Zeitschrift: Zeitschrift des Vereins Schweizerischer Konkordatsgeometer [ev. = Journal de la Société suisse des géomètres concordataires]

Herausgeber: Verein Schweizerischer Konkordatsgeometer = Association suisse des géomètres concordataires

Band: 3 (1905)

Heft: 1

Artikel: Die Übereinstimmung von Theorie und Wirklichkeit : im Zusammenhang zwischen durchschnittlichem Fehler t, mittlerem Fehler m, wahrscheinlichem Fehler r und Maximalfehler M

Autor: Sutter, J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-178666

der Geometerstand ist, die einzelnen Verfahren miteinander zu vergleichen und gegen einander abzuwägen, um dadurch mit einem Minimum von Kosten den größten Nutzeffekt zu erzielen. Dieses Verständnis zu wecken und weiter zu entwickeln, soll meine Aufgabe sein! St.

Die Übereinstimmung von Theorie und Wirklichkeit

im Zusammenhang zwischen durchschnittlichem Fehler t, mittlerem Fehler m, wahrscheinlichem Fehler r und Maximalfehler M.

Die Fehlertheorie gibt uns als verschiedene Maßstäbe für die Beurteilung der Genauigkeit unserer Messungen

1. den durchschnittlichen Fehler, als arithmetisches Mittel aller absoluten Werte der wahren Fehler

$$t = \frac{\Sigma\,(\varepsilon)}{n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

2. den mittleren Fehler, gleich der Wurzel aus dem arithmetischen Mittel der Quadrate der wahren Fehler

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\,\varepsilon]}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Das Quadrat des mittleren Fehlers heißt die Unsicherheit.

3. den wahrscheinlichen Fehler r, für dessen Auftreten in einer Fehlerreihe die Wahrscheinlichkeit $= 0{,}5$ ist.

Werden die wahren Fehler ihrem absoluten Werte nach geordnet, so liegt der wahrscheinliche Fehler in der Mitte dieser Reihe.

4. den Maximalfehler M.

Zwischen diesen verschiedenen Genauigkeitsmaßstäben bestehen Beziehungen, die uns ermöglichen, mittels der Kenntnis des einen, den Wert des andern zu bestimmen.

Die Formeln heißen:

$m = t \times 1.2533$	Jordan,	Band	I	Seite	442	. 3)
$r = m \times 0{,}6745$	„	„	I	„	440	. 4)
$M = 3 \times m$	„	„	I	„	466	. 5)

Es ist nicht meine Absicht, diese Formeln abzuleiten; dieselben sollen lediglich auf folgendes, der Praxis entnommene Beispiel angewendet werden, um die Uebereinstimmung der einzelnen theoretisch abgeleiteten Werte mit denjenigen, die direkt aus den Beobachtungen gerechnet werden können, zu zeigen.

Die bis jetzt durchgeführten Arbeiten auf diesem Gebiete behandelten stets Resultate der Gradmessungen, also sehr genaue Arbeiten, aus denen die größern Fehler bereits ausgeschieden waren, und die dort auftretenden Fehler bewegen sich meistens zwischen 0" und 1". Es war also von Interesse, zu untersuchen, zu welchen Resultaten die Anwendung dieser Formeln auch auf gewöhnliche Triangulationen IV. Ordnung führen.

Grundlegend für meine Untersuchung sind die Resultate von 417 unabhängigen Horizontgleichungen, welche den Messungen einer von uns ausgeführten Triangulation IV. Ordnung entnommen sind. Die Horizontkontrollen wurden unmittelbar nach den Messungen aufgestellt, um vor der Berechnung die notwendigen Nachmessungen feststellen zu können. Die Resultate sind hier angeführt, wie sie ohne Berücksichtigung der Nachmessungen den Winkelbüchern entnommen wurden, und wie sie dort aufeinander folgen.

Da die Widersprüche w in den Horizontgleichungen (Summe der gemessenen Winkel — 360^0) zwar wahre Fehler sind, jedoch mit ungleichen Gewichten je nach der Anzahl der Winkel, welche zur Bildung der Horizontgleichung gedient haben, so habe ich zuerst in jeder Gleichung den mittleren Fehler eines Winkels berechnet nach der Formel:

$$m = \pm \frac{w}{\sqrt{n}}$$

und diesen Wert für die Untersuchung benützt.

Die 417 Fehler sind in 5 verschiedenen Reihen zusammengestellt von 82, 164, 246, 328 und 417 Fällen. Diese Anordnung ist rein zufällig und nur von der Länge des Papiers, auf dem die Reihen zusammengestellt wurden, abhängig. Ich erreiche also ein fünffaches Resultat für fünf verschiedene Fehlerreihen.

Folgende Tabelle gibt die Uebersicht der zur Untersuchung verwendeten Fehler, nebst deren Quadrate und zwar für die erste Reihe mit Anführung jedes einzelnen Falles, für die übrigen Reihen summarisch.

I. Reihe		I. Reihe		I. Reihe		I. Reihe		I. Reihe	
ε''	ε²	ε''	ε²	ε''	ε²	ε''	ε²	ε''	ε²
"		"		"		"		"	
5,2	27,04	1,01	1,02	0,81	0,66	5,0	25,00	2,01	4,04
2,9	8,41	0,51	0,26	2,5	6,25	3,0	9,00	1,61	2,59
1,51	2,28	3,00	9,00	4,1	16,81	0,91	0,83	4,1	16,81
0,01	0	3,50	12,25	5,2	27,04	1,11	1,23	2,21	4,88
1,01	1,02	1,71	2,92	0,01	0	0,81	0,65	9,4	88,36
5,2	27,04	2,01	4,04	0,01	0	9,0	81,00	1,51	2,28
5,2	27,04	2,31	5,34	5,5	30,25	1,21	1,46	1,51	2,28
1,01	1,02	5,5	30,25	0,01	0	0,01	0	2,9	8,41
3,5	12,25	1,01	1,02	0,01	0	1,01	1,02	3,1	9,61
9,8	96,04	2,31	5,34	2,01	4,04	1,01	1,02	1,01	1,02
4,0	16,00	0,51	0,26	0,61	0,37	5,0	25,00	4,9	24,01
6,5	42,25	1,21	1,46	0,51	0,26	0,01	0	3,0	9,00
3,5	12,25	0,61	0,37	4,80	23,04	2,01	4,04	3,5	12,25
0,01	0	3,7	13,69	0,41	0,17	3,3	10,89	4,0	16,00
4,5	20,25	0,61	0,37	4,6	21,16	2,5	6,25		
1,01	1,02	6,0	36,00	4,6	21,16	2,5	6,25		
4,0	16,00	2,31	5,34	1,21	1,46	0,81	0,66		

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}$

217,41 967,33

II. Reihe		III. Reihe		IV. Reihe.		V. Reihe	
ε''	ε²	ε''	ε²	ε''	ε²	ε''	ε²
471,07	2110,77	714,77	3213,44	954,97	4281,28	1240,57	5662,70

Berechnen wir nun für jede Reihe den durchschnittlichen Fehler t nach Formel (1) daraus nach Formel (3) den mittlern Fehler m und sodann direkt aus den Fehlerreihen ebenfalls den Wert m nach Formel (2), so gelangen wir zu folgenden Resultaten:

Reihe	Fälle	t "	m theoretisch aus t $m'' = t \cdot 1{,}2533$	m direkt aus den Fehlereihen "	Differenz "	Differenz in $^0/_0$	Koeffizient aus der Formel	Koeffizient gerechnet aus den Werten von t und m direkt aus den Fehlerreihen
I.	82	$\frac{217,41}{82} = 2.65$	3,32	$\sqrt{\frac{967,33}{82}} = 3,44$	0,12	3,6$^0/_0$	1.2533	1,298
II.	164	$\frac{471,07}{164} = 2,87$	3,60	$\sqrt{\frac{2110,77}{164}} = 3,59$	0,01	0,3$^0/_0$		1,251
III.	246	$\frac{714,77}{246} = 2,91$	3,65	$\sqrt{\frac{3213,44}{246}} = 3,61$	0,04	1,1$^0/_0$		1,240
IV.	328	$\frac{954,97}{328} = 2,91$	3,65	$\sqrt{\frac{4281,28}{328}} = 3,61$	0,04	1,1$^0/_0$		1,240
V.	417	$\frac{1240,57}{417} = 2,98$	3,74	$\sqrt{\frac{5662,70}{417}} = 3,69$	0,05	1,3$^0/_0$		1,239

6268:5 = 1,253

Mit Hülfe der direkt aus den Fehlern berechneten Werte m können wir den wahrscheinlichen Fehler $r = 0{,}6745 \times m$ bestimmen; anderseits kann dieser Wert ebenfalls direkt den Beobachtungsreihen entnommen werden, indem wir die Fehler ihrem absoluten Werte nach ordnen und den Wert, der nach dieser Anordnung in der Mitte der Reihe auftritt, als wahrscheinlichen Fehler annehmen.

Aus folgender Tabelle sind die so erhaltenen Fehler r ersichtlich.

m "	$r = m \times 0{,}6745$ "	r direkt durch abzählen "	$\varDelta$ "
			"
3,44	2,32	2,25	0,07
3,59	2,42	2,50	0,08
3,61	2,44	2,50	0,06
3,61	2,44	2,50	0,06
3,69	2,49	2,50	0,01

Vorstehende Zusammenstellungen ergeben also eine durchaus gute Ueberninstimmung zwischen den theoretisch gerechneten Werten von m und r und den aus den Beobachtung gewonnenen. Interessant ist ebenfalls die Vergleichung der einzelnen Werte aus den verschiedenen Fehlerreihen; dieselben sind sozusagen konstant. Da alle Messungen vom gleichen Beobachter und mit demselben Instrument ausgeführt wurden, war zwar dieses Resultat zu erwarten.

Das betreffende Instrument wurde später noch einer Prüfung unterworfen, durch Messung eines Winkels je 8 mal in verschiedener Kreislage (Methode der eidg. Instruktion). Der mittlere Fehler eines auf diese Weise 8 mal repetierten Winkels ergab sich zu 3'',3. Nach diesem Ergebnis beurteilt, hätte der mittlere Fehler aus der großen Fehlerreihe etwas besser ausfallen sollen, es ist jedoch zu bedenken, daß bei der Untersuchung des Instrumentes mit besonderer Sorgfalt operiert wurde, und daß zweitens in den Horizontgleichungen, welche zur Bildung des Wertes 3,68 benutzt wurden, Strahlen von ganz verschiedenen Längen auftreten.

Unter Benützung vorliegender Fehlerreihen können noch weitere Betrachtungen angestellt werden. Jordan gibt in seinem Band I pag. [21] Anhang, eine Tabelle zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Fallen eines Fehlers zwischen den Grenzen 0 und dem n-fachen mittlern Fehler. Wir können also mit Hülfe dieser Tabelle theoretisch berechnen, wie oft in einer solchen Fehlerreihe die Fehler zwischen 0 und einem beliebigen Vielfachen des mittlern Fehlers m vorkommen und zwar nach der einfachen Formel:

$$\frac{X}{417} = \text{Wahrscheinlichkeit}$$
$$X = \text{Wahrscheinlichkeit} \times 417.$$

Nehmen wir beispielsweise an, es sei zu untersuchen, wie oft die Fehler zwischen 0″ und 6″ auftreten. — Der mittlere Fehler ist $m = 3{,}69$, es ist also die Wahrscheinlichkeit aufzusuchen, welches dem Argument $n = \frac{6}{3{,}69} = 1{,}63$ entspricht. Aus der Tabelle ist dies gleich 0,8969, also

$$X = 0{,}8969 \times 417 = \underline{374.}$$

Zählen wir in der Fehlerreihe nach, so ergeben sich $\underline{374}$ Fälle. Wird dieselbe Regel nur auf die erste Reihe mit 82 Fehlern angewendet, deren $m = 3'',44$. so ist

Argument $n = \frac{6}{3{,}44} = 1{,}75$ und entsprechender Wert aus der Tabelle $= 0{,}9199$, also $X = 0{,}9199 \times 82 = \underline{75}$, effektiv $\underline{78.}$

Oder wollen wir die Anzahl der Fehler kennen, die den doppelten Wert von m übersteigen, also größer sind als 7,4, so haben wir die Anzahl der Fehler von 0 bis 7,4 zu berechnen, und von 417 abzuziehen.

Wert ist bei Argument $2 = 0{,}9545.$

$$X = 317 \times 0{,}9545 = 399$$

Ein Fehler von über 7″,4 tritt also theoretisch in $417 - 399 = 18$ Fällen auf. Aus der Reihe abgezählt ergeben sich 16 Fälle.

Die Instruktion des Geometerkonkordats gibt in verschiedenen Toleranzformeln neben dem gestatteten mittlern Fehler auch den zuläßigen Maximalfehler (Grenzfehler) an. So haben wir z. B. als Toleranzformel für den Azimutalabschluß in den Polygonzügen

$$\sqrt{n} \text{ bis } 3 \cdot \sqrt{n} \text{ Zentesimalminuten,}$$

wo n die Anzahl der Polygonwinkel bedeutet.

Diese Formel sagt uns, daß der mittlere Fehler eines Polygonwinkels eine Zentesimalminute nicht übersteigen soll und nur in Ausnahmefällen der Grenzfehler von 3 Zentesimalminuten erreicht werden darf.

Wenden wir auf unsere Fehlerreihen die Formel (5) an, so erhalten wir:

	m ''	$M'' = 3\,m$	Effektiver Wert von M aus der Reihe
	''		
I. Reihe	3,44	10,32	9,8
II. „	3,59	10,77	9,8
III. „	3,61	10,93	9,8
IV. „	3,61	10,83	9,8
V. „	3,69	11,07	9,8

In keiner unserer Reihen erreicht also der effektive Maximalfehler den theoretisch berechneten.

Jordan hat in Band I pag. 466 und 467 und 569 bis 574 die Grundlagen zur theoretischen Berechnung des Maximalfehlers unter Benutzung der Fehlerbiquadrate gelegt. Seine Anwendungen auf die durch Formel (12) pag. 467 ausgedrückte Theorie führen nicht immer zu übereinstimmenden Resultaten.

Er schliesst seine Betrachtungen mit den Worten:

„Unsere wenigen Versuche dieser Art deuten darauf hin, daß das Verhältnis $M:m$ sogar für gute Messungen kaum den Wert 3 erreicht und meist zwischen 2 und 3 sich bewegen wird.“

Unsere 5 Fehlerreihen ergeben als Verhältnis zwischen M und m folgende Werte:

	M effektiv	m	$\frac{M}{n}$
I. Reihe	9,8	3,44	2,85
II. „	9;8	3,59	2,73
III. „	9,8	3,61	2,71
IV. „	9,8	3,61	2,71
V. h	9,8	3,69	2,66

13,66 : 5 = 2,73

Aus den angeführten Betrachtungen ergibt sich also, daß auch die gewöhnlichen Beobachtungen IV. Ordnung schön dem Fehlerfortpflanzungsgesetz sich anschmiegen.

Das Studium der Fehlertheorie gehört nach meiner Ansicht zu einer der wichtigsten Aufgaben des Vermessungstechnikers, speziell ist sie für denjenigen von Bedeutung, der als Verifikator in die Lage kommen kann, verschiedene Arbeiten miteinander vergleichen zu müssen.

Die gänzliche Mißachtung dieser Theorie hat bei der Aufstellung mancher Vorschrift und Instruktion schon oft zu Toleranzfehlern geführt, die sich gegenseitig widersprachen. In einem nächsten Aufsatz werde ich Gelegenheit haben, solche Fälle nachzuweisen.

Zürich, Dezember 1904. *J. Sutter.*

Literatur.

Der „Kalender für Geometer und Kulturtechniker", herausgegeben von W. v. Schlebach, beinahe allen schweizerischen Geometern ein guter, alter Bekannter, hat seinen Titel in „Kalender für Vermessungswesen und Kulturtechnik" geändert. Die Gründe hiezu werden in der „Zeitschrift für Vermessungswesen folgendermaßen angedeutet:

„Schon die Aenderung des Titels in „Kalender für Vermessungswesen und Kulturtechnik" statt für „Geometer und Kulturtechniker" ist geeignet, die Empfindlichkeiten zu beseitigen, die dadurch zuweilen hervorgerufen wurden, daß dem norddeutschen Landmesser vielfach in sogenannten Geometern, dem süddeutschen Geometer aber im Privatlandmesser oder doch Feldmesser eine fatale Kollegenschaft aus dem Kreise halbgebildeter oder auch nichtgebildeter Messungsbeflissener hergebrachter Weise zu entstehen pflegt. Auch der akademisch gebildete Jünger der Kulturtechnik hört sich nicht mehr gerne Techniker nennen, seit dieser Titel sich in Kreisen von Hilfsarbeitern u. s. w. so großer Beliebtheit erfreut."

Angenehmer als die Titeländerung wäre uns ein besserer Einband des ersten Teiles gewesen.

Geometerschule am Züricher Technikum.

Der Erziehungsrat des Kantons Zürich hat auf Antrag der Aufsichtskommission beschlossen:

Die Abiturienten der Schule für Geometer des Technikums in Winterthur, welche die Fähigkeitsprüfung mit Erfolg bestehen, erhalten den Fähigkeitsausweis als Geometer und Kulturtechniker.

St.