Zeitschrift: Divus Thomas

Band: 25 (1947)

Heft: 4

Artikel: Die Wahrscheinlichkeit als Grenzwert der relativen Häufigkeiten : Kritik des Grundbegriffes der Statistik

Autor: Pavelka, Artur

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-762409

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Die Wahrscheinlichkeit als Grenzwert der relativen Häufigkeiten

Kritik des Grundbegriffes der Statistik

Von RN Dr. Artur PAVELKA, Prag

1. Komplementarität und statistischer Zusammenhang

Gesetze, die bloß statistische Zusammenhänge bestimmter Naturvorgänge und Zustände zum Ausdruck bringen, machen den Eindruck einer Auflockerung des klassischen Gesetzesbegriffes, der in seiner absoluten Genauigkeit und exakten Gültigkeit das Ideal einer mathematisch begründeten Naturwissenschaft darstellte. Nur schweren Herzens haben sich die einzelnen Forscher von der Gedankenwelt der klassischen Physik losgesagt, und auch dies geschah bloß schrittweise und immer nur da, wo es unumgänglich notwendig war. Es erforderte die gewaltigen Leistungen eines *de Broglie*, um den Begriff der Materiewellen zu prägen, der jeder Materie Wellen zuordnet, wie dies das Experiment auch tatsächlich bestätigte [1]. *Heisenberg* mußte eine neue Mechanik, die Matrizenmechanik aufstellen, die dann mit einem speziellen mathematischen Apparat das ganze Gebiet der Atomphysik zu bearbeiten vermochte [2]. Der durch die Matrizenmechanik drohende radikale Bruch mit der klassischen Physik wurde unmittelbar nach dem Erscheinen der Matrizenmechanik durch die Quantentheorie *Schrödingers* gemildert, die gewisse Zusammenhänge mit der klassischen Physik aufweist und durch die allgemeine wellenmechanische Differentialgleichung auch formal klassische Wege verfolgt. Allerdings hat sich auch in dieser wichtigen Gleichung die Notwendigkeit einer statistischen Interpretation ergeben, sodaß sie in keiner Weise als eine Abwendung von der statistischen Ausdrucksweise gelten darf [3]. Am deutlichsten tritt die Tragweite der begrifflichen Umwälzungen aber an der Leistung

[1] *Louis de Broglie*, Ann. d. phys. (10) 3, 22, 1925.
[2] *Werner Heisenberg*, Zeitschr. f. Phys. 33, 879, 1925.
[3] *Erwin Schrödinger*, Abhandlungen zur Wellenmechanik. Leipzig 1927.

des Vaters der Quantentheorie zu Tage. *Niels Bohr* war es, der bereits im Jahre 1913 seine erste Formulierung quantentheoretischer Gedankengänge veröffentlichte und der bereits drei Jahre später imstande war, die Trennungslinie zwischen klassischer und quantentheoretischer Begriffsbildung durch sein Korrespondenzprinzip zu formulieren [1]. Ebenso, wie sich aus dem Korrespondenzbegriff, als dem ersten Versuch eines rein quantentheoretischen Gesetzes die weitere Entwicklung der Quantentheorie durch die oben angeführten Forscher ergab, hat *Bohr* auch das Verdienst, die erste Phase der Entwicklung der neuen Quantentheorie durch die Prägung des Begriffes der Komplementarität gekrönt zu haben [2]. *Bohr* arbeitet bewußt mit klassischen Begriffen und stellt deren Unverträglichkeit im Gebiete der Atomwelt in bestimmten Fällen fest. Wenn dann die Benutzbarkeit *eines* klassischen Begriffes in einem ausschließlichen Verhältnis zu der eines *anderen* steht, nennen wir diese beiden Begriffe *komplementär* [3]. In diesem Begriffe der Komplementarität ist die ganze Problematik der Quantentheorie verborgen, und *Pauli* ist geneigt, die moderne Quantentheorie in Analogie zur « Relativitätstheorie » sachlich als eine « Komplementaritätstheorie » zu bezeichnen [3]. *Heisenberg* gelangt dann in seinen allgemeinen Erwägungen über die Quantentheorie zu der Feststellung, daß die Beschreibung des Naturgeschehens in Raum und Zeit auf der einen Seite und die Beschreibung des Naturgeschehens in seinem kausalen Zusammenhange auf der anderen Seite zwei komplementäre Auffassungsweisen des Naturgeschehens darstellen, die in der klassischen Physik miteinander verträglich waren, in der Quantentheorie aber einander gegenseitig ausschließen. Eine Überbrückung beider Auffassungsweisen der Natur, nämlich der Raum-Zeitbeschreibung und der kausalen Beschreibung ist einzig durch statistische Zusammenhänge gegeben. So wird das statistische Naturgesetz zum Ausdruck der von der Quantentheorie festgestellten Unstimmigkeiten in der auf das atomare Gebiet angewandten Begriffswelt der klassischen Physik.

Einen aufschlußreichen Einblick in die hier angedeutete Problematik der Komplementarität und ihre Lösung durch das statistische Naturgesetz gibt uns *Heisenberg*, dessen diesbezüglichen Ausführungen hier wörtlich wiedergegeben seien :

« Die Welt der aus der täglichen Erfahrung stammenden Begriffe

[1] *N. Bohr*, Phil. Mag. 26, 1, 1913.
[2] *N. Bohr*, Atomtheorie und Naturbeschreibung. Berlin 1931.
[3] Handbuch der Physik, XXIV/1, *W. Pauli*, 89. Berlin 1933.

ist zum ersten Male verlassen worden in der Einsteinschen Relativitätstheorie. Dort stellte sich heraus, daß man die gewöhnlichen Begriffe nur anwenden kann auf Vorgänge, in denen die Geschwindigkeit der Lichtfortpflanzung als praktisch unendlich angesehen werden kann. Das durch die moderne Experimentalphysik verfeinerte Erfahrungsmaterial zwang also zu einer Revision der bisher überkommenen und zur Ausbildung neuer Begriffe ; aber unser Denken vermag sich nur langsam dem erweiterten Erfahrungsbereich und seiner Begriffswelt anzupassen, und daher erschien die Relativitätstheorie anfangs abstrakt und fremd. Wie aus dem bisher Gesagten hervorgeht, zwingen die Erfahrungen aus der Welt der Atome zu einem noch viel weiter gehenden Verzicht auf bisher gewohnte Begriffe. In der Tat beruht unsere gewöhnliche Naturbeschreibung und insbesondere der Gedanke der Trennung einer Gesetzmäßigkeit in den Vorgängen der Natur auf der Annahme, daß es möglich sei, Phänomene zu beobachten, ohne sie merklich zu beeinflussen. Einer bestimmten Wirkung eine bestimmte Ursache zuzuordnen hat nur dann einen Sinn, wenn wir Wirkung und Ursache beobachten können, ohne gleichzeitig in den Vorgang störend einzugreifen. Das Kausalgesetz in seiner klassischen Form kann also seinem Wesen nach nur für abgeschlossene Systeme definiert werden. In der Atomphysik ist aber im allgemeinen mit jeder Beobachtung eine endliche, bis zu einem gewissen Grade unkontrollierbare Störung verknüpft, wie dies in der Physik der prinzipiell kleinsten Einheiten auch von vornherein zu erwarten war. Da andererseits jede raumzeitliche Beschreibung eines physikalischen Vorganges durch die Beobachtung des Vorganges bedingt ist, so folgt, daß die raumzeitliche Beschreibung von Vorgängen einerseits und das klassische Kausalgesetz andererseits komplementäre, einander ausschließende Züge des physikalischen Geschehens darstellen. Dieser Sachlage entspricht in dem Formalismus der Theorie, daß zwar ein mathematisches Schema der Quantentheorie existiert, daß dieses Schema aber nicht als einfache Verknüpfung von Dingen in Raum und Zeit gedeutet werden kann. Durch diese Komplementarität der Raum-Zeitbeschreibung einerseits und der kausalen Verknüpfung andererseits tritt ferner eine eigenartige Unbestimmtheit des Begriffes « Beobachtung » auf, indem es der Willkür anheimgestellt bleibt, welche Gegenstände man zum beobachtenden System rechnen oder als Beobachtungsmittel betrachten soll. Im Formalismus der Theorie hat diese Willkür zur Folge, daß zur Deutung eines physikalischen Experimentes oft recht verschiedenartige Methoden benützt werden können, wofür später einige

Beispiele gegeben werden sollen. Aber selbst wenn man die genannte Willkür in Kauf nimmt, gehört der Begriff « Beobachtung » streng genommen der aus unserer täglichen Erfahrung entnommenen Ideenwelt an ; er kann auf atomare Erscheinungen nur übertragen werden, wenn man auf die in den Unbestimmtheitsrelationen angegebene Begrenzung aller raumzeitlichen Bilder achtet. Denn jede Beobachtung ist an Raum und Zeit per definitionem geknüpft ; also hat dieser Begriff seinen Sinn nur innerhalb der durch die Ungenauigkeitsrelationen angegebenen Schranken. Daß es spezielle Fälle gibt, in denen die Forderungen des klassischen Kausalgesetzes in gewisser Annäherung mit einer raumzeitlichen Beschreibung in Einklang gebracht werden können, wurde schon früher erwähnt. Im allgemeinen jedoch kann man die Sachlage etwa durch folgendes Schema charakterisieren :

Klassische Theorie	Quantentheorie	
	Entweder	Oder
Raum-Zeitbeschreibung	Raumbeschreibung	Mathematisches Schema nicht in Raum und Zeit
Kausalität	Unbestimmtheitsrelationen	Kausalität
	statistische Zusammenhänge	

Erst wenn man versucht, sich dieser grundlegenden Komplementarität von Raum-Zeitbeschreibung und Kausalität in der Begriffsbildung anzupassen, kann man die Widerspruchsfreiheit der quantentheoretischen Methoden (insbesondere der Interpretation der Transformationstheorie) beurteilen. Die Anpassung unseres Denkens und unserer Sprache an die Erfahrungen der Atomphysik ist allerdings, wie in der Relativitätstheorie, mit großen Schwierigkeiten verknüpft. In der Relativitätstheorie waren dieser Anpassung die philosophischen Diskussionen früherer Zeiten über die Probleme Raum und Zeit sehr förderlich. In ähnlicher Weise kann man in der Atomphysik Nutzen ziehen aus den für alle Erkenntnistheorie grundlegenden Diskussionen über die Schwierigkeiten, die mit der Trennung der Welt in Subjekt und Objekt verbunden sind. Manche Abstraktionen, die für die moderne theoretische Physik charakteristisch sind, findet man schon in der Philosophie vergangener Jahrhunderte besprochen. Während diese Abstraktionen

damals von dem nur auf Realitäten bedachten Naturwissenschaftler als Spiel der Gedanken abgelehnt werden konnten, zwingt uns heute die verfeinerte Experimentierkunst der modernen Physik dazu, sie eingehend zu diskutieren. »[1]

Im Anschluß an diese Ausführungen *Heisenbergs* können wir die Problematik der gegenwärtigen Physik in folgende Sätze zusammenfassen :

Die von der Quantentheorie aus der klassischen Physik übernommenen Begriffe führen in vielen Fällen zu einander ausschließenden Begriffen, den komplementären Begriffspaaren.

Die Verträglichkeit komplementärer Begriffspaare wird in der Quantentheorie durch die Abgrenzung ihres klassischen Gültigkeitsbereiches erreicht.

Der Zusammenhang zwischen komplementären Begriffen ist durch eine statistische Gesetzmäßigkeit ausgedrückt. Eine Gesetzmäßigkeit, die von der Physik als kausal bezeichnet wird und die der Gesetzmäßigkeit der klassischen Physik entspricht, liegt hier nicht vor.

Das statistische Naturgesetz ist also in der Auffassung der modernen Physik der einzige, formal mögliche Ausdruck für den Zusammenhang zwischen den komplementären Begriffen klassischen Ursprungs, aber beschränkter Gültigkeit.

2. Das aristotelische ἐπὶ τὸ πολύ

Auf den Physiker, der sich des schweren geistigen Ringens, welches die quantentheoretische Denkweise dem klassisch geschulten Forscher abfordert, voll bewußt ist, werden die einleitenden Worte zum fünften Kapitel des zweiten Buches der aristotelischen Physik den Eindruck eines aufrichtigen Staunens nicht verfehlen. Es heißt dort wörtlich : « Erstens nun, da wir sehen, daß einiges immer, anderes wenigstens meistenteils, in der nämlichen Weise geschieht, so ist es augenfällig, daß der Zufall oder das Zufällige als Ursache von keinem dieser beiden (weder des notwendig und immer Geschehenden, noch des meistenteils Geschehenden) genommen wird ; aber da es auch etwas gibt, was im Widerspruch mit diesen beiden geschieht, und von solchem alle sagen, es sei zufällig, so ist es augenfällig, daß der Zufall und das grundlos

[1] *W. Heisenberg*, Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie. Leipzig 1930.

von selbst Eintretende irgendetwas sind.»[1] Also keine Spur von einer klassischen, deterministisch gedeuteten Auffassungsweise der Natur, in der alles geschehen muß. Das ἐξ ἀνάγκης καὶ ἀεί, das immer und notwendig Geschehende ist hier keineswegs die einzige Art des Naturgeschehens, neben diesem kommt auch das ἐπὶ πολύ[2], das meistenteils Geschehende zur Geltung und schließlich auch noch das παρὰ ταῦτα, das außer diesen Geschehende, nämlich der Zufall und das grundlos von selbst Eintretende. Den Physiker interessiert hier die Anerkennung dessen, was bloß meistenteils geschieht oder was dem Zufall anheim gestellt ist; denn gerade so geartete Naturprozesse behandelt die Quantentheorie statistisch, da die kausale Erfassung der klassischen Physik nur die immer und notwendig auftretenden Ereignisse zu erfassen und zu verstehen imstande ist.

Also keineswegs die einfache Denkweise der klassischen Physik, sondern eine Vorwegnahme der statistischen Auffassung des Naturgeschehens vor zweieinhalb Jahrtausenden!

Wie viel Mühe kostet es den Forscher, sich nur von der Auffassung des Naturgesetzes der klassischen Physik frei zu machen. Hatte doch die klassische Physik ihre Differentialgleichungen, nach denen alles Geschehen bis ins kleinste Raum- und Zeitelement genau gefesselt war. Alles mußte mit Notwendigkeit eintreten. Geschah dies einmal nicht, dann wurde der Fehler in der Unvollkommenheit der physikalischen Erkenntnis, in der Unvollkommenheit der Theorie gesucht, nie aber wurde die Natur verdächtigt, sie könnte sich irgendwelche Ausnahmen aus dem immerwährenden Zwange leisten. Und eben dies behauptet das Wörtchen ἐπὶ πολύ; es genügt also nach *Aristoteles*, daß sich etwas meistenteils ereigne, und diese Häufigkeit des Auftretens ist bereits ein Kriterium der Naturverbundenheit des Ereignisses. Die Natur wird hier verantwortlich gemacht für die Auflockerung des zwangläufigen Geschehens; ja die Natur wird hier durch die häufig auftretenden Ereignisse direkt charakterisiert. Wer dächte da nicht sofort an die großen Wahrscheinlichkeiten der statistischen Gesetzmäßigkeit, die sich als Gesamtheiten klassisch-kausal verhalten. Das sind ja die *Heisenberg*schen statistischen Zusammenhänge, von denen wir soeben sprachen; die großen Wahrscheinlichkeiten der Statistik, also die mit großen Wahrscheinlichkeiten auftretenden Ereignisse verhalten sich auch nach

[1] Der deutsche Text ist der griechisch-deutschen Ausgabe entnommen: Aristoteles, Acht Bücher Physik, *Carl Prantl*. Leipzig 1854. S. 77.

[2] Nach *Didot* in der Leonina: ἐπὶ τὸ πολύ.

der Quantentheorie kausal im Sinne der klassischen Physik. Eben diese Ereignisse großer Wahrscheinlichkeiten werden durch das Kriterium ἐπὶ πολύ durch den Philosophen unter die Naturereignisse eingereiht.

Nicht genug daran, auch die kleinen Wahrscheinlichkeiten werden in Erwägung gezogen. Es sind dies die als zufällig bezeichneten Ereignisse. Auch diese finden ihre Eingliederung in das aristotelische Bild der Natur.

Man dächte, klassisch beeinflußt, daß *Aristoteles* die Lückenhaftigkeit bestimmter Naturabläufe hätte störend empfinden sollen, daß er in ihnen eine Unvollkommenheit der Natur hätte erblicken müssen. Man könnte auch erwarten, daß er den Versuch hätte machen können, diesen scheinbaren Schönheitsfehler in der Erfassung des Naturgeschehens zu überwinden. Nichts von all dem ist geschehen. *Aristoteles* konstatiert, daß es in der Natur einfach so zugeht, daß es also neben dem immer Eintretenden immer auch meistenteils Eintretendes und schließlich sogar zufällig Eintretendes gebe.

Es genügt aber keineswegs zu bemerken, daß er diese strukturelle Tatsache der Natur einfach zur Kenntnis genommen hatte ; er leistete viel mehr ; er vermochte diesen vielfältig unterschiedenen Tatsachenbestand in das einheitliche System seines philosophischen Weltbildes zu setzen, das in seinem gedanklichen Aufbau bis zum heutigen Tage nichts an Geschlossenheit eingebüßt hat. Wahrlich ein guter Grund für den Physiker, die aristotelische Gedankenwelt bei der Durchdringung der statistischen Gesetzmäßigkeit entsprechend zu würdigen.

Diese aristotelische Charakteristik des Naturgeschehens läßt uns schließen, daß in dem ἐπὶ πολύ als Bestandteil der Naturauffassung das aristotelische philosophische System die Lösung der Frage nach dem Wesen des statistischen Naturgesetzes wenigstens verhüllt enthalten muß.

3. Das thomistische FREQUENTER

In Aufnahme der aristotelischen Physik kommentiert St. Thomas das inhaltsreiche ἐπὶ τὸ πολύ und bringt es im lateinischen Gewande des Ausdruckes FREQUENTER mit derselben Ungezwungenheit und Selbstverständlichkeit, mit der er jeden einzelnen Satz des *Philosophen* behandelt. Er teilt mit *Aristoteles* die Geschehnisse in der Natur in drei Fälle ein, circa primum ponit tres divisiones [1]. Der erste Fall ist

[1] II Phys. l. 8, n. 2, satzweise kommt der ganze 2. Absatz zur Geltung, der mit den Worten « quae negavit fortunam » endet.

dadurch gegeben, daß bestimmte Ereignisse immer eintreten, quarum prima est, quod quaedam fiunt semper, und als Beispiel fügt er hinzu, ut ortus solis, also wie beim Sonnenaufgang. Der Sonnenaufgang ist eben ein Ereignis, welches die tägliche Erfahrung ohne jedwede Ausnahme bestätigt ; es stellt also eine bis dahin nie umgestoßene Erfahrungstatsache dar. Wissenschaftlich war diese Erfahrung durch die damalige astronomische Theorie über die Bewegung der Himmelskörper auch der Verstandeserkenntnis klar. Es stand also nichts im Wege, dieses Geschehnis, das ja in der Tat seit Thomas' Zeiten bis zum heutigen Tag die damalige Erfahrung nur erhärtet, als ein notwendiges und immer auftretendes Geschehen anzusehen.

Der zweite Fall ist dadurch gegeben, daß bestimmte Ereignisse gleichsam häufig eintreten, quaedam sicut frequenter, und als Beispiel wird hier ein Ereignis aus biologischem Gebiete herangezogen, ut quod homo nascatur oculatus, wie also zum Beispiel der Mensch mit Augen geboren wird. Wir würden uns ausdrücken, daß es sich um eine normale Menschengeburt handelt. Daß hier von bloßer Häufigkeit und keineswegs von einem immer und von einer Notwendigkeit die Rede ist, hängt wiederum mit der schon damals vorhandenen Erfahrung zusammen, daß ab und zu auch einmal eine Abnormalität, ein Mensch ohne Augen geboren wird, wie wir später zu hören bekommen. Dieser Fall des scheinbar lückenhaften Gesetzes macht Thomas nicht irre, entscheidend für ihn ist die Häufigkeit, welche genügt, das Geschehen der Natur zuzuschreiben. Wir würden heute unter gewissen Voraussetzungen von einer großen Wahrscheinlichkeit sprechen, daß ein normaler Mensch mit Augen geboren wird, womit unter anderem gesagt sein will, daß die Möglichkeit einer Fehlgeburt nicht ausgeschlossen wird.

Eine solche abnormale Geburt eines Menschen ohne Augen führt Thomas als Beispiel für den dritten Fall an, der sich von den beiden vorhergehenden klar unterscheidet : sed quaedam fiunt praeter haec ; es gibt Ereignisse, die sich den beiden ersten Fällen entziehen ; sie liegen außerhalb dieser beiden Fälle, was dann näher erklärt wird mit den Worten, idest ut in paucioribus, also dieser dritte Fall verwirklicht sich in der Minderzahl. Und das einmütige Urteil aller besagt, daß es sich in einem solchen Falle um einen Zufall handelt, et omnes dicunt, huiusmodi fieri a fortuna. Die kleine Anzahl der Geschehnisse deutet an, daß es sich hier um einen von den beiden vorhergehenden unterschiedenen Fall handelt, um den Zufall. Es ist also durch diesen Fall bewiesen, daß der Zufall etwas ist, unde manifestum est quod fortuna

aliquid est. Ausdrücklich wird dann der Zufall der kleineren Häufigkeit zugeteilt, cum esse a fortuna et esse in paucioribus convertantur, Zufall und kleinere Häufigkeit bedingen sich gegenseitig. Die kleine Häufigkeit also ist es, die die Ansicht widerlegt, daß der Zufall zu leugnen sei, et hoc inducit contra primam opinionem, quae negavit fortunam.

So wird der Begriff FREQUENTER als Ausdruck der Häufigkeit zum philosophischen Kriterium, nach dem alles Geschehen in der Natur einzuteilen sein wird.

4. Die Miesessche Häufigkeit

Mit einem bemerkenