Zeitschrift: Schweizerische Geometer-Zeitung = Revue suisse des géomètres

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 12 (1914)

Heft: 3

Artikel: Compensation d'un réseau de nivellement

Autor: Ansermet

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-183081

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.10.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

tung. Diesmal verwendet man besser Bromsilberpapier (Platinomat, lent), um den Belichtungsprozess zu beschleunigen Auch hier ist eine Probe von Vorteil. Das belichtete Papier wird wiederum in der Dunkelkammer entwickelt und fixiert wie das Negativ. In der Zeit von ca. 20 Minuten ist alles geschehen, ein originaltreuer Abzug schwarz auf weiss liegt vor einem, dass man Freude daran haben kann.

Das ganze Verfahren ist höchst einfach und wird bald von jedem Lehrling erfasst sein. Notwendig sind nur:

eine elektrische Lampe, am bequemsten eine solche mit weissem, gelbem und rotem Licht auf einem Fusse; zwei Schalen, zum Entwickeln und Fixieren der Kopien; ein Kopierrahmen und ein Gefäss zum Waschen der Abzüge. Ein Negativ und ein Positiv wird auf ca. Fr. 2.50 zu stehen kommen, jedes weitere Positiv dann noch auf ca. Fr. 1.30.

Den Herren Kollegen, die sich bereits mit Photographieren befassen, möchte ich anraten, im Kleinen einen Versuch zu wagen, ich habe die Ueberzeugung, das sie gar bald vom Format 9×12 oder 13×18 auf dasjenige von 50×70 cm übergehen werden. Probieren geht über Studieren!

A. Fricker.

Compensation d'un réseau de nivellement.

1º Généralités.

Le calcul d'un réseau de nivellement est une des applications les plus intéressantes de la théorie des erreurs et de la méthode des moindres carrés. De nombreuses recherches ont déjà été faites sur ce sujet 1 et il ne saurait être question, dans ce qui va suivre, d'examiner toutes les faces d'un problème aussi complexe. Nous limiterons, au contraire, à un cas concret tiré du réseau de nivellement général du Canton de Vaud la présente étude qui poursuit un triple but:

¹ Littérature: Helmert (Höhere Geodäsie, Ausgleichungsrechnung); Jordan (Handbuch der Vermessungskunde); Vogler (Geodätische Übungen); Hilfiker (Nivellement über den Simplonpass und durch den Simplontunnel; Nivellement über den St. Bernhard, unter Mitwirkung von Ing. Gassmann); Lallemand (Nivellements de précision); Hirsch und Plantamour (Compte-rendus de la commission géodésique suisse), etc.

- 1º Compléter les articles parus en 1910 (Geometer-Zeitung nos 7, 8) sur le nivellement du Canton de Vaud;
- 2º Calculer la grandeur que peuvent atteindre la correction orthométrique et la correction dynamique pour le territoire de ce canton (écart théorique de fermeture);
- 3º Mettre en lumière d'une façon aussi objective que possible, dans le cas d'un nivellement, les deux procédés qui, depuis un siècle, se concurrencent dans l'application de la méthode des moindres carrés: la méthode de Gauss et la méthode de Legendre.

Les procédés empiriques (graphiques ou analytiques) ont été, par contre, laissés de côté; parmi ces derniers nous devons une mention spéciale à la compensation par approximations successives (stufenweise Ausgleichung) due au Prof. Vogler. Cette méthode, susceptible de rendre de grands services, a été décrite avec beaucoup de clarté dans les "Geodätische Übungen".

2º Erreurs de nivellement.

a) Erreurs accidentelles. On désigne sous ce nom des erreurs qui agissent indifféremment dans un sens ou dans l'autre; considérons un polygone comprenant n nivelées qui sont respectivement entachées d'erreurs accidentelles e_1 e_2 e_3 e_n ; nous obtiendrons pour tout le polygone une erreur résultante donnée par l'expression:

$$\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + \dots + e_n^2} = e \sqrt{n}$$

en admettant comme cela se fait généralement:

$$e_1 = e_2 = \dots = e_n = e$$

Pratiquement on préfère introduire l'erreur accidentelle par kilomètre α , ce qui donne:

$$e \ \sqrt{n} = \alpha \ \sqrt{K}$$

K désignant le nombre de kilomètres;

b) Erreurs systématiques. Leur détermination est particulièrement délicate; les unes sont proportionnelles aux différences de niveau H (forme β H), d'autres à la longueur nivelée K (forme γ K). La plupart ne suivent aucune loi déterminée et dépendent des instruments, du profil en long, etc. Nous ne retiendrons donc que l'expression $+\beta$ H $+\gamma$ K;

c) Erreur totale probable. C'est la résultante E des erreurs accidentelles et systématiques:

$$E = \pm \alpha \sqrt{K + \beta H + \gamma K} = \pm \sqrt{\alpha^2 K + \beta^2 H^2 + \gamma^2 K^2}$$

(Les doubles produits s'annulent.) Nous écrivons pour simplifier: $E^2 = a K + b H^2 + c K^2$.

Remarquons avant d'aller plus loin que la précision du nivellement des différentes lignes d'un réseau sera inverse de l'erreur totale probable ou en tous cas qu'il n'est pas possible de l'exprimer plus exactement; les poids à affecter à ces mêmes lignes auront donc pour valeurs respectives:

$$\frac{1}{E_1^2} \quad \frac{1}{E_2^2} \quad \dots \quad \frac{1}{E_n^2}$$

si l'on convient de désigner par E_1 E_2 E_n les erreurs totales probables correspondantes. C'est pourquoi une détermination aussi précise que possible des coefficients a, b, c s'impose comme première opération de la compensation. Considérons dans ce but un certain nombre de lignes l_1 l_2 l_3 l_n (pratiquement il faut n aussi grand que possible) et supposons qu'elles aient été nivelées une fois dans chaque sens (c'est le cas pour le réseau du Canton de Vaud); soient f_1 f_2 f_3 f_n les écarts de fermeture résultant du double nivellement. Si l'erreur totale probable donnait exactement l'erreur totale réelle, le système des n équations ci-dessous serait satisfait rigoureusement:

En réalité on rencontre des divergences souvent considérables et c'est pourquoi n doit être grand; (n-3) équations sont surabondantes: il faut recourir au calcul des probabilités, c'est-à-dire rendre *minimum* l'expression:

$$\sum_{i=1}^{n} (p. x^{2}) = minimum$$

Il n'est pas inutile de rappeler ici que cette condition est la conséquence d'une part de la loi de propagation des erreurs (courbe de la cloche):

$$y = \frac{K}{\sqrt{\pi}} e^{-K^2 x^2} \delta x \qquad (K^2 = p = poids)$$

D'autre part du *théorème*: la probabilité de la simultanéité de plusieurs événements *indépendants* les uns des autres est égale au produit des probabilités de ces événements.

Les résidus x_1 x_2 sont évidemment proportionnels aux carrés des erreurs totales E_1^z E_2^z et les poids p_1 p_2 ... à affecter à ces résidus seront égaux à

$$\left(\frac{1}{E_1^2}\right)^2 \left(\frac{1}{E_2^2}\right)^2 \cdots$$

il faudrait donc connaître déjà les coefficients a, b, c et il n'y a pas d'autre moyen que de les déterminer provisoirement par tâtonnement.

Nous sommes en mesure maintenant d'écrire les équations normales:

$$\begin{cases} [p \ K \ K] \ a + [p \ K \ H^2] \ b + [p \ K \ K^2] \ c &= [p \ K \ f^2] \\ [p \ K \ H^2] \ a + [p \ H^2 \ H^2] \ b + [p \ H^2 \ K^2] \ c &= [p \ H^2 \ f^2] \\ [p \ K \ K^2] \ a + [p \ K^2 \ H^2] \ b + [p \ K^2 \ K^2] \ c &= [p \ K^2 \ f^2] \end{cases}$$

Le signe [] représentant \sum_{1}^{n}

Résolvons par les déterminants:

$$a = \frac{ \begin{bmatrix} p & K & f^2 \end{bmatrix} & [p & K & H^2] & [p & K & K^2] \\ [p & H^2 f^2] & [p & H^2 H^2] & [p & H^2 K^2] \\ [p & K^2 f^2] & [p & K^2 H^2] & [p & K^2 K^2] \\ [p & K & K \end{bmatrix} & [p & K & H^2] & [p & K & K^2] \\ [p & K & H^2] & [p & H^2 & H^2] & [p & H^2 K^2] \\ [p & K & K^2] & [p & K^2 & H^2] & [p & K^2 & K^2] \end{bmatrix}$$

on trouve de même b et c.

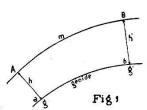
L'application de ces formules à 18 lignes du réseau du Canton de Vaud a donné:

$$E^2 = 2.5 \text{ K} + 20 \left(\frac{H}{100}\right)^2 + 0.2 \text{ K}^2 \text{ (pour H} < 300^{\text{m}})$$
(E en mm, K en kilomètres et H en mètres).

