Zeitschrift: Divus Thomas

Band: 26 (1948)

Artikel: Die Wahrscheinlichkeit als Grenzwert der relativen Häufigkeiten : Kritik des Grundbegriffes der Statistik [Schluss]

Autor: Pacelka, Artur

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-762283

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Die Wahrscheinlichkeit als Grenzwert der relativen Häufigkeiten

Kritik des Grundbegriffes der Statistik

Von RN Dr. Artur PAVELKA, Prag

(Schluss)

9. Dörges Theorie des Glückspieles

Eine Umarbeitung und Vervollkommnung der *Mises*schen Wahrscheinlichkeitsrechnung hat *Karl Dörge* vorgenommen. Auf Grund der *Mises*schen Vorarbeiten veröffentlichte er zu diesem Thema kurz vor dem Erscheinen des besprochenen *Mises*schen Buches in der Mathematischen Zeitschrift eine Arbeit unter dem Titel: «Zu der von *R. v. Mises* gegebenen Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Erste Mitteilung: Theorie des Glücksspieles.»[1] *v. Mises* konnte diese Arbeit noch in eine Fußnote seines Buches aufnehmen, wobei er der *Dörge*schen Theorie seine unverhüllte Anerkennung zollte, indem er sagte: «Eine axiomatische Untersuchung in dem hier gemeinten Sinne (nach dem Maßstab der erst in der neuesten Zeit in der Geometrie verwirklichten Genauigkeit) gab kürzlich *Karl Dörge*. Er gelangt in vielen Punkten zu etwas abgeänderten, jedenfalls schärferen Formulierungen.»[2] Die Tatsache, daß es sich um eine Arbeit im Anschluß an die *Mises*sche Konzeption handelt, ist zusammen mit der anerkennenden Bemerkung *v. Mises* ein genügender Beweggrund für uns, nachzuprüfen, inwiefern sich unser kritischer Standpunkt mit der Kritik *Dörges* deckt und auf welchen neuen Grundlagen er seine Theorie aufbaut. Denn letzten Endes ist unser Interesse durch die Frage gegeben, ob sich die empirisch so glücklich verwurzelte *Mises*sche Theorie in einem von unserem naturphilosophischen Standpunkt aus annehmbaren Sinne ausbauen läßt.

[1] Mathem. Zeitschr. 32 (1930), S. 232.
[2] *v. Mises*, S. 22.

Die Kritik *Dörges* setzt vom mathematischen Boden her ein und richtet sich gegen das auch von unserem naturphilosophischen Standpunkte aus unhaltbare Regellosigkeitsaxiom oder Axiom vom ausgeschlossenen Spielsystem, wie man es auch zu nennen pflegt. Es wäre ja auch sehr verwunderlich, wenn ein derart inkonsequent definierter Begriff mathematisch einwandfrei verwendbar wäre. Die durch dieses Regellosigkeitsaxiom gegebene reine Zufallsreihe, die *v. Mises* bei seiner Arbeit sichtlich vor Augen schwebte, vermag durch die ihr eigene gesetzliche Gesetzlosigkeit sogar den Mathematiker in Unruhe zu versetzen. Ein Ausdruck dieser mathematischen Unruhe sind sichtlich die Worte *Dörges:* « Auf Widerstand gestoßen ist diese Theorie vor allem wegen der außerordentlich weitgehenden Forderung des ausgeschlossenen Spielsystems. Hieraus mußte nämlich *v. Mises* die Folgerung ziehen, daß die Annahme, es könnte gelingen, ein Beispiel für ein Kollektiv mathematisch zu konstruieren, zum Widerspruch führt. Die Kollektivs sind daher bei *v. Mises* nicht rein mathematische, sondern andere Gegebenheiten, wie etwa die Abstrakta von unendlichen Folgen von Würfen mit einem Würfel, die nicht mathematisch gesetzlich, sondern in anderer Weise, vielleicht kann man sagen physikalisch bestimmt sind. »

Obzwar also der Gegenstand der Kritik gemeinsam ist, setzt dennoch die Kritik *Dörges* von der unserem Standpunkte entgegengesetzten Seite ein. Wir setzten der *Mises*schen Theorie aus, sie werde den empirisch gegebenen Ausgangsobjekten der mathematischen Exaktheit zuliebe untreu ; *Dörge* hingegen als Mathematiker findet die empirische Gebundenheit bei *v. Mises* noch viel zu stark ; ja er setzt aus, daß die empirische Gebundenheit überhaupt da ist und fordert eine empirisch unabhängige, also rein mathematische Theorie : « Das Ziel dieser Arbeit ist es, unter Benutzung des Grundgedankens *R. v. Mises,* eine rein mathematische Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung aufzubauen, in welcher die Objekte durch mathematische Gesetze bestimmte unendliche Folgen sind. » [1]

An dieser Zielsetzung dürfte den Nichtmathematiker vor allem die Bestimmung der Ausgangsobjekte durch mathematische Gesetze als Forderung für eine die scheinbare Gesetzlosigkeit der Naturereignisse behandelnde Wahrscheinlichkeitstheorie verwundern. Man sollte meinen, daß in einem solchen Falle die Gesetze eben gefunden wären und die

[1] *Dörge,* l. c.

weitere Theorie vielleicht überflüssig würde. Wir müssen aber zwischen einem mathematischen und einem naturwissenschaftlichen Gesetze insofern unterscheiden, als der Naturwissenschaftler immer eine gewisse Einfachheit und Durchsichtigkeit selbst in der verwickeltsten Theorie sucht und in diesem Sinne auch von der relativ einfachen Eleganz der mathematischen Ausdrucksweise mit Anerkennung spricht. Dagegen erkennt der Mathematiker jede Anweisung zur Konstruktion einer Zahl oder einer Zahlenfolge, wäre diese Konstruktion noch so verschroben oder schwerfällig, als mathematisches Gesetz an, wenn nur die Konstruktion selbst eindeutig festgesetzt ist. Wir könnten uns zum Beispiel eine unendliche mathematische Folge durch folgende Anweisung der Konstruktion der einzelnen Zahlenglieder festlegen: Man nehme die erste Dezimalstelle der Ludolfschen Zahl und schreibe sie als erstes Element der Folge an. Dann nehme man die zwei ersten Dezimalstellen der L. Zahl, führe ihre Permutationen durch, ordne die durch die Permutation entstandenen zweistelligen Zahlen nach deren Größe, schreibe sie dann in dieser Reihenfolge zur ersten Zahl der Folge hinzu und betrachte jede der jetzt so beigefügten Ziffern als weiteres Element. Dann nehme man drei Dezimalstellen der L. Zahl, permutiere die dreistelligen Zahlen, ordne sie nach deren Größe, füge die einzelnen dreistelligen Zahlen so geordnet zu der bisher hervorgebrachten Folge und betrachte jede derart beigefügte Ziffer als ein neues Glied der Folge; dann fahre man derart fort für vier Dezimalstellen der L. Zahl, für fünf, sechs ... usw., bis ganz allgemein der ganze Prozeß mit n Dezimalstellen der L. Zahl durch Permutation, Ordnen, Hinschreiben die allgemeine Konstruktionsvorschrift liefert. Die so hervorzubringende Folge ist durch das mathematische Gesetz eindeutig bestimmt. Ebenso ist es klar, daß wir derartige Gesetze in beliebiger Zahl ausdenken können. Es wird aber kaum einen Naturforscher geben, der sich mit einem derartigen Gesetz als dem Ausdruck des Naturgeschehens zufrieden stellen würde. *Dörge* denkt also an derartige mathematische Gedankenkombinationen, wenn er von mathematischen Gesetzen spricht. Für seine mathematische Theorie wählt er derartige Gesetze in der Überzeugung, sich dadurch von der Natur, von der experimentellen Erfahrung soweit als möglich losgelöst zu haben. Wenn er daher die Ausgangsobjekte seiner Theorie durch derartig empiriefremde mathematische Gesetze erzeugt haben will, so brauchen wir darin keinen Widerspruch für den Aufbau einer die scheinbare Gesetzlosigkeit bestimmter Naturereignisse erfassenden Wahrscheinlichkeitstheorie zu erblicken.

Und dieser ausgesprochen mathematische Standpunkt bestimmt auch den Aufbau der *Dörge*schen Theorie. *Dörge* stellt drei Axiome auf, die auf seine Ausgangsobjekte, die sogenannten Grundkollektivs, anzuwenden sind. Die Grundkollektive sind durch mathematische Gesetze bestimmt. Aus den Grundkollektiven leitet er dann durch die Grundoperationen das ganze System von Kollektivs ab, und dieses System definiert ihm dann die Wahrscheinlichkeitstheorie. In den Axiomen selbst und damit in der ganzen Theorie spielt der Begriff der Auswahl überhaupt und speziell der Begriff der zulässigen Auswahl eine ganz besondere Rolle. Ohne weiter auf die mathematischen Einzelheiten dieser Theorie einzugehen, sei hier bloß festgestellt, daß es *Dörge* gelingt, ein Unabhängigkeitskriterium für die Beurteilung des gegenseitigen Verhältnisses zweier Kollektive aufzustellen, womit er das Regellosigkeitsprinzip vollwertig ersetzt und die Formulierung des Multiplikationstheorems ermöglicht. Die mathematische Fassung dieser Theorie ist allgemeiner als die *Mises*sche es war, und es bedarf eines eigenen vierten Axioms, wenn man in wesentlichen Punkten das *Mises*sche Axiomensystem erhalten will. Durch eine sehr reichhaltige Gliederung der verschiedenen Auswahlmöglichkeiten gelingt es *Dörge*, auf eine mathematisch sehr zufriedenstellende Art eine neue Theorie aufzustellen, die weit den Rahmen einer bloßen Theorie des Glücksspieles überschreitet und die gleichzeitig ein mathematisch sehr vollkommenes Rüstzeug liefert, mathematische Wahrscheinlichkeitsrechnung zu betreiben. Entschieden lassen sich auf diese Weise verschiedene rein mathematisch fundierte Glücksspiele und ähnliche rein gedankliche Erzeugnisse sehr gut behandeln. In gewisser Annäherung dürften auch die allgemein bekannten Glücksspiele durch diese Theorie erfaßbar sein.

Diesen mathematischen Vorteilen steht die weitgehende Abkehr von der Erfahrung entgegen, sodaß die Einhaltung der empirischen Häufigkeitslinie unmöglich gemacht wird. Diese vollständige Abkehr von der Erfahrung hat uns auch die eingehende Analyse seiner mathematischen Ausführungen erspart. Auf keinen Fall ist durch diese Theorie des Glücksspieles die Problematik gelöst, die wir bereits bei *v. Mises* vorfanden: Entweder liegt in der Natur eine reine Zufallsreihe vor, dann genügt nicht einmal die durch das mathematische Gesetz aufgestellte Grundfolge und die auf ihr aufgebaute Wahrscheinlichkeitstheorie, um die reine Zufallsreihe zu erfassen, denn letzten Endes wäre auch das verwickeltste mathematische Gesetz eben doch noch ein Gesetz und nicht reiner Zufall. Oder aber liegt hier, wie dies unsere Ansicht ist, keine

reine Zufallsreihe vor, weil es eine solche selbständig nicht geben kann; dann aber muß das zu wählende mathematische Gesetz irgendeinen inneren Zusammenhang mit der Erfahrung, wenigstens in seinen Grundlagen, aufweisen und nicht erst in einer Bewährung, die mehr oder weniger zufallsartigen Charakter aufweist und höchstens davon Zeugnis ablegen kann, daß durch die Theorie in undurchsichtiger Weise eine Teilerfassung der zur Bearbeitung vorliegenden Naturereignisse zustandegekommen ist. Wir können also nicht behaupten, durch die *Dörge*sche Theorie dem Ausbau der von *v. Mises* gelegten Grundlagen in Richtung der empirischen Häufigkeitslinie näher gekommen zu sein. Wir gelangen also bei der Beurteilung dieser Arbeit zu dem nachstehenden Ergebnis:

Dörge *verläßt in seiner Theorie des Glücksspieles das empirische Ausgangsobjekt der beobachteten Ereignisfolgen und setzt an deren Stelle die durch rein mathematische Gesetze definierten Grundkollektive. Er erreicht zwar dadurch eine formal-mathematisch konsequente Theorie, die aber in Ermanglung eines direkten inneren Zusammenhanges mit der Erfahrung kaum als ein geeignetes Instrument für die volle wissenschaftliche Durchdringung des gegebenen experimentellen Materials angesehen werden kann.*

10. Die Methodik der Misesschen und der Dörgeschen Theorie

Die Einhaltung der empirischen Häufigkeitslinie kann nur durch die ihr voll entsprechende Methode gewährleistet werden. Wir müssen also die Beurteilung der beiden angeführten Theorien in methodischer Hinsicht ergänzen. Zu diesem Zwecke genügen uns die Ergebnisse, die wir über die Methode der Physik früher bereits erarbeitet haben [1].

In der *Mises*schen Theorie ist der induktive Weg in seiner stufenweisen Entwicklung angebahnt; er wird aber bald durch einen großen Sprung abgekürzt, um unmittelbar das Subjekt der Theorie erreichen zu können. Vom Subjekte werden dann auf die übliche Weise die Lehrsätze der Wahrscheinlichkeitstheorie deduktiv abgeleitet. Die ersten induktiven Schritte verfolgen treu die empirische Häufigkeitslinie. Der große Sprung setzt dann plötzlich ein, um die mathematisch strenge Fassung des Subjektes der Theorie zu ermöglichen. Damit geht aber

[1] Divus Thomas 25 (1947) 290.

die schrittweise induktive Entwicklung der zu erforschenden Gesetzmäßigkeit verloren, und die Theorie wird dadurch von der empirischen Häufigkeitslinie abgedrängt.

Die *Dörge*sche Glücksspieltheorie wählt eine noch einfachere Methode. Sie setzt sich über den induktiven Weg einfach hinweg und beginnt unmittelbar mit dem axiomatisch festgesetzten Subjekte der Theorie und mit den Ableitungen aus dem Subjekte. Die Gegenüberstellung zur Empirie ist eine nachträgliche Kontrolle, ob das Subjekt der Theorie richtig erfaßt, also intuitiv richtig angenommen wurde. Ist die Übereinstimmung mit der Empirie befriedigend, stellt sich der Forscher mit ihr zufrieden. Er hat nämlich ein formal-mathematisches Mittel zur Ordnung des empirischen Materials gefunden. Dies gilt auch von der Glücksspieltheorie.

Aber wenn wir auch von der Tatsache absehen, daß die Übereinstimmung der Erfahrung mit der Theorie des Glücksspieles bloß unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen gegeben ist, also keineswegs eine vollkommene ist, so hat ein solches Überspringen des gesamten induktiven Weges noch den wesentlichen Nachteil, daß wir nur sehr schwer zur Fülle des Subjektes der Theorie vordringen können. Denn gerade bei der induktiven Methode entfaltet sich diese Struktur des Subjektes schrittweise, sodaß wir auf dem Wege von der Empirie beim Subjekt angelangt, alles überblicken können, was uns durch das empirische Ausgangsobjekt geboten wird. Und dies ist der eigentliche Grund, warum wir eine derart rein-mathematisch-axiomatisch aufgebaute naturwissenschaftliche Theorie als unbefriedigend bezeichnen müssen.

Es ist nun ganz richtig, daß alle groß angelegten Theorien mehr oder minder axiomatisch angelegt sind und daß in solchen Fällen bloß die gesamte experimentelle und auch theoretische Vorarbeit der Einzelabhandlungen in der Literatur den verkürzten induktiven Weg ersetzen. In der klassischen Physik sind außerdem die Strukturverhältnisse der behandelten Ausgangsobjekte mit Hilfe von Modellen und einfachen mathematischen Beziehungen in dem Maße durchsichtig, daß dann die rein axiomatische Methode mit ihrem Sprunge als erster Voraussetzung nicht als störend empfunden wird.

Ganz anders gestalten sich jedoch die Verhältnisse, wenn wir die statistische Gesetzmäßigkeit und ihren grundlegenden Begriff der Wahrscheinlichkeit behandeln. In diesem Falle ist die Struktur dieser neuartigen Gesetzmäßigkeit alles andere als einsichtig und die Annahme

bestimmter Axiome ist vor allem von mathematischen Beweggründen beeinflußt, ansonsten kann aber eine solche Theorie niemals von der so wichtigen schrittweisen Entfaltung ihrer Gesetze sprechen, wie es der Charakter natürlicher Ereignisfolgen mit sich bringt.

Wir können also im Falle der Wahrscheinlichkeitstheorie ein Überspringen der induktiven Methode mit ihrer systematischen Gesetzesentfaltung in keiner Weise entschuldigen und müssen deshalb die Misessche *Wahrscheinlichkeitstheorie sowie die* Dörgesche *Glücksspieltheorie als methodisch unzulänglich erklären.*

11. Dörges induktiver Weg

Dörge hat sichtlich seine Glücksspieltheorie bewußt als Mathematiker geschrieben und als solcher hat er sie durch die reine formal-axiomatische Methode richtig bearbeitet. Daß er sich gleichzeitig der Vernachlässigung des induktiv aufsteigenden Weges der Naturwissenschaften wohl bewußt war, davon zeugt ein unscheinbares Büchlein, das er in Zusammenarbeit mit *Hans Klein* unter dem bescheidenen Titel « Wahrscheinlichkeitsrechnung für Nichtmathematiker » [1] veröffentlichte. Übrigens ver-verfolgte er hiebei neben den naturwissenschaftlichen auch ausgesprochen philosophische Rücksichten, wie wir dem Vorworte entnehmen können, wo es heißt : « Die Bedeutung der Wahrscheinlichkeitstheorie beschränkt sich nicht allein auf die induktiven Wissenschaften selbst und die ihnen gemeinsame Hilfswissenschaft, die Statistik, sondern eigentlich erfordert jetzt jede Erkenntnistheorie eine Auseinandersetzung mit den Ergebnissen der Wahrscheinlichkeitstheorie und ein Wissen um deren Sicherheit oder Unsicherheit. » [2]

Dörge ist entschlossen, die in dem induktiven Aufbau verborgenen Strukturelemente aufzudecken und wendet sich daher mit seiner Arbeit ausgesprochen an die Nichtmathematiker, also an Wissenschaftler, die die formal-axiomatische Methode der Mathematik als ausschließliche Methode für ihr Fachgebiet ohne Vorbehalt nicht annehmen können und die gerne Einblick gewinnen möchten in die vormathematischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Dörge* sagt daher ausdrücklich : « Es ist das Ziel der Verfasser gewesen, die Sätze der Wahrscheinlichkeitstheorie, deren Ableitung ohne tiefere mathematische

[1] Berlin 1939. Im weiteren kurz WfN.
[2] WfN. S. 2.

Untersuchungen möglich ist, nicht nur abzuleiten, sondern auch zu zeigen, auf welcher Art von Voraussetzungen sie beruhen. »[1]

Uns wird es nun interessieren, festzustellen, wie weit wir den induktiven Weg *Dörges* mitmachen können, was gleichbedeutend ist mit der Frage, wie weit die *Dörge*sche Entfaltung des induktiven Aufbaues mit der thomistischen Häufigkeitslinie parallel läuft. Um diese Frage beantworten zu können, stellen wir uns die Aufgabe, den induktiven Weg *Dörges* in dem angeführten Buche Schritt für Schritt in den folgenden Kapiteln kritisch zu verfolgen.

12. Ereignisfolge und Merkmalfolge

Dörge vergegenwärtigt sich vor allem, worum es sich bei der Frage nach einer bestimmten Wahrscheinlichkeit handelt. Er gibt den zu dem Wahrscheinlichkeitsbegriff führenden Sachverhalt schrittweise wieder. Den ersten Schritt bildet hier der Begriff des Ereignisses und der daraus abgeleitete Begriff der Ereignisfolge, den zweiten Schritt bilden die Begriffe Merkmal und Merkmalfolge : « Gegeben ist eine Folge von Ereignissen, wie die Geburten einer großen Stadt oder die Folge der Würfe mit einem Würfel, und gefragt wird danach, mit welcher Wahrscheinlichkeit diese Ereignisse einen bestimmten Ausfall, eine bestimmte Eigenschaft zeigen. Dabei müssen wir natürlich jedesmal eindeutig entscheiden können, ob diese Eigenschaft in einem der betrachteten Ereignisse zutrifft oder nicht. Wir sagen dann auch, die Eigenschaft stelle ein Merkmal der betrachteten Ereignisfolge dar. Ein Merkmal ist also nichts anderes als eine Eigenschaft, von der wie bei jedem Ereignis der Folge entscheiden können, ob es diese Eigenschaft trägt oder nicht. »[2]

Das Ausgangsobjekt ist also in dieser Arbeit für *Dörge* eine empirisch einwandfrei definierte Gegebenheit, die Folge von Ereignissen. Er fordert diesesmal keine Einengung des Begriffes der Ereignisfolge ; er nimmt im Gegenteil jedes Ereignis an, welches auf irgendeine Weise eine Folge bietet, wie die von ihm selbst angeführten Beispiele zeigen : « Die Geburten eines Geburtenregisters, die Würfe mit einem Würfel, die Messungen der Länge einer gegebenen Strecke, die Folge der Wiederholungen eines chemischen Experimentes unter vorgegebenen Versuchsbedingungen, wiederholtes Schießen nach einer Scheibe, Drehung eines

[1] WfN. S. 2. [2] WfN. S. 20.

Roulettes, Ziehen von Kugeln oder Losen aus einer Urne, gleichzeitiges Würfeln mit zwei oder mehr Würfeln u. ä. »[1] Um jedem Mißverständnis in der Auffassung des Einzelereignisses vorzubeugen, fügt er noch hinzu: « Die Einzelereignisse dieser Folgen sind dabei die Geburt, der Wurf, die Messung, der chemische Versuch, der Schuß, die Drehung des Roulettes, die Ziehung einer Kugel und der Wurf mit mehreren Würfeln. »

Die ausgiebige Aufzählung der verschiedensten möglichen Ausgangsobjekte zeigt, daß die Auffassung der WR. in dieser Arbeit eine viel allgemeinere sein muß als in den beiden früher besprochenen Arbeiten von *v. Mises* und *Dörge*. Dabei wird jede Ereignisfolge so angenommen, wie sie sich uns empirisch unmittelbar darbietet. Daß die Naturereignisse sich dabei an Körpern oder als wechselseitige Wirkung zwischen zwei oder mehreren Körpern offenbaren, berührt *Dörge* hier nicht. Diesen weitgehenden Zusammenhang findet er im Sinne der gegenwärtigen Orientation der Physik als nebensächlich. Die scharfe Trennung des Begriffes des Einzelereignisses vom Begriffe der Ereignisfolge berührt indessen die völlige Umstellung der Grundlagen der mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff arbeitenden statistischen Physik zum Unterschied von der klassischen Physik. Diese behandelt das Einzelereignis und sucht dessen Gesetze, jene behandelt ganze Ereignisfolgen und nur solche Folgen und sucht ihre Gesetzmäßigkeit, die dann eben eine statistische ist.

Allerdings ist die Ereignisfolge bloß Ausgangsobjekt, keineswegs aber bereits der Gegenstand der statistischen Untersuchung. Einen Schritt näher zum Gegenstand machen wir, wenn wir von der Ereignisfolge zu der Folge der Merkmale übergehen. Ein jedes Ereignis bringt die Veränderung vieler Merkmale mit sich. Ein Ereignis ist ja nichts anderes als die Veränderung der Akzidentien eines Naturkörpers oder die Veränderung der gegenseitigen Beziehungen der Akzidentien mehrerer Naturkörper.

Den Übergang von einer Ereignisfolge zu einer Merkmalfolge bewerkstelligt nun *Dörge* dadurch, daß er eines der auftretenden Merkmale herausnimmt und untersucht, in welchen Einzelereignissen der Ereignisfolge es auftritt und in welcher nicht. *Dörge* führt zu den angeführten Ereignisfolgen eine kleine Auslese möglicher Merkmale an, die hier wiedergegeben seien: « Wir fragen einmal, ob die geborenen Kinder

[1] WfN., l. c.

Knaben oder Mädchen sind; dann welche Haar- und Augenfarbe sie haben. Beim Würfel können wir darauf achten, welche Augenzahl oben liegt oder auch ob diese Augenzahl gerade oder ungerade ist. Bei der Messung einer Strecke könnten wir entscheiden, ob die Messung bis auf den Fehler 1 die Länge 7 liefert, bei dem chemischen Versuch, ob die auftretende Höchsttemperatur hundert Grad überschreitet oder ob das Endprodukt eine bestimmte Farbe zeigt. Beim Schießen nach der Scheibe kann z. B. die geschossene Ringzahl, beim Roulette die gefallene Nummer, beim Ziehen von gefärbten Kugeln die Farbe der gezogenen Kugel und schließlich, im letzten Beispiel, die Summe der oben liegenden Augenzahlen für uns von Wichtigkeit sein. »[1]

Denken wir uns also jetzt eine beliebige Ereignisfolge, so können wir sie in symbolischer Schreibweise in folgender Form schreiben:

$$E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, \ldots \qquad (1)$$

wobei jedes Ereignis durch den Buchstaben E und den zugehörigen Index ausgedrückt ist, der die Stellung des Ereignisses in der Folge angibt. Jedes dieser Einzelereignisse weist eine große Anzahl von Merkmalen auf. Wir wählen der Einfachheit halber und in Übereinstimmung mit dem häufigen praktischen Gebrauch ein einziges Merkmal aus und bezeichnen es wiederum ganz allgemein mit dem Symbol X, was bedeuten soll, daß das Merkmal aufgetreten ist. Tritt das Merkmal in einem Ereignisse nicht auf, wollen wir dies durch die Negation des Symbols X ausdrücken, also durch $\overline{X}$.

Wir können nunmehr jedes Einzelereignis E_n der Folge (1) ersetzen durch das Merkmal X oder durch dessen Negation $\overline{X}$, je nachdem, ob an dem betreffenden Einzelereignis das Merkmal X auftritt oder nicht. Wir können dann auch die Negation $\overline{X}$ als ein Merkmal auffassen, indem durch dieses zum Ausdruck kommt, daß das betreffende Einzelereignis das Merkmal X entbehrt. Im Hinblick auf das Merkmal X können wir der Ereignisfolge (1) eine Merkmalfolge zuordnen, in welcher die X und die $\overline{X}$ in verschiedener Weise miteinander abwechseln, ein konkreter Fall kann z. B. folgende Merkmalfolge liefern:

$$X,X,\overline{X},\overline{X},\overline{X},X,X,X,\overline{X},X,\overline{X},X,\overline{X},\overline{X},X,\overline{X},X,X,X,\overline{X},\overline{X},\overline{X},X,\overline{X},X,X, \ldots \qquad (2)$$

Es entspricht also jedem Einzelereignis der Folge (1) ein Einzelmerkmal der Folge (2) und somit der ganzen Ereignisfolge (1) die ganze Merkmalfolge (2). Der Übergang von der Ereignisfolge zu der Merk-

[1] WfN., l. c.

malfolge ist durch eine eindeutige, experimentell festgelegte Zuordnung von (2) zu (1) gegeben, da im Experiment die Forderung erfüllt sein muß, daß jedes Einzelereignis zu einem eindeutig feststellbaren Merkmal führt.

Es erübrigt noch, die hier dargelegte Methodik des ersten Schrittes auf dem induktiven Wege *Dörges* seinsmäßig zu bewerten. Es gilt die Frage zu beantworten : Welche Seinsweisen berührt diese Methode auf dem Wege zur Merkmalfolge (2) ?

Auf seinem induktiven Wege geht *Dörge* von dem Ausgangsobjekte der Ereignisfolge aus. Die Ereignisfolgen setzen natürlich Naturkörper voraus, an denen oder zwischen denen die Ereignisse sich abspielen. Jedes Ereignis stellt philosophisch gesehen eine Veränderung dar. Das Ausgangsobjekt können wir also auch als eine Kette von Veränderungen, als eine Veränderungsfolge ansprechen. Die Veränderung als solche kann und ist nicht der Gegenstand der Beobachtung und der Erkenntnis. Bei der Veränderung wird ausdrücklich das Auftreten eines bestimmten qualitativen Elementes, des Merkmales erwartet. Dieses Element muß nicht ausdrücklich eine Sinnesqualität als solche bezeichnen ; es muß aber in irgendeiner Weise eine qualitative Seinsweise ausdrücken. Es können nämlich auch andere akzidentelle Seinsweisen als Gegenstand der Beobachtung auftreten, wie zum Beispiel die Quantitätsänderung oder die Ortsänderung. Daß die Quantität mit der Qualität im engsten Zusammenhang stehen, wissen wir aus der Schalenstruktur, wo die äußere qualitative Schale die quantitative Schale einschließt, was bei Thomas auch durch die Formulierung zum Ausdruck kommt, daß die Qualität in der Quantität verwurzelt ist, ut intelligatur de qualitate quae fundatur super quantitatem [1]. Aber ganz allgemein gilt für Veränderungsprozesse, daß sie im Gebiete der akzidentellen Seinsweisen die Qualität als Ziel der Veränderung haben, ebenso wie das Werden und die Vernichtung des Seinskernes die substanzielle Form zum Ziele hat : et quia motus denominatur a termino ad quem, ut in principio quinti dictum est, ipsum alterari, quia habet duos terminos, scilicet formam substantialem et qualitatem, dupliciter nominatur ; quia potest dici et alterari, et fieri et corrumpi [2]. Die qualitative Seinsweise bildet also die wohl begründete Grundlage des induktiven Erkenntnisprozesses der Naturwissenschaft.

[1] I Phys. l. 3, n. 4.
[2] VI Phys. l. 8, n. 14.

Allerdings müssen wir hier die Feststellung treffen, daß der Naturkörper als Ausgangspunkt für das Ereignis bei *Dörge* ebensowenig wie in der übrigen statistischen Literatur näher in Erwägung gezogen wird. Diesem Tatbestand Rechnung tragend, sollte noch ausdrücklich festgestellt werden, daß die qualitative Seinsweise des Merkmals in der Wahrscheinlichkeitstheorie als das Ergebnis eines selbständig aufgefaßten Veränderungsprozesses auftritt. In diesem Sinne werden bei der Beobachtung alle anderen Umstände, besonders aber alle anderen qualitativen Elemente außer dem einen ausgewählten Merkmal, außer acht gelassen. Wir können also die Bewertung von Ereignis- und Merkmalfolge mit folgender Feststellung abschließen:

Vom Ausgangsobjekte der Ereignisfolge, welches ohne näheres Eingehen auf die ihm zugrundeliegenden Veränderungen an und zwischen Naturkörpern einfach als Tatsache angenommen wird, gelangt Dörge auf seinem induktiven Wege mit dem ersten Schritte durch Einstellung des Beobachtungsmerkmales auf ein bestimmtes qualitatives Element, das Merkmal, eindeutig zu einer Merkmalfolge, die die qualitative Grundlage des induktiven Erkenntnisprozesses der statistischen Methode darstellt.

Wenn wir dann noch in philosophischer Ausdrucksweise das Ereignis der Veränderung gleichsetzen, das Merkmal aber dem qualitativen Abschluß der Veränderung, so können wir dementsprechend die beiden Folgen durch folgenden Satz charakterisieren:

Der Übergang von der Ereignisfolge zur Merkmalfolge stellt einen Übergang von einer Folge der Veränderungen zu der Folge ihrer qualitativen Abschlüsse dar.

13. Die Häufigkeitsfolgen und die Merkmalfülle des Experimentes

In Verfolgung der experimentalen Linie erscheint es notwendig, noch einmal zum Ausgangsobjekt des *Dörge*schen induktiven Weges zurückzukehren. Wir müssen uns nämlich bewußt werden, daß eine beliebige Auswertung des experimentell gegebenen Ausgangsobjektes für die Einhaltung der empirischen Linie im thomistischen Sinne keineswegs genügt. Vielmehr ist es notwendig, daß der gesamte Reichtum, der uns in einem Experiment gegeben ist, daß uns, anders ausgedrückt, die Fülle des Experimentes im Verlaufe der weiteren Auswertung erhalten bleibt. *Dörge* geht zwar richtig von den experimentell gegebenen Ereignisfolgen als seinen Ausgangsobjekten aus; aber im weiteren

bedeutet der nächste Schritt des Überganges von der Ereignisfolge zur Merkmalfolge eine sichtliche Einengung der Fülle des Experimentes. *Dörges* Übergang ist zwar im Einklang mit der experimentellen Praxis, die sich bei einem bestimmten Experimente immer auf ein einzelnes Merkmal, höchstens aber auf einige wenige Merkmale beschränkt, die Fülle des Experimentes aber ansonsten mit Absicht übergeht. Diese experimentelle Praxis erklärt die *Tatsache, daß hier eine Einengung von der Fülle des Experimentes auf dasjenige vollzogen wird, was einen Bezug zum Merkmal hat, daß also eine Einengung von der Fülle des Experimentes zur bloßen Merkmalfülle des Experimentes in der* Dörge*schen Theorie vorliegt.* Indem wir diese Einengung zur Kenntnis nehmen, beschränken wir uns also im weiteren Verlaufe unserer Untersuchung auf die Frage, inwieweit wenigstens diese Merkmalfülle des Experimentes im Verlaufe des induktiven Weges bei *Dörge* erhalten bleibt.

Um das Ziel einer mathematischen Theorie zu erreichen, muß nun *Dörge* den Übergang von der qualitativen Merkmalfolge zu einer quantitativen Ausdrucksweise herstellen. Dasselbe Problem hatte natürlich bereits *v. Mises* zu lösen. Dieser wählte die etwas willkürliche Festsetzung, daß das Auftreten des Merkmals durch die Zahl « 1 », das Nichtauftreten hingegen durch die Zahl « 0 » ausgedrückt werde. *Dörge* ordnet einer Merkmalfolge eine Zahlenfolge durch folgende Vorschrift zu: Jedem Gliede der Merkmalfolge entspreche diejenige Zahl, die angibt, wie oft bisher im Verlaufe der Folge das Merkmal aufgetreten ist. Die so einem bestimmten Gliede zugeordnete Zahl drückt ohne Beziehung zu anderen Umständen, also absolut die Zahl der Merkmalauftritte aus, die vom Anfange der Folge bis einschließlich zu dem besprochenen Gliede vorliegen. Wir nennen deshalb diese Zahlen auch die absoluten Häufigkeiten für das Auftreten des ausgewählten Merkmals in der ursprünglichen Ereignisfolge. Nach dieser Zuordnungsvorschrift geht die zufällig gewählte Merkmalfolge (2) in die nachstehende Folge der absoluten Häufigkeiten über:

$$1,2,2,2,2,3,4,5,5,6,6,7,7,7,8,8,9,10,11,11,11,11,12,12,13,14, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Mathematisch ist die Zuordnung von (2) zu (3) eindeutig festgelegt. Es bleibt jetzt noch festzustellen, ob auch die Merkmalfülle der Merkmalfolge (2) durch den Übergang zu der quantitativen Folge (3) nicht beeinträchtigt wird. Um das festzustellen, müssen wir uns vorerst sagen, worin denn eigentlich die Merkmalfülle der Merkmalfolge (2) überhaupt besteht. Wir sehen leicht ein, daß in der Merkmalfolge nicht

mehr und nicht weniger festgehalten ist, als wie das abwechselnde Auftreten und Nichtauftreten des Merkmals, oder wie wir kurz zu sagen pflegen, die abwechselnde Folge von Merkmal und Nichtmerkmal. Aus dieser Folge können wir nun ablesen, wie häufig das Merkmal aufgetreten ist, und das kommt dann eben durch die absolute Häufigkeit zum Ausdruck. Außerdem können wir aber aus dem Wechsel der Folge auch feststellen, wie sich die Merkmale auf die Folge verteilen. Wenn wir nämlich die Folge als Einheit auffassen, dann können wir in dieser Einheit eben die Verteilungsstruktur der Merkmale auf die einzelnen Stellen der Folge feststellen. Diese Verteilung gehört auch zu der Merkmalfülle und darf in der Folge der absoluten Häufigkeiten nicht verloren gehen, wenn wir die experimentelle Linie einhalten wollen. Es ist nun unschwer einzusehen, daß diese Verteilung auch in der quantitativen Folge der absoluten Häufigkeiten erhalten bleibt. Wir müssen nur die Sprache der Zahlen zu lesen verstehen. Die Zahl « 1 » an der ersten Stelle des zufälligen Beispieles einer Häufigkeitsfolge (3) bedeutet, daß die entsprechende ursprüngliche Merkmalfolge mit einem Merkmal beginnt. Wäre dies nicht der Fall, begänne sie also mit einem Nichtmerkmal, dann käme in der absoluten Häufigkeitsfolge an erster Stelle eine « Null » zu stehen. Jede weitere Stelle der Folge, die eine Erhöhung der Häufigkeitszahl gegen die vorhergehende Häufigkeitszahl aufweist, dokumentiert wieder das Auftreten des Merkmals. Und diejenigen Stellen, die gegen die vorhergehende nicht erhöht sind, dokumentieren Ereignisse ohne Merkmalauftritt, also Nichtmerkmale der Merkmalfolge. Die Verteilung bleibt also auch beim Übergang zu der quantitativen Folge erhalten. Damit ist aber bereits die ganze Merkmalfülle der Merkmalfolge und damit auch des Experimentes in Bezug auf das ausgewählte Merkmal erschöpft. Denn mehr als die Häufigkeit des Auftretens des Merkmals und dessen Verteilung in der Folge ist in der Merkmalfülle nicht enthalten. Wir stellen also fest : *Die qualitative Merkmalfolge geht unter Beibehalten der Merkmalfülle des Experimentes eindeutig in die quantitative Folge der absoluten Häufigkeiten über.*

Die Folge der absoluten Häufigkeiten kann als qualitative Folge bereits mathematisch behandelt werden. Da aber diese Zahlenfolge eine nicht fallende Folge ist, da sie also im allgemeinen mit wachsender Gliederzahl weiter und weiter ansteigt, ja bei unendlicher Gliederzahl alle Grenzen zu übersteigen vermag, so ist sie für mathematische Operationen nicht ohne weitere Festsetzungen geeignet. Deshalb wählt *Dörge* im Einklang mit *v. Mises* einen weiteren Übergang von der Folge der

absoluten Häufigkeiten zu einer neuen Folge, die er durch folgende Zuordnungsvorschrift festlegt: Jedes Glied der Folge der absoluten Häufigkeiten wird als Zähler eines Bruches aufgefaßt, dessen Nenner die Ordnungszahl des betreffenden Gliedes in der Folge ist. Wir brauchen also bloß unter die einzelnen Glieder der absoluten Häufigkeitsfolge ihre Ordnungszahl als Nenner zu setzen und der Übergang ist verwirklicht. Unser Beispiel einer absoluten Häufigkeitsfolge (3) geht dann über in die Folge

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{6}, \frac{4}{7}, \frac{5}{8}, \frac{5}{9}, \frac{6}{10}, \frac{6}{11}, \frac{7}{12}, \frac{7}{13}, \frac{7}{14}, \frac{8}{15}, \frac{8}{16}, \frac{9}{17}, \frac{10}{18}, \frac{11}{19}, \frac{11}{20}, \frac{11}{21}, \frac{11}{22}, \frac{12}{23}, \frac{12}{24}, \frac{13}{25}, \frac{14}{26}, \ldots \tag{4}$$

Dadurch ist die Häufigkeit in Relation gebracht zu der Ordnungsnummer, also zu der Stellung in der Folge, weshalb wir von einer Folge der relativen Häufigkeiten sprechen. Daß diese Folge im Hinblick auf die Zähler der Brüche die absolute Häufigkeitsfolge und mit ihr auch die Merkmalfülle wiedergibt, ist ohne weiteres klar. Wir haben hier im gewissen Sinne eine noch bessere unmittelbare Einsicht in das Verhältnis zwischen dem Auftreten des Merkmals und der durch ein bestimmtes Glied abgetrennten Teilfolge. Man kann die Abtrennung einer Teilfolge durch ein bestimmtes Glied vollziehen und dabei diese Teilfolge als Gesamtheit durch dieses letzte Glied charakterisieren. Wenn wir z. B. die ersten 24 Glieder der Folge (4) als Teilfolge abtrennen, dann besagt uns das Endglied, die sogenannte Endrelativhäufigkeit dieser endlichen Folge, nämlich der Bruch $\frac{12}{24}$, daß in dieser Teilfolge 24 Glieder enthalten sind, wovon 12 das Merkmal aufweisen. Diese Charakteristik einer ganzen Folge durch eine einzige Zahl ist für die mathematische Bearbeitung sehr verlockend. Sie vereinfacht die mathematische Behandlung. Diesem Vorteile steht der philosophische Einwand entgegen, daß durch eine solche charakteristische Zahl zwar die Häufigkeit festgehalten wird, ja sogar die relative Häufigkeit, daß aber über die Verteilungsstruktur des Merkmals in der Folge nichts in eine solche charakteristische Zahl, wie sie z. B. die Endrelativhäufigkeit darstellt, eingeht. Die Erhaltung der Merkmalfülle erfordert unbedingt die Beibehaltung der ganzen Folge. Wenn wir die empirische Linie einhalten wollen, muß aus dieser Erkenntnis die Mathematik die Konsequenzen ziehen.

Eine gewisse Schwierigkeit liegt übrigens für die philosophische Interpretation bereits in der Ausdrucksweise durch Brüche vor. Es ist zum Beispiel eine weitere Bearbeitung der Folge der relativen Häufig-

keiten (4) dadurch möglich, daß die Brüche so weit als möglich gekürzt werden. Von dieser Bearbeitung bleiben dann bloß diejenigen Brüche unberührt, die teilerfremde Zähler und Nenner besitzen; alle anderen erfahren aber eine formale Abänderung, und die Folge (4) geht über in die Folge

$$1, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{5}{8}, \frac{5}{9}, \frac{3}{5}, \frac{6}{11}, \frac{7}{12}, \frac{7}{13}, \frac{1}{2}, \frac{8}{15}, \frac{1}{2}, \frac{9}{17}, \frac{5}{9}, \frac{11}{19}, \frac{11}{20}, \frac{11}{21}, \frac{1}{2}, \frac{12}{23}, \frac{1}{2}, \frac{13}{25}, \frac{7}{13}, \ldots\ldots\ldots \tag{5}$$

In diesem Falle ergibt erst die selbstverständlich mögliche Rekonstruktion der ursprünglichen Folge (4) den Aufschluß über die Verteilung der Merkmale. Die Verteilung der Merkmale in dieser Folge ist also verdunkelt, immerhin aber noch prinzipiell erkennbar.

Noch weniger durchsichtig wird die Verteilung, wenn wir von der Ausdrucksweise durch allgemeine Brüche zur speziellen Ausdrucksweise durch Dezimalbrüche übergehen, wie dies in der statistischen Praxis die Regel ist. Hier müssen wir bereits eine gewisse Ungenauigkeit mit in Kauf nehmen, da die unendlichen Dezimalbrüche natürlich als solche bloß mit endlicher Stellenzahl angeschrieben werden können. Bei fünf Dezimalstellen ergäbe sich aus der Folge (5) die nachstehende, tatsächlich bereits sehr wenig übersichtliche Folge:

1,00000;	1,00000;	0,66666;	0,50000;	0,40000;	0,50000;	
0,57140;	0,72500;	0,55555;	0,60000;	0,54545;	0,58331;	(6)
0,53844;	0,50000;	0,53328;	0,50000;	0,52938;	0,55555;	
0,57894;	0,55000;	0,52380;	0,50000;	0,52173;	0,50000;	

Natürlich ist es auch mit Hilfe dieser Folge möglich, durch Vergleich der einzelnen Zahlenwerte die Verteilung herauszuschälen.

Bei jeder mathematischen Bearbeitung der quantitativen Häufigkeitsfolgen bleibt ausschlaggebend für die Erhaltung des qualitativen Elementes der Verteilung, daß die Folge als Gesamtheit erhalten bleibt, daß einzelne Glieder weder herausgegriffen noch mit anderen verwechselt werden. Die Unmittelbarkeit der philosophischen Einsicht ist eine zufällige und keine wesentliche Forderung und braucht keine Berücksichtigung bei der mathematischen Bearbeitung zu finden. Die Erhaltung der Verteilung ist hingegen eine wesentliche Forderung des philosophischen Gesichtspunktes und muß darum wiederum von der mathematischen Seite berücksichtigt werden.

Zusammenfassend können wir über die Häufigkeitsfolgen folgenden Satz aussprechen:

Der Übergang von der qualitativen Merkmalfolge zu den verschiedenen

quantitativen Häufigkeitsfolgen ist im Hinblick auf die Erhaltung der Merkmalfülle des Experimentes nur unter der Bedingung zulässig, daß die Folge als einheitliche Gesamtheit behandelt wird, die weder einen Stellenwechsel der Glieder untereinander noch ein Herausgreifen einzelner Glieder gestattet.

14. Der kritische Übergang zum Grenzwert

Der letzte Schritt auf dem induktiven Wege zum Subjekte der Wahrscheinlichkeitsrechnung, nämlich zu dem Begriffe der Wahrscheinlichkeit, verwirklicht *Dörge* durch den Übergang von der Folge der relativen Häufigkeiten zu dem Grenzwert, dessen mathematisch hier nicht nachweisbare Existenz er im gegebenen Falle einfach voraussetzt, und dieser Grenzwert ist dann die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines bestimmten Merkmales in der Ereignisfolge. In seiner Definition der Wahrscheinlichkeit durchläuft er tatsächlich noch einmal den gesamten bisher zurückgelegten Weg und sagt wörtlich:

« Es sei F eine Folge von Ereignissen: E_1, E_2, ... und X bedeute ein Merkmal dieser Ereignisfolge F. Dann gehört zu F die Folge der relativen Häufigkeiten $\rho_n(X)$ für das Merkmal X: $\rho_1(X)$, $\rho_2(X)$, ... Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Merkmals X in der Ereignisfolge ist dann der Grenzwert der Folge der relativen Häufigkeiten $\rho_n(X)$ für das Merkmal X, falls dieser Grenzwert vorhanden ist. »[1]

v. Mises wählte einen anderen Weg beim Aufbau der Folgen der relativen Häufigkeiten als *Dörge*. Wir konnten diesen Weg als widerspruchsvoll nicht annehmen. Aber war für *v. Mises* einmal die Folge der relativen Häufigkeiten gegeben, das will sagen, hatte er gegen bestimmte empirische relative Häufigkeitsfolgen keine Einwände von Seiten seines Regellosigkeitsprinzipes, dann war der Übergang von der relativen Häufigkeitsfolge zum Grenzwert derselbe, wie ihn *Dörge* vorschreibt. Deshalb können wir bei der Besprechung des *Dörge*schen Grenzwertüberganges auf die Feststellungen zurückgreifen, die wir dort erarbeitet haben und die wir nun ein wenig vertiefen wollen.

Diese Feststellungen betrafen die Forderung, daß die Folge der relativen Häufigkeiten unendlich zu denken sei und die weitere Forderung, daß diese unendliche Folge durch eine einzige Zahl, den Grenzwert zu ersetzen sei. Unsere Feststellungen drückten bei der *Mises*-

[1] WfN., S. 21.

schen Theorie gewisse Vorbehalte in betreff dieser Forderungen aus. Diese werden nunmehr eingehender zu formulieren sein.

Dörge fordert ebenso wie *v. Mises*, daß die Folge der relativen Häufigkeiten unendlich gedacht werde. Es ist dies eine mathematische Rücksichtnahme, denn der Übergang zum Grenzwert soll hier wie bei *v. Mises* nach dem Muster der unendlichen konvergenten Reihen vollzogen werden. In naturwissenschaftlicher Hinsicht ist natürlich sofort der ganze induktive Weg in Mitleidenschaft gezogen. Denn wenn wir die Unendlichkeit der relativen Häufigkeitsfolgen zulassen, müssen wir folgerichtig dasselbe auch für die Folgen der absoluten Häufigkeiten zugeben; dann aber müssen wir ebenso die Merkmalfolge und letzten Endes auch die Folge der Ereignisse unendlich denken. Indem wir so mit der Unendlichkeitsforderung bei der Natur angelangt sind, ist es notwendig festzustellen, ob der Unendlichkeitscharakter der Folge einen Charakterzug der Natur wiedergibt oder ob wir nicht einen naturfremden Zug in unsere Naturauffassung hineintragen.

Die Ereignisfolge spielt in unseren Erwägungen die Rolle einer Einheit, da sie durch eine bestimmte Versuchsanordnung gegeben ist, da in ihr die einzelnen Ereignisse eine bestimmte Reihenfolge haben, da wir von den Eigenschaften der Folge, so zum Beispiel von der Häufigkeit der in ihr auftretenden Merkmale sprechen, dann wieder von der Verteilung der Merkmale und schließlich deshalb, weil wir keines ihrer Glieder auslassen oder umstellen dürfen, ohne den Charakter der Folge zu verändern. Aus diesem Grunde sprechen wir einfach von einem einzigen Ausgangsobjekte, dem Ausgangsobjekte der Ereignisfolge.

Wie ist nun dieses Ausgangsobjekt beschaffen? Ist die Folge etwas Aktuales oder bloß etwas Mögliches, ist sie endlich oder unendlich? Wir wissen, daß die verwirklichten Einzelereignisse immer in bloß endlicher Anzahl vorliegen; andererseits wissen wir aber, daß die Versuchsanordnung eine immer weiter gehende Anreihung weiterer Einzelereignisse ermöglicht, daß also die möglichen Ereignisse in unendlicher Anzahl in der Folge mitbedingt sind. Wenn wir uns nun die verwirklichten Ereignisglieder und die unendlich vielen möglichen Ereignisglieder in der einen Folge zusammengestellt denken, dann können wir auf diese Weise behaupten, daß in der Folge das Unendliche gleichzeitig möglich und gleichzeitig verwirklicht sei: et hoc modo dicitur infinitum esse simul et in potentia et in actu. Denn alle Gegenstände von der Art der Folge sind gleichzeitig möglich in Bezug auf einen Teil, verwirklicht aber in Bezug auf den anderen Teil: omnia

huiusmodi simul sunt in potentia quantum ad unam partem, et in actu quantum ad aliam [1]. Sind wir uns nur dieser Zweiteilung der Folge wohl bewußt, so können wir, ohne die empirische Linie zu verletzen, die Unendlichkeitsforderung als berechtigt zulassen. Wir müssen allerdings ständig darauf bedacht sein, daß diese Folge im Laufe der weiteren formalen Behandlung nicht unversehens als etwas in seinem ganzen Ausmaß Verwirklichtes angesehen wird. Das wäre mit dem soeben erkannten Wesen der Folge im Widerspruch.

Wir stellen also fest: *Die* Dörge*sche Forderung der unbeschränkten Fortsetzbarkeit der Ereignisfolge und damit der Häufigkeitsfolge ist experimentell durch die Stabilität der Versuchsbedingungen begründet und findet ihre begriffliche Rechtfertigung in der aus einem verwirklichten und aus einem möglichen Teile zusammengesetzten unendlichen Folge.*

Diese unendliche Folge soll nun durch eine einzige Zahl charakterisiert werden, durch den sogenannten Grenzwert. Es soll dies eine Zahl sein, die in engster Verbindung mit der Folge steht und die sich eindeutig aus der Folge ergibt. Wir hörten bereits bei der Besprechung des *Mises*schen Grenzwertüberganges, daß eine solche Zahl niemals in dem Maße eindeutig der Folge entsprechen kann, wie dies bei den konvergenten unendlichen Reihen der Mathematik mit ihren Grenzwerten der Fall ist. In der mathematischen unendlichen Reihe sind im Prinzipe alle Glieder durch das allgemeine n-te Glied gegeben, da dieses eine Konstruktionsvorschrift für jedes beliebige Glied darstellt. Wir können durch Einsetzen einer bestimmten Ordnungszahl für das n im allgemeinen Gliede das betreffende Glied sofort berechnen und anschreiben. Es ist z. B. möglich, unmittelbar das millionte Glied anzuschreiben, ohne daß die vorhergehenden 999 999 Glieder berechnet oder angeschrieben sind. Dies ist bei einer empirisch begründeten Häufigkeitsfolge nicht möglich. Hier muß schrittweise durch Fortsetzung des Experimentes jedes Einzelereignis verwirklicht werden. Jedes Einzelereignis hat, einmal verwirklicht, seinen bestimmten Merkmalcharakter und seine bestimmte Stelle in der Folge. Dagegen hat ein bloß mögliches, also noch nicht verwirklichtes Ereignis noch keinen Merkmalcharakter, keine konkreten Eigenschaften; wir können es auf keine Weise charakterisieren. Wir können über dieses Glied keine Voraussetzungen machen; das n-te Glied der empirischen Folge ist uns einfach nicht bekannt.

[1] III Phys. l. 10, n. 4.

Da die mathematische Berechnung eines solchen Grenzwertes nicht vorliegt und da gleichzeitig die Praxis die Operationen mit einem solchen Grenzwert sehr vorteilhaft erscheinen läßt, so benützt *Dörge* die bekannte Wendung, daß er die Existenz eines solchen Grenzwertes einfach voraussetzt.

Es erübrigt nunmehr die Frage, was denn eigentlich durch diese Voraussetzung gesetzt wird oder mit anderen Worten, welches die Fülle dieser charakteristischen Zahl ist, die wir als Grenzwert der unendlichen Folge bezeichnen.

Was ist also der Grenzwert ? Eine Zahl, ein Bruch, herausgegriffen aus der untersuchten Folge oder wenigstens ein Bruch aus der Nähe der die Folge bildenden Brüche. Bildlich gesprochen ist es die Zahl, um die sich die bisher verwirklichten Brüche scharen. Mathematisch gesprochen ist es diejenige Zahl, in deren kleinster Umgebung sich die überwiegende Mehrzahl der verwirklichten Brüche befindet. Und wenn wir die möglichen Glieder hinzunehmen wollen, dann ist der Grenzwert die Zahl, in deren kleinster Umgebung sich unendlich viele Zahlen der Folge befinden. Ob wir nun bloß die verwirklichten Glieder oder alle, also auch die bloß möglichen Glieder im Auge haben, der Grenzwert kann nichts anderes als eine Zahl darstellen, die gegebenenfalls die gegebene Häufigkeit eines bestimmten Merkmals repräsentiert, die aber in keinem Zusammenhange mit der Verteilung als einem wesentlichen Bestandteil der Merkmalfülle steht. Der Grenzwert erfaßt also bloß einen Teil der Merkmalfülle, und wenn er nicht weiter ergänzt oder irgendwie erweitert wird, so geht der andere Teil der Merkmalfülle, die Verteilung für die auf einem derartigen Grenzwert aufgebaute naturwissenschaftliche Theorie verloren.

Dörge ergänzt nun in keiner Weise den Grenzwertbegriff ; er erweitert ihn auch nicht ; er definiert ihn vielmehr als die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des betrachteten Merkmales ohne jede weiteren Zusätze. *Wir müssen also feststellen, daß der* Dörge*sche Wahrscheinlichkeitsbegriff die Forderung nach der Erhaltung der Merkmalfülle und damit die empirische Linie verletzt.*

Da der Wahrscheinlichkeitsbegriff gleichzeitig als wesentlicher Bestandteil in das Subjekt der *Dörge*schen Wahrscheinlichkeitsrechnung eingeht, so *gilt für die hier besprochene* Dörge*sche Wahrscheinlichkeitstheorie, daß sie in Vernachlässigung der Merkmalfülle des Experimentes nicht das geeignete Mittel darstellt, die in den Ereignisfolgen enthaltene Fülle des Experimentes zu erfassen und zu ordnen.*

Der Dörge*sche Versuch,* der selbstverständlich eine andere Problematik als die unserer empirischen Linie vor Augen hatte, *ist von unserem Standpunkte aus in dem Sinne zu werten, daß es ihm in Verfolgung einer recht allgemein angelegten Auffassung der Statistik gelungen ist, die empirische Linie bis zu der Folge der relativen Häufigkeiten auszuarbeiten, daß er aber hier an dem kritischen Punkte angelangt ist, wo er von der empirischen Linie zu dem in seiner Merkmalfülle zu engen Begriffe des Grenzwertes abweicht.*

Aus dem Umstande, daß die vorliegende Kritik des Grundbegriffes der Statistik einen unnatürlich verlassenen empirisch-induktiven Weg beim Aufbau des Wahrscheinlichkeitsbegriffes aufgewiesen hat, ergibt sich für uns *folgende weitere Aufgabenstellung:*

Der *Dörge*sche induktive Weg vermag unter allen bestehenden Wahrscheinlichkeitstheorien, eingerechnet auch die hier nicht ausführlich besprochenen, da empirisch noch schwächer orientierten Theorien, den empirischen Weg am weitesten zu verfolgen. Es ist daher angezeigt, den Faden vom kritischen Wendepunkt der Folge der Häufigkeiten aufzunehmen und zu versuchen, den Begriff der Wahrscheinlichkeit derart zu verallgemeinern, daß er nicht nur die Häufigkeit als solche, sondern auch die Verteilungen der Merkmale, also die gesamte Merkmalfülle des Experimentes zu erfassen imstande ist. Erst ein derart verallgemeinerter Wahrscheinlichkeitsbegriff als Subjekt einer statistischen Naturerfassung wird die notwendigen Voraussetzungen haben, die statistische Gesetzmäßigkeit in der Natur in konsequenter Verfolgung der experimentell und philosophisch unbedingt notwendigen empirischen Linie systematisch aufzubauen.