß dann der Endpunkt P von z mit  $M_0$  zusammenfällt.

Unter Zugrundelegung der numerischen Verhältnisse zu Figur 4 erhält man für einige rundzahlige Werte von  $\alpha$  als Funktionswerte  $z$  folgendes:

$\alpha =$	g	0	$\pm 5$	10	15	20	30	40	50
$\sin \alpha$	—	0	0.07846	0.15643	0.23345	0.30902	0.45399	0.58779	0.70711
$\sin^2 \alpha$	—	0	0.00616	0.02447	0.05450	0.09549	0.20611	0.34550	0.50000
$z = \frac{\sin^2 \alpha}{e^{0.20 + \sin^2 \alpha}}$	—	0	0.0298	0.10901	0.21415	0.32316	0.50752	0.63337	0.71429
$z = \frac{1000}{16} \cdot \frac{z}{e}$	cm	<b>0</b>	<b>1.86</b>	<b>6.81</b>	<b>13.38</b>	<b>20.20</b>	<b>31.72</b>	<b>39.58</b>	<b>44.64</b>
$\frac{dz}{d\alpha}$	dm arc	0	4.60	8.03	8.76	8.42	6.13	3.99	2.55
$\Delta z$	mm	+ 18.6	+ 49.5	+ 65.7	+ 68.2	+ 115.2	+ 78.6	+ 50.6	
$\frac{\Delta z}{\Delta \alpha}$	mm g	3.72	9.90	13.14	13.64	11.52	7.86	5.06	

$$\frac{dz}{d\alpha} \text{ in } \frac{dm}{arc} = 0.6366 \frac{\Delta z}{\Delta \alpha} \text{ in } \frac{mm}{g}$$

Aus obiger Tabelle ergibt sich für  $e = 62,5$  cm und  $a = 0,20$ :

1. Die Funktion  $z = f(\alpha)$  hat für alle Winkel  $0 < \alpha < + 50^\circ$  einen *positiven* Wert;

2. Die Kurve  $z = f(\alpha)$  verläuft von  $\alpha = 0$  bis  $\alpha = \pm 15^g$  immer steiler und wird von  $\alpha = \pm 20^g$  bis  $\alpha = \pm 50^g$  immer weniger steil;
3. Die Kurve besitzt bei  $\alpha = \pm 15.9^g$  einen Wendepunkt.  
 $\frac{d z}{d \alpha}$  wird also für dieses Argument ein Maximum  
 $\left[ \frac{d z}{d \alpha} = 8.783 \frac{dm}{arc} \right];$
4. Aus den Werten der Differenzen  $\Delta z$  erkennt man, daß einem Strich-Intervall  $d z$  der  $z$ -Skala zwischen 1 bis 2,7 mm als  $d \alpha$ -Intervall die Beträge  $0,5^g$  von  $0^g$  bis  $5^g$  und  $0,2^g$  von  $5^g$  bis  $50^g$  entsprechen.

Damit würde aber die direkte Berechnung sämtlicher Punkte  $P$  ziemlich viel Arbeit erfordern.

b) *Konstruktion durch Parallelprojektion.* In Figur 5 a ist durch  $M_0$  eine beliebig gerichtete Gerade  $g$  gezogen; auf dieser wurde zunächst die Zahl  $a$  in einem beliebigen Maßstab als Strecke  $M_0 G_0$  aufgetragen, worauf im gleichen Maßstab die zu einem beliebigen Winkel  $\alpha$  gehörende Zahl  $\sin^2 \alpha$  als Strecke  $G_0 G$  hinzugefügt wurde. Nun zieht man die Gerade  $G N_0$  und durch  $G_0$  die Parallele zu  $G N_0$ ; dann schneidet diese letztere die Diagonale  $N_0 M_0 = e$  im Endpunkt  $P$  der zu obigem Winkel  $\alpha$  gehörenden Strecke  $z = N_0 P$ . Denn aus der Figur 5 a ergibt sich aus ähnlichen Dreiecken:

$$N_0 P = N_0 M_0 \cdot \frac{G_0 G}{M_0 G} = e \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{a + \sin^2 \alpha} = z.$$

Figur 5 b ist ein zehnmal verkleinertes Bild der Originalfigur zu Figur 4, so daß in jenem die Diagonale  $M_0 N_0 = 6,25 \text{ cm} = 62,5 \text{ mm}$  mißt; die im nachfolgenden auf Figur 5 b bezogenen Maßangaben stimmen somit überein mit den cm-

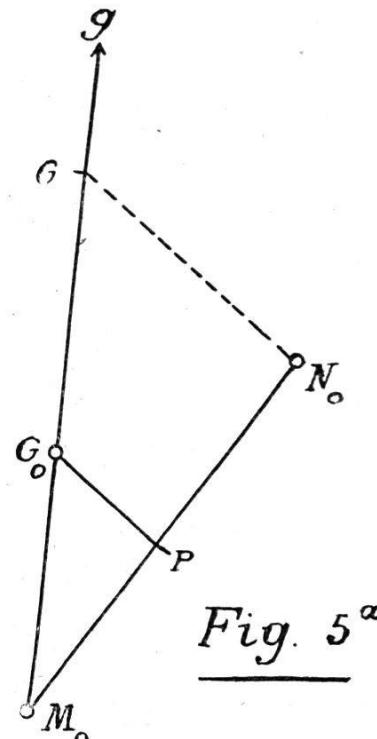


Fig. 5<sup>a</sup>

Fig. 5 a. Punkte  $P$  durch Parallelprojektion.

Maßangaben für die Originalfigur. Zur tunlichsten Vermeidung schleifender Schnitte ziehen wir nun die Gerade  $g$  annähernd in der Richtung der Vertikalen  $m$ , und wählen für die Zahl  $a = 0,20$  die Strecke  $M_0 G_0 = 25 \text{ mm}$ ; der Maßstab ist somit  $1 = 125 \text{ mm} = \frac{1000}{8} \text{ mm}$ .

Den Höhenwinkeln  $\alpha = 50^\circ \quad 40^\circ \quad 30^\circ$   
mit den Zahlen  $\sin^2 \alpha = 0.5000 \quad 0.3455 \quad 0.2061$   
entsprechen dann die

$$\text{Strecken } G_0 G = \frac{1000}{8} \cdot \sin^2 \alpha = 62.50 \quad 43.19 \quad 25.76 \text{ mm},$$

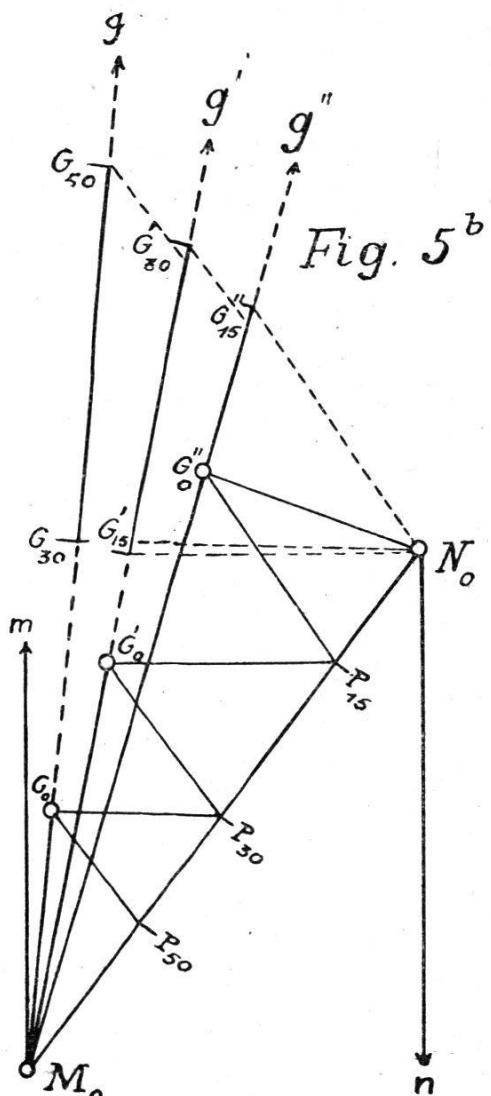


Fig. 5 b. Vermeidung schleifender Schnitte.

womit sich als Maximum von  $M_0 G$  ergibt:  $M_0 G_{50} = a + G_0 G_{50} = 87,50 \text{ mm} = 1,4 \cdot e$ ; der am weitesten entfernte Punkt  $G_{50}$  wird daher voraussichtlich noch auf das Zeichnungsblatt fallen. Bei dieser Disposition werden auf  $N_0 M_0$  die zu  $\alpha = 50^\circ, 40^\circ$  und  $30^\circ$  gehörenden Punkte  $P_{50}, P_{40}, P_{30}$  aus günstigen Schnitten der Geraden  $G_0 P \parallel G N_0$  erhalten. Dies würde aber nicht mehr der Fall sein, sofern das obige Verfahren auch noch auf den Winkelbereich  $30^\circ > \alpha > 0^\circ$  ausgedehnt würde; so würde z. B. der (natürlich mit  $N_0$  zusammenfallende) Punkt  $P_0$  aus dem sehr schleifenden Schnitte von  $G_0 N_0$  mit  $M_0 N_0$  gewonnen.

Um nun auch für die Punkte  $P$  mit  $\alpha < 30^\circ$  günstige Schnitte zu erhalten, ändern wir hiefür die Dispositionen, indem wir für

$30^g > \alpha > 15^g$  eine andere Gerade  $g'$  mit  $M_0 G_0' = 40$  mm  
 für  $\alpha = 0,20$  und für  
 $15^g > \alpha > 0^g$  eine dritte Gerade  $g''$  mit  $M_0 G_0'' = 60$  mm  
 für  $\alpha = 0,20$

zugrunde legen. Damit ergibt sich dann für den ganzen Bereich  $50^g > \alpha > 0$ :

Winkelbereich	g	$50^g > \alpha > 30^g$	$30^g > \alpha > 15^g$	$15^g > \alpha > 0$
Hülfsgerade	Nr.	g	$g'$	$g''$
Länge $M_0 G_0$ für a b mm in 1=b mm	mm	25	40	60
	,	1000 8	200	300
$\alpha$	g	50	30	30
$\sin^2 \alpha$	—	0.5	0.2061	0.2061
$G_0 G = b \cdot \sin^2 \alpha$	mm	62.50	25.76	41.22
$M_0 G = a + G_0 G$	,	87.50	50.76	81.22
			50.90	50.90
			76.35	76.35
			60.00	60.00

Aus der Figur 5 b ersieht man deutlich, daß sich mit obiger Disposition für alle Winkel von  $0$  bis  $50^g$  bei den Punkten P günstige Schnitte ergeben und daß sämtliche Punkte G wegen  $M_0 G \leq 1,40 \cdot e$  jedenfalls noch auf das Zeichnungsblatt zu liegen kommen.

Nachdem in dieser Weise einige Hauptpunkte P der z-Skala bestimmt worden sind, handelt es sich nun noch darum, die übrigen Punkte P für ein  $\alpha$ -Intervall von  $0^g, 50$  bzw.  $0^g, 20$  zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke werden in einer Tabelle in der ersten Kolonne die Werte  $\alpha$  und in der zweiten Kolonne die vierstelligen Zahlen  $\sin \alpha$  eingetragen, worauf in der dritten Kolonne unter Benützung der Quadratzahl-Tabelle die Werte  $\sin^2 \alpha$  ohne Interpolationsrechnung eingeschrieben werden können. Die Multiplikation der letztern Zahlen mit dem Faktor b kann bei Verwendung geeigneter Anlegemaßstäbe unterbleiben.

c) Konstruktion durch Zentralprojektion. In Figur 5 c — die einen Teil von Figur 5 b wiedergibt — ziehen wir durch  $N_0$  die Normale zu  $M_0 G = g$  und tragen ihre Länge  $N_0 Q$  auf

der Verlängerung über Q hinaus ab, so daß  $N_0 Q = Q R$  wird. Hierauf ziehen wir durch R die Gerade  $h \parallel g$ , worauf wir die Strahlen  $P_{50} G_0 = s_{50}$  und  $P_{30} G_0 = s_{30}$  über g hinaus bis h verlängern. Damit entsteht nun ein Dreieck  $G_0 H_{30} H_{50}$ , für welches gilt:

$$\triangle G_0 H_{30} H_{50} \cong \triangle N_0 G_{30} G_{50},$$

da ja die Seiten dieser beiden Dreiecke aus Gründen der Konstruktion resp. parallel und die Höhen gleich sind.

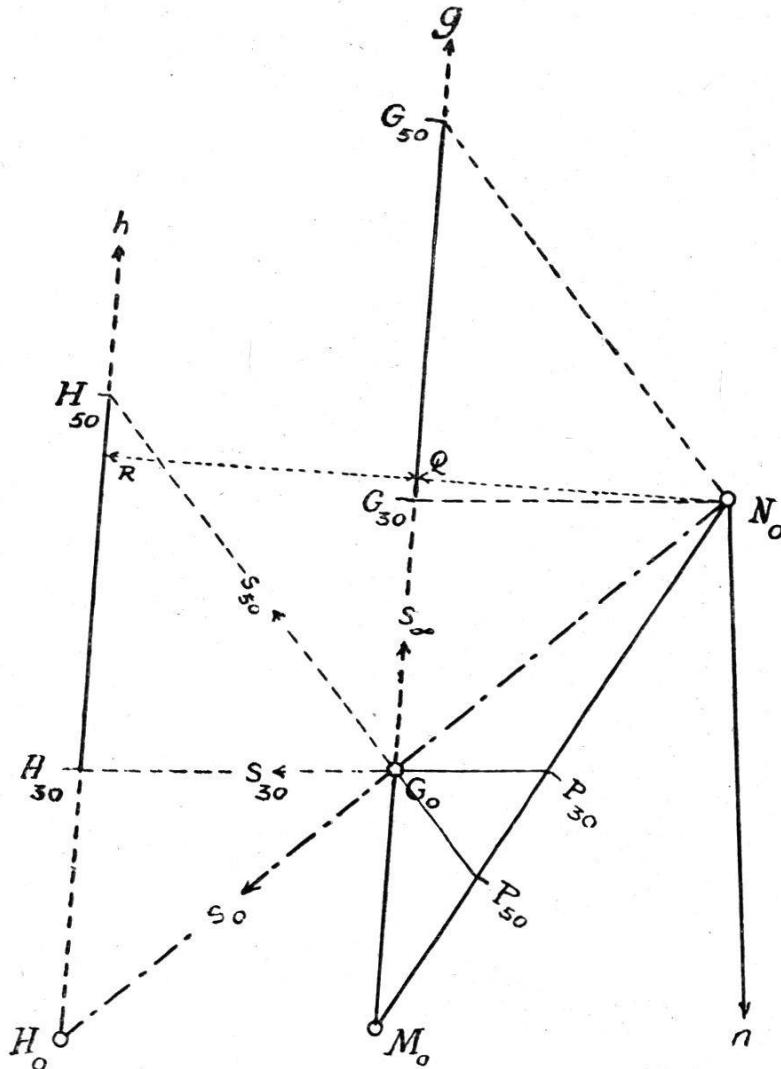


Fig. 5c

Fig. 5c. Ueberführung der Parallelprojektion in Zentralprojektion.

In gleicher Weise liefert die Gerade  $N_0 G_0 H_0$ :

$$\triangle G_0 H_0 H_{30} \cong \triangle N_0 G_0 G_{30} \text{ und } \triangle G_0 H_0 H_{50} \cong \triangle N_0 G_0 G_{50}.$$

Hieraus folgt dann:

$$H_0 H_{30} = G_0 G_{30} = \sin^2 30^\circ \text{ und } H_0 H_{50} = G_0 G_{50} = \sin^2 50^\circ;$$

d. h. die  $\sin^2 \alpha$ -Teilung ist nun von  $G_0 G$  auf  $g$  verlegt worden nach  $H_0 H$  auf  $h \parallel g$ , wobei der Anfangspunkt  $H_0$  aus dem Strahl  $G_0 N_0 = s_0$  zu  $\alpha = 0$  erhalten wurde. Dem unmöglichen Winkel  $\alpha$  mit  $\sin \alpha = \infty$  entspricht der unendlich ferne Punkt  $H_\infty$  von  $h$ , sowie als Strahl  $G_0 G_\infty = s_\infty$  der Geraden  $G_0 G = g$ .

Wird die Gerade  $h$  parallel verschoben, so bleiben die Strahlen  $s$ , sowie ihr Zentrum  $G_0$  unverändert; dagegen geben nun die Strecken  $H_0 H$  die Zahlen  $\sin^2 \alpha$  in einem andern Maßstab. Da aber auch die Richtung von  $g$ , sowie auch der Maßstab für die Zahlen  $a$  und  $\sin^2 \alpha$  beliebig gewählt werden kann, wovon wir bereits unter b) Gebrauch gemacht haben, so erkennt man:

1. Eine Gerade  $h$  von beliebiger Lage und Richtung, sowie mit beliebigem Anfangspunkt  $H_0$  liefert ein Strahlenbüschel, dessen Zentrum  $G_0$  erhalten wird als Schnittpunkt der beiden Grenzstrahlen:  $s_0 = N_0 H_0$  und  $s_\infty = \text{Parallele zu } h$  durch  $M_0$ .
2. Durch die Strecke  $M_0 G_0$  — welche der hier sonst nicht mehr in Betracht fallenden Zahl  $a$  entspricht — wird der Maßstab für die Zahlen  $H_0 H = \sin^2 \alpha$  bestimmt.
3. Werden diese Zahlen als Strecken  $H_0 H$  auf  $h$  abgetragen, so schneiden die Strahlen  $H G_0 = s$  die Diagonale  $M_0 N_0$  in den Teilpunkten  $P$  der z-Skala.
4. Der Richtungssinn der Teilung  $H_0 H$  wird am einfachsten dadurch bestimmt, daß man  $P_{50}$  direkt ermittelt aus  $z_{50} = \frac{e}{1 + 2a}$ , worauf die Gerade  $P_{50} G_0$  auf  $h$  den Teilpunkt  $H_{50}$  liefert.

---

Diese Methode durch Zentralprojektion bietet gegenüber derjenigen durch Parallelprojektion folgende Vorteile:

1. Infolge Wegfalles der Parallelverschiebungen ( $G_i P \parallel G_i N_0$ ) erfordert sie wesentlich weniger Arbeit;
2. Der Umstand, daß an Stelle der Strecken  $M_i G_n$  die wesentlich kürzern, zentraler gelegenen Strecken  $H_i H_n$  treten, kann für die Anwendung eines größeren Maßstabes für die  $\sin^2$

$\alpha$ -Teilung ausgenützt werden, was deren Herstellung wesentlich erleichtert.

3. Das Risiko, in einzelnen Teilen von  $N_0 M_0$  die Punkte P aus schleifenden Schnitten zu erhalten, bleibt sich bei beiden Methoden gleich; bei c kann es durch Verwendung mehrerer Geraden h beseitigt werden.

### 5. Schlußbemerkungen.

Für die Berechnung einer horizontalen Distanz d ist dem Näherungswert  $\Delta = 100 \cdot L$  eine Verbesserung  $\delta$  beizufügen, welche sich aus zwei Gliedern v und u zusammensetzt, so daß  $\delta = v - u$  ist.

Die Zugabe v kann aus einem Diagramm mit v-Isophlethen direkt abgelesen werden. Dieses Diagramm (Figur 1) ist für jedes Instrument besonders zu zeichnen.

Der Abzug u wird mit Hilfe einer nomographischen Darstellung bestimmt, deren Grundprinzip darin besteht, daß an Stelle der Kurvenschar eines Diagrammes eine Anzahl geteilter — gerader oder krummer — Linien treten, welche in jedem Einzelfall einer Berechnung durch eine besondere Transversale zu verbinden sind. Speziell für die u-Funktion erhält man drei Skalen auf geraden Linien, nämlich eine Skala mit gleich großen Strich-Intervallen  $\Delta L$  auf einer Geraden m, eine zweite, gleichartige Skala für u auf einer zu m parallelen Geraden n und endlich eine dritte Skala mit veränderlichen Strich-Intervallen  $\Delta z$  auf der Diagonalen  $p = M_0 N_0$ . Diese letztere z-Teilung wird nach 4c durch Zentralprojektion aus einer auf einer beliebigen Hülfsgeraden h abgesetzten  $\sin^2 \alpha$ -Teilung gewonnen.

Im Gegensatz zu den Verhältnissen bei dem Diagramm für die v-Funktion kann dasselbe Nomogramm der u-Funktion für jedes Instrument verwendet werden — sofern dasselbe einen Höhenkreis mit zentesimaler Teilung besitzt; für Theodolite mit alter Teilung wäre ein Nomogramm mit geänderter z-Teilung zu benutzen.

Nach den Erfahrungen, welche der Verfasser E. Müller im Laufe des Sommers 1917 machte, hat sich die Benützung des Diagrammes für die v-Funktion und des Nomogrammes für die u-Funktion in der Praxis sehr gut bewährt, indem damit die Arbeit für die Berechnung der horizontalen Distanzen d auf ein

Minimum beschränkt wurde. — Es wäre daher gewiß zu begrüßen, wenn das Nomogramm — wo möglich auch dasjenige für sexagesimale Kreisteilung — vervielfältigt würde, um einem weitern Interessentenkreise zur Verfügung gestellt werden zu können. Der für ein graphisches Rechenhülfsmittel etwas ungewöhnlich große Umfang von  $50 \times 50 \text{ cm}^2$  spielt ja insofern gar keine Rolle, als dabei ausschließlich nur eine Benutzung im Bureau in Frage kommt.

Zum Schluß mag noch an zwei Beispielen gezeigt werden, daß das dem Nomogramm für die u-Funktion zugrunde liegende Prinzip mit Vorteil auch für andere geodätische Rechnungen angewendet werden kann.

a) *Polygonometrische Höhenberechnung.*\* Führt man in der Formel  $U = L \cdot \sin^2 \alpha$  für die einzelnen Faktoren die neuen Bezeichnungen ein;  
 $U = h, \quad L = d, \quad \sin^2 \alpha = \tan \beta,$   
so geht dieselbe über in die Formel für die Höhenberechnung:  
 $h = d \cdot \tan \beta.$

Das dieser letztern Formel korrespondierende Nomogramm unterscheidet sich somit von demjenigen für die U-Funktion offenbar nur dadurch, daß die z-Teilung auf der Geraden  $N_0 M_0 = p$  nach dem Gesetze

$$z = e \cdot \frac{\tan \beta}{a + \tan \beta}$$

zu bilden ist. Diese Teilung wird daher durch Zentralprojektion einer  $\tan \beta$ -Teilung auf einer Hülfsgeraden  $h$  erhalten, wobei sich gegenüber der U-Funktion insofern eine Vereinfachung ergibt, als die Werte  $\tan \beta$  einer schon fertigen Tabelle entnommen werden können.

Für Polygonseiten werden die Höhenunterschiede  $h$  den Betrag von 20 m selten übersteigen, so daß für die  $h$ -Teilung auf  $n$  der gleiche Maßstab wie für  $U$  benutzt werden kann, so mit  $h$  ebenfalls auf Zentimetergenauigkeit erhalten wird. Ferner erhält man bei  $20 \text{ m} < h < 40 \text{ m}$  den Wert  $h$  aus:

$$\frac{h}{2} = \frac{d}{2} \cdot \tan \beta.$$

\* Auf diese Verwendungsmöglichkeit der dem u-Nomogramm zugrunde liegenden Idee hat zuerst der Verfasser E. Müller in seiner ursprünglichen Abhandlung hingewiesen.

b) Erdkrümmung und Refraktion:  $(E-R) = \frac{1-k}{2r} \cdot d^2$ .

Dem Lattenabschnitt  $L$  entspricht hier der konstante Faktor  $\frac{1-k}{2r}$ , und diesem ein fester Punkt  $M$  auf der Geraden  $m$ ; alle Transversalen  $t$  gehen durch diesen festen Punkt  $M$ . Wählt man diesen als Zentrum  $G_0$  des Strahlenbüschels der Strahlen  $s = G_0 H$ , so wird  $g = M_0 G_0 = M_0 M = m$  und somit  $h \parallel m$ ; durch die Lage des Nullpunktes  $H_0$  von  $h$ , der auf der Geraden  $N^0 M$  liegen muß, wird der Maßstab für die  $d^2$ -Teilung auf  $h$  bestimmt, für einen beliebigen Wert von  $d$  in:

$$s = HG_0P = HMP \text{ und } t = MPN, \text{ also } s = t;$$

daher liegt  $N$  auf der Geraden  $HM$ , so daß man nun die  $z$ -Teilung auf  $p$  gar nicht braucht.

Dies führt nun zu folgendem sehr einfachen Nomogramm: In Figur 6 ist im Maßstab  $1:5$  ein Quadrat mit einer Seitenlänge von  $25 \text{ cm}$  gezeichnet; die Höhenseiten links und rechts entsprechen der  $h$ - und der  $n$ -Linie mit den Nullpunkten  $H_0$  und  $N_0$ . Mit

$$\frac{1-k}{2r} = 0,0684 \cdot 10^{-6} \text{ erhält man für die Distanz } d =$$

$5000 \text{ m}$  oder  $D = 5 \text{ km}$ :

$$D^2 = 25 \text{ km}^2 \text{ und } (E-R) = 0,0684 \cdot 25 = 1,71 \text{ m.}$$

Demgemäß wählen wir für die Maßstäbe auf  $h$  und  $n$ :

$$h: 25 \text{ km}^2 = 25 \text{ cm, also } 1 \text{ km}^2 = 1 \text{ cm.}$$

$$n: 1,71 \text{ m} = 17,1 \text{ cm, also } 1 \text{ m} = 10 \text{ cm.}$$

Auf der  $h$ -Linie mit der Numerierung  $D$  und der Teilung  $D^2$  wird dann für  $D = 5 \text{ km}$ :  $H_0H = 25 \text{ cm}$ , während auf der  $n$ -Linie mit der Numerierung und Teilung  $(E, R)$  zu  $D = 5 \text{ km}$  gehört:  $N_0N = 17,1 \text{ cm}$ .

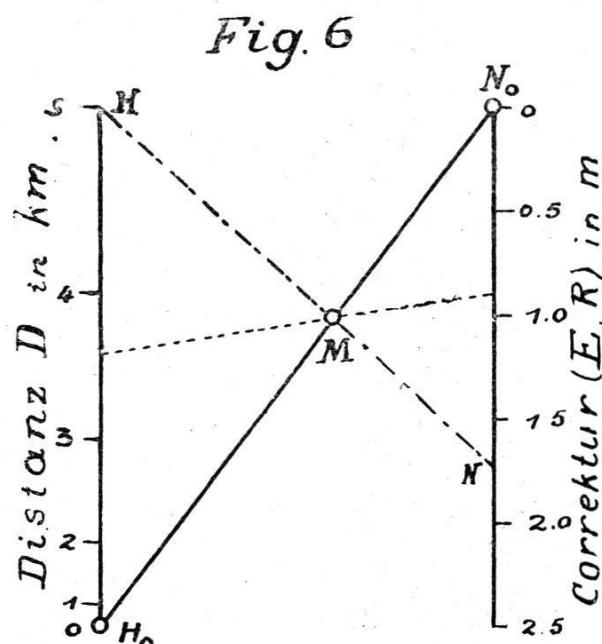


Fig. 6. Nomogramm für „Erdkrümmung und Refraktion“ ( $= E-R$ ).

Die Geraden  $M_0 N_0$  und  $M N$  schneiden sich dann im Zentrum  $G_0 = M$  des Büschels der Strahlen  $s = t$ , und für jede beliebige Distanz  $D$  liegen die Punkte  $H$  und  $N$  auf einer Geraden durch das Zentrum  $M$ .

Gegenüber der Ausrechnung mittelst des Rechenschiebers hat die obige Darstellung für (E\_R) den Vorzug, daß das Resultat nicht nur ziffernmäßig, sondern auch mit dem Stellenwert der Ziffern angegeben wird.

Man erkennt ohne weiteres, daß ein solches einfaches Nomogramm mit nur zwei Skalen auf parallelen Geraden der nomographischen Darstellung einer Funktion mit nur einer Variablen von der Form  $y = a \cdot x^n$  entspricht.

Diese zwei einfachen Beispiele dürften genügen, um einen Einblick zu gewinnen, welcher Erweiterung die Anwendung eines einfachen Spezialfalles der nomographischen Methode fähig ist.

Zwicky.

---

### **Das Verhältnis der Kulturingenieure zur „Schweizerischen Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik“.**

Unter dem Titel „Zur Umwandlung der „Schweizerischen Geometerzeitung“ in eine Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik“ beschäftigt sich die Schweizerische Bauzeitung in ihrer Nummer 19 des laufenden Bandes 72 vom 9. November 1918 mit unserer Zeitschrift.

Anlaß dazu bot eine Zuschrift aus den Kreisen der Kulturingenieure, die wir hier wörtlich wiedergeben:

„In der „Schweiz. Geometerzeitung“ vom 15. August 1918 wurde angekündigt, daß die redaktionelle Leitung der Fachschrift der Geometer in neue Hände gelegt und gleichzeitig, durch „Beschluß des Zentralkomitees vom Schweizerischen Geometerverein“, eine inhaltliche Umwandlung erfahren werde. Die neue Zeitung werde sich in erster Linie mit dem Vermessungswesen und nebenbei mit Kulturtechnik beschäftigen.“