3º Correction orthométrique et correction dynamique.

Le but de ce paragraphe est de rechercher quel ordre de grandeur peuvent atteindre ces corrections pour notre réseau cantonal. Nous avons admis jusqu'ici que les surfaces de niveau étaient des sphères concentriques et que le fil à plomb était toujours dirigé contre le centre de la terre; la différence de niveau entre deux points quelconques était simplement la distance entre les surfaces de niveau passant par ces points.

Dans les nivellements de précision on ne peut plus se contenter de cette hypothèse, car le fil à plomb subit des déviations dues à des causes multiples et les surfaces de niveau qui par définition lui sont perpendiculaires ne sont plus parallèles entr'elles.



Considérons (fig. 1) la surface des mers a b, de niveau o, (appelée aussi géoïde), ainsi que les points A et B situés sur la surface de niveau A m B et sur les verticales des points a et b. L'altitude du point A est par définition A = h, celle de B: B b = h' et ces altitudes diffèrent

d'une certaine quantité h - h' appelée correction orthométrique. Ce qui est constant, c'est le travail de la pesanteur pour élever l'unité de masse d'un point quelconque du géoïde à un autre point de la surface A m B:

Travail pesanteur = g h = g' h' (g et g' désignent la gravité en a et b).

On dit que les points A et B ont même cote dynamique et un nivellement aussi précis qu'on le voudra effectué suivant A m B ne révélera pas la différence h - h'. Pour calculer cette différence, il faut préalablement étudier la variation de la gravité g, ce qui se fait au moyen du pendule, ou à défaut d'observations pendulaires à l'aide de la formule de Clairaut-Helmert:

Correction orthom. de A à B =
$$-0.0053 \int_A^B h$$
. sin 2 λ d λ (h = altitude. λ = latitude).

En réalité g n'a pas la même valeur en A et a sauf si h est très petit et la correction orthométrique dépend essentiellement du chemin parcouru entre les points nivelés.

La correction dynamique exige plus spécialement une détermination précise de la gravité en chaque point du polygone; on admet pour *unité* de travail de la pesanteur celui qui correspond au niveau de la mer à la latitude de 45° ; à une altitude h et pour une latitude λ le travail élémentaire de la

pesanteur s'exprime pour une masse $\frac{1}{g^0}$ par

$$d T = \frac{g_{\lambda}^{h}}{g^{0}} d h$$

Il faut maintenant intégrer cette expression sur tout le pourtour de la ligne nivelée; si le polygone se ferme, on démontre que *l'écart orthométrique de fermeture* est égal à *l'écart dyna*mique de fermeture. Cette propriété est fondamentale.

Ces formules ont été appliquées au polygone Allaman - L'Isle - Molendruz - Les Clées - Cossonay - Allaman (fig. 2). La latitude varie entre 46° 28' et 46° 44', ce qui permet de négliger le terme $\sin 2\lambda$. L'intégration en est bien simplifiée, car il suffit de projeter le profil en long du cheminement (longueur totale 85 kilomètres) sur le méridien et de planimétrer successivement à partir de l'ordonnée d'Allaman, ce qui donne: Gimel -2,1 mm; Bière -3,5 mm, Mollens -6,0 mm, etc. On construira la courbe des *corrections orthométriques* qui n'est pas autre chose que la première courbe intégrale de la projection méridienne.

L'écart de fermeture n'atteint que — 5,2 millimètres. Par contre, la correction atteint aux Clées son maximum, soit — 16,7 mm en passant par Molendruz et — 11,5 mm par Cossonay.

Ces valeurs se rapportent, bien entendu, au repère d'Allaman dont l'altitude doit préalablement être corrigée par rapport à la Pierre de Niton de — 8,7 mm (par Nyon).

Nous avons en résumé:

Genève P. N., altitude admise définitivement

Les Clées (par Molendruz), correction absolue

Les Clées (par Cossonay)

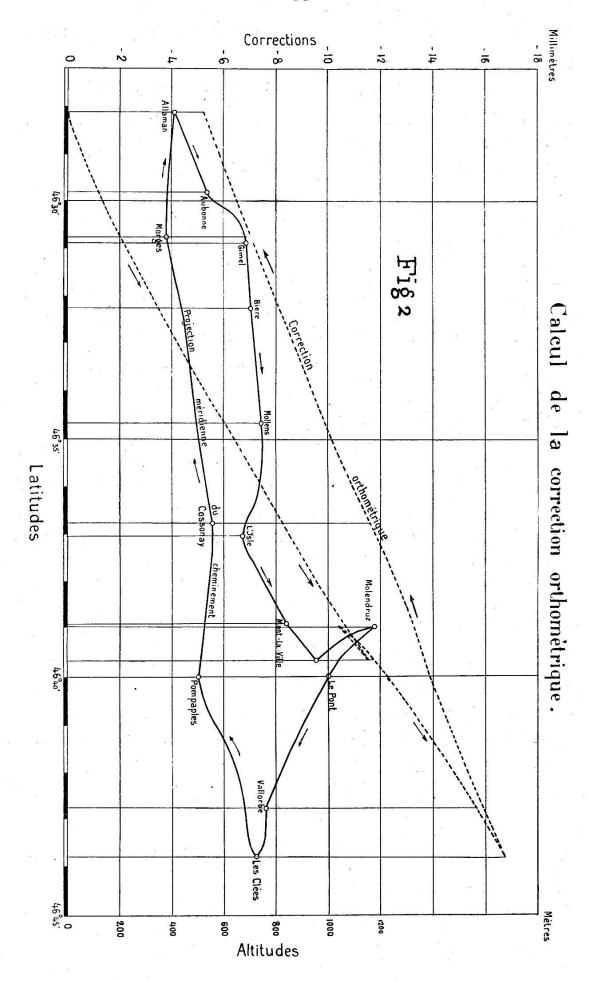
et ainsi de suite pour les autres repères.

373.600

-- 25,4 mm

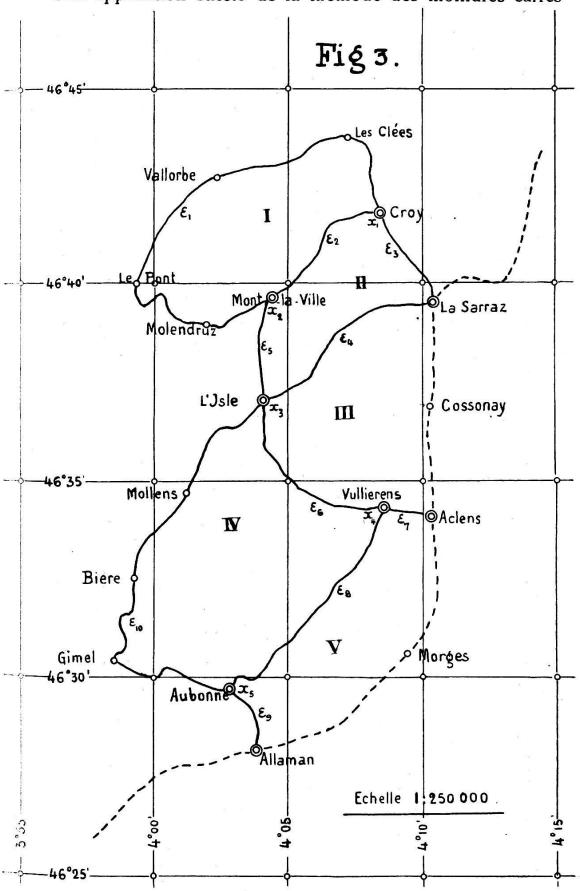
-- 20,2 mm

¹ Voir Ansermet: Sur quelques appareils d'intégration (Bulletin technique de la Suisse Romande, 1914).



4º Compensation du réseau.

Une application stricte de la méthode des moindres carrés



exigerait qu'on compense les quantités directement observées, c'est-à-dire chaque nivelée. Pratiquement un pareil mode de compensation se passe de commentaires et nous chercherons la valeur la plus probable des erreurs commises sur chaque ligne. Les équations de condition sont déjà sous forme linéaire, ce qui simplifie notablement les calculs.

Le réseau qui fait l'objet de cette étude (fig. 3) comprend 5 polygones (longueur totale 130 km).

Les altitudes des repères d'Allaman, Aclens et La Sarraz sont définitives, ces repères faisant partie de lignes déjà compensées et publiées.

Le tableau ci-dessous donne tous les éléments nécessaires à l'établissement des équations; il est assez clair pour rendre toute explication superflue. Un fait est cependant à signaler: les divergences assez fortes entre les diverses déterminations du repère de l'Isle, nœud central de tout le réseau. Le polygone II, entr'autres, présente un écart de fermeture passablement plus élevé que les autres polygones du réseau cantonal, sans qu'un examen attentif des deux opérations ait révélé une erreur matérielle. C'est ce qui nous a engagé à compenser rigoureusement cette région, alors que la plus grande partie du canton a été traitée par les méthodes approchées. Les corrections orthométriques pour les 5 polygones pris séparément sont très faibles (2 — 3 mm); elles sont assimilées aux erreurs systématiques et comprises implicitement dans les erreurs totales probables E.

Il y a en tout 10 lignes à compenser et 5 altitudes à déterminer (nœuds). Nous désignons par Mont-la-Ville le repère situé entre Lapraz et Mont-la-Ville.

					_
	Nœuds du réseau	Altitudes définitives	Altitudes approchées	Correc- tions	
9	La Sarraz	499.262			
	Aclens	463.524			
	Allaman	410.943			
	Croy		642.485	X ₁	
	Mont-la-Ville	<u></u>	932.495	$\mathbf{X_2}$	55
	L'Isle		663.955	X ₃	*
20	Vullierens	_	502.365	X ₄	
	Aubonne		501.063	X_5	

Des altitudes approchées nous déduisons les différences de niveau approchées, les polygones étant parcourus dans le sens des aiguilles de la montre.

* *					N. C.
Lignes nivelées	Dis- tances	Différences de niveau observées (à compenser)	Correc- tions	E²	Différences de niveau approchées
		olygone I			Ha
Croy-Mont-la-Ville.	7,5	+290,0164	ε,	198	+290,010
Mont-la-Ville-Croy.	25,0	-290,0062	ε ₁	356	-290.010
	32,5	+ 10,2 mm	<u> </u>	554	
	Po	olygone II	18 N		
La Sarraz-L'Isle .	10,2	+164,6744	ε ₄	98	+164,693
L'Isle-Mont-la-Ville	5,0	+268,5278	€5	162	+268,540
Mont-la-Ville-Croy.	7,5	290,0164	٤.	198	-290,010
Croy-La Sarraz	_5,1	-143,2254	ε ₃	_58	—143,223
1	27,8	— 39,6 mm		516	
	Po	olygone III			
La Sarraz-Aclens.		-35,7380			— 35,738
Aclens-Vullierens.	2,1	+ 38,8390	ε,	9	+ 38,841
Vullierens-L'Isle .	10,0	+161,5694	ε ₆	97	+161,590
L'Isle-La Sarraz .	10,2	-164,6744	ϵ_4	98	164,693
	22,3	— 4,0 mm		204	
	Po	olygone IV			
L'Isle-Vullierens .	10,0	-161,5694	ε,	97	-161,590
Vullierens-Aubonne	11,3	— 1,3187	$\epsilon_{ m s}$	53	_ 1,302
Aubonne-L'Isle	22,5	+162,8703	ε ₁₀	208	+162,892
	43,8	— 17,8 mm		358	_
,	P	olygone V			
Vullierens-Aclens .	2,1	— 38,8390	ε,	9	- 38,841
Aclens-Allaman .		— 52,5810	<u> </u>		- 52,581
Allaman-Aubonne.	3,0	+ 90,1185	ϵ_9	26	+ 90,120
Aubonne-Vullierens	11,3	+ 1,3187	ε ₈	53	+ 1,302
*	16,4	+ 17,2 mm		88	

Nous considérerons dans la suite les différences de niveau comme des quantités essentiellement positives auxquelles il faut, ajouter les corrections ϵ_1 ϵ_2

Ainsi la différence de niveau compensée La Sarraz-L'Isle aura pour expression: 164,6744 + ϵ_4 et le polygone I par exemple fournit l'équation de condition:

290,0164 + ϵ_2 = 290,0062 + ϵ_1 soit: ϵ_2 - ϵ_1 + 10,2 = 0 et ainsi de suite.

A. Méthode de Gauss.

Gauss fait emploi de coefficients indéterminés ou arbitraires appelés aussi facteurs de Lagrange K, K,

Ecrivons d'abord les équations de condition qui sont au nombre de 5 (5 polygones):

$$\begin{cases} \varepsilon_{2} - \varepsilon_{1} + 10.2 = 0 \\ \varepsilon_{4} + \varepsilon_{5} - \varepsilon_{2} - \varepsilon_{3} - 39.6 = 0 \\ \varepsilon_{7} + \varepsilon_{6} - \varepsilon_{4} - 4.0 = 0 \\ - \varepsilon_{6} - \varepsilon_{8} + \varepsilon_{10} - 17.8 = 0 \\ - \varepsilon_{7} + \varepsilon_{9} + \varepsilon_{8} + 17.2 = 0 \end{cases}$$

Les poids des ϵ sont donnés par $\frac{1}{F^2}$; il faut:

$$\frac{\varepsilon_1^2}{356} + \frac{\varepsilon_2^2}{198} + \frac{\varepsilon_3^2}{58} + \cdots + \frac{\varepsilon_{10}^2}{208} = minimum$$

Formons la différentielle première en tenant compte des équations de condition multipliées préalablement par $2 K_1 \dots 2 K_5$:

$$\left(\frac{2\,\varepsilon_{_{1}}}{356}+2\,K_{_{1}}\right)d\,\varepsilon_{_{1}}+\left(\frac{2\,\varepsilon_{_{2}}}{198}-2\,K_{_{1}}+2\,K_{_{2}}\right)d\,\varepsilon_{_{2}}+\ldots..+\left(\frac{2\,\varepsilon_{_{10}}}{208}-2\,K_{_{4}}\right)d\,\varepsilon_{_{10}}=0$$

les coefficients de $d \epsilon_1$ $d \epsilon_2$ sont nuls séparément, ce qui donne 10 équations corrélatives :

$$\epsilon_1 = 356 (- K_1)$$
 $\epsilon_2 = 198 (K_1 - K_2)$

ou plus simplement sous forme de tableau:

	ε ₁	$\mathbf{\epsilon_2}$	ϵ_3	ε ₄	€5	ε ₆	ε ₇	ε ₈	ε	€10.	
K_1 K_2 K_3 K_4 K_5	-356	+ 198 198	-58	+98 -98	+162	+97 -97	+9 -9	-53 +53	+26	+ 208	+10,2 -39,6 - 4,0 -17,8 +17,2

Portons les ϵ dans les équations de condition, nous obtenons les: Equations normales

_								- 2
	ia.	Kı	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅		
	1	+ 554	—198	10 H (10)		er y	+ 10,2	
	2	+198	+516	— 98	2 19	5 s	39,6	
	3		— 98	+204	— 97	— 9 —	— 4,0	
	4			— 97	+358	-53	-17,8	
	5) (4) (5) (5) (6) (6) (6) (6) (6) (6) (6) (6) (6) (6		_ 9.	— 53	<u>+ 88</u>	+17,2	

et enfin, en éliminant par substitution les

Equations finales

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & K_1 & K_2 & K_3 & K_4 & K_5 \\ \hline & 1 & + 1 & -0,357 \\ 2 & + 1 & -0,220 \\ 3 & + 1 & -0,531 \\ 4 & & + 1 & -0,1885 \\ 5 & & & + 1 & -0,1885 \\ 5 & & & + 1 & +0,0184 \\ & & & + 1 & -0,0808 \\ & & & & + 1 & -0,0648 \\ & & & & + 1 & +0,0648 \\ & & & & + 1 & +0,1573 \\ \hline & \varepsilon_1 & = 356 & (-K_1) & = -6,05 \text{ mm} \\ & \varepsilon_2 & = 198 & (K_1 - K_2) & = -16,25 \\ & & & & & & & & & & & & \\ \hline \end{array} \right\} \ \text{voir tableau récapitulatif.}$$

B. Méthode mixte (Lallemand).

Lallemand ne fait emploi ni de coefficients indéterminés, comme Gauss, ni de résultats approchés, comme Legendre; il considère les 5 équations de condition déjà posées, qui doivent être satisfaites dans tous les cas, et qu'il appelle équations absolues et le groupe d'équations dites relatives qu'il faut satisfaire autant que possible:

que possible:
$$\begin{cases} \frac{\varepsilon_1}{E_1} = 0 \\ \frac{\varepsilon_2}{E_2} = 0 \\ \frac{\varepsilon_{10}}{E_{10}} = 0 \end{cases}$$

Lallemand applique au système de 15 équations ainsi obtenues le principe des moindres carrés et le procédé d'élimination de Legendre (voir plus loin).

Cette méthode revient simplement à éliminer préalablement cinq des ε et à introduire les poids

$$\frac{1}{E_{\cdot}^2} \frac{1}{E_{\cdot}^2} \cdots$$

dans l'équation du minimum:

dans requation du minimum:
$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_2 + 10.2 \\ \varepsilon_3 = \varepsilon_4 + \varepsilon_5 - \varepsilon_2 - 39.6 = \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 - \varepsilon_2 - 43.6 \\ \varepsilon_4 = \varepsilon_6 + \varepsilon_7 - 4.0 \\ \varepsilon_9 = \varepsilon_7 - \varepsilon_8 - 17.2 \\ \varepsilon_{10} = \varepsilon_6 + \varepsilon_8 + 17.8 \end{cases}$$

$$\frac{(\varepsilon_2 + 10.2)^2}{356} + \frac{(\varepsilon_2)^2}{198} + \frac{(\varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 - \varepsilon_2 - 43.6)^2}{58} + \dots = \min$$

Equations normales
$$\begin{cases} \frac{\varepsilon_{3}+10.2}{356}+\frac{\varepsilon_{2}}{198}-\frac{\varepsilon_{5}+\varepsilon_{6}+\varepsilon_{7}-\varepsilon_{2}-43.6}{58}=0\\ \frac{\varepsilon_{5}+\varepsilon_{6}+\varepsilon_{7}-\varepsilon_{2}-43.6}{58}+\frac{\varepsilon_{5}}{162}=0\\ \frac{\varepsilon_{5}+\varepsilon_{6}+\varepsilon_{7}-\varepsilon_{2}-43.6}{58}+\frac{\varepsilon_{6}+\varepsilon_{7}-4.0}{98}+\frac{\varepsilon_{6}}{97}+\frac{\varepsilon_{6}+\varepsilon_{8}+17.8}{208}=0\\ \frac{\varepsilon_{5}+\varepsilon_{6}+\varepsilon_{7}-\varepsilon_{2}-43.6}{58}+\frac{\varepsilon_{6}+\varepsilon_{7}-4.0}{98}+\frac{\varepsilon_{7}}{9}+\frac{\varepsilon_{7}-\varepsilon_{8}-17.2}{26}=0\\ \frac{\varepsilon_{8}}{53}-\frac{\varepsilon_{7}-\varepsilon_{8}-17.2}{26}+\frac{\varepsilon_{6}+\varepsilon_{8}+17.8}{208}=0 \end{cases}$$

Equations finales

	ϵ_2	€.3	ε ₆	€7	€8	4. 6	
1 2 3 4 5	+ 1	+0,784 + 1	+0,470 + 1	+0,470 -9,89 + 1	+2,86 -0,259	-18,67 +49,4 -5,01	$\begin{array}{c} \varepsilon_2 = -16,24 \\ \varepsilon_5 = +16,06 \\ \varepsilon_6 = +3,38 \\ \varepsilon_7 = +2,18 \\ \varepsilon_8 = -10,93 \end{array}$

Le calcul a été simplifié en opérant des réductions $\epsilon_1 = -6,04$ e les équations normales. $\epsilon_2 = -6,04$ entre les équations normales.

C. Méthode de Legendre.

Cette méthode est caractérisée:

- a) par l'introduction de valeurs approchées des inconnues;
- b) par l'emploi de variables auxiliaires. Il semble qu'on complique le problème; en réalité ce n'est qu'une apparence.

Considérons la ligne Croy-Mont-la-Ville:

Considérons la ligne Croy-Mont-la-Ville:
$$\text{Croy} \left\{ \begin{array}{l} \text{Altitude approchée} = 642,485 \\ \text{, compensée} = 642,485 + x_1 \end{array} \right.$$

$$\text{Mont-la-Ville} \left\{ \begin{array}{l} \text{Altitude approchée} = 932,495 \\ \text{, compensée} = 932,495 + x_2 \end{array} \right.$$

$$\text{Mont-la-Ville-Croy} \left\{ \begin{array}{l} \text{Diff. de niveau observée} = 290,0164 \\ \text{, approchée} = 290,010 \\ \text{, compensée} = 290,010 + x_2 - x_1 \\ = 290,0164 + \varepsilon_2 \end{array} \right.$$

 $\varepsilon_2 = 290,010 - 290,0164 + x_2 - x_1 = x_2 - x_1 - 6,4$ Nous avons donc décomposé l'erreur d'observation e en deux parties à l'aide des valeurs approchées; nous obtenons ainsi le système d'équations aux erreurs:

$$\begin{cases} \varepsilon_{1} = x_{2} - x_{1} + 3.8 & \varepsilon_{6} = x_{3} - x_{4} + 20.6 \\ \varepsilon_{2} = x_{2} - x_{1} - 6.4 & \varepsilon_{7} = x_{4} + 2.0 \\ \varepsilon_{3} = x_{1} - 2.4 & \varepsilon_{8} = x_{4} - x_{5} - 16.7 \\ \varepsilon_{4} = x_{3} + 18.6 & \varepsilon_{9} = x_{5} + 1.5 \\ \varepsilon_{5} = x_{2} - x_{3} + 12.2 & \varepsilon_{10} = x_{3} - x_{5} + 21.7 \end{cases}$$

Il ne reste que 5 inconnues x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 au lieu de 10 et par ce changement de variables nous avons exprimé implicitement que l'écart de fermeture des 5 polygones devait être nul; il n'y a plus à s'occuper des équations de condition

$$\frac{(x_3 - x_1 + 3.8)^2}{356} + \frac{(x_2 - x_1 - 6.4)^2}{198} + \dots + \frac{(x_3 - x_5 + 21.7)^2}{208} = \min$$

Equations normales

Equations normales
$$\left(-\frac{x_2 - x_1 + 3.8}{356} - \frac{x_2 - x_1 - 6.4}{198} + \frac{x_1 - 2.4}{58} = 0\right)$$

$$\frac{x_2 - x_1 + 3.8}{356} + \frac{x_2 - x_1 - 6.4}{198} + \frac{x_2 - x_3 + 12.2}{162} = 0$$

$$-\frac{x_2 - x_3 + 12.2}{162} + \frac{x_3 - x_4 + 20.6}{97} + \frac{x_1 + 18.6}{98} + \frac{x_1 - x_5 + 21.7}{208} = 0$$

$$-\frac{x_3 - x_4 + 20.6}{97} + \frac{x_4 + 2.0}{9} + \frac{x_4 - x_5 + 16.7}{53} = 0$$

$$-\frac{x_4 - x_5 - 16.7}{53} + \frac{x_5 + 1.5}{26} - \frac{x_3 - x_5 + 21.7}{208} = 0$$
Equations finales

Equations finales

		X ₁	X.2	X ₃	X ₄	X ₅	e Bare	a ser		
	1 2	+1	0,534 + 1	-0,534			-0,784 + 4,12	$x_1 = -3,34$ $x_2 = -13,20$		
141	3 4	3		+ 1	-0,3655 + 1	-0,1505	+16,15 $-1,025$	$x_3 = -17,03$ $x_4 = +0,18$		
0	$ 5 $ $ +0,0582 +0,3246 $ $x_5 = -5,58$ on en déduit: $\epsilon_1 = -6,06$ $\epsilon_2 = -16,26 \dots$									

Récapitulation:

Méthodes de :	Legendre	Lallemand	Gauss	Moyennes	Différences de niveau compensées
€ ₁ € ₃ € ₃ € ₄ € ₅ €, €, €, €,	- 6,06 - 16,26 - 5,74 + 1,57 + 16,03 + 3,39 + 2,18 - 10,94 - 4,08 + 10,25	6,04 16,24 5,74 1,56 16,06 3,38 2,18 10,93 4,09 10,25	6,05 16,25 5,75 1,58 16,02 3,31 2,16 10,92 4,08 10,18	- 6,05 - 16,25 - 5,74 + 1,57 + 16,04 + 3,36 + 2,17 - 10,93 - 4,08 + 10,23	290,0002 290,0002 143,2196 164,6760 268,5438 161,5728 38,8412 1,3078 90,1144 162,8806

Les légères divergences dans les résultats sont dues à l'emploi de la règle logarithmique pour ces calculs.

Altitudes définitives

Croy		642,4816
Mont-la-Ville	•	932,4818
L'Isle	•	663,9380
Vullierens .	•	502,3652
Aubonne .	•	501,0574

5° Conclusion.

On voit qu'avec les 3 méthodes il y a 5 équations normales à résoudre et c'est en somme l'opération laborieuse du problème. Dans la méthode de Gauss les équations présentent une symétrie qui facilite le travail; par contre, l'emploi des facteurs de Lagrange, qui ne sont susceptibles d'aucune interprétation, alourdit les calculs; à ce point de vue le procédé de Lallemand est certainement préférable. La méthode de Gauss paraît malgré cela jouir d'une certaine faveur (nivellements de la commission géodésique suisse, nivellement de précision de la ville de Zurich, etc.).

La méthode de Legendre présente un avantage caractéristique sur les deux autres: on n'a pas à craindre avec elle d'oublier des équations de condition ou d'en compter à double et c'est précieux lorsque le réseau est compliqué; il suffit de considérer toutes les lignes à compenser et d'exprimer tous les en fonction des x. C'est déjà ce même avantage qui a assuré à la méthode de Legendre une place si éminente dans les calculs de triangulation, bien que la détermination des valeurs approchées des divers éléments d'un réseau trigonométrique soit souvent pénible.

Il faut donc éviter d'adopter ou de condamner *a priori* une méthode ou l'autre, mais dans chaque cas examiner préalablement celle qui est la plus appropriée.

ANSERMET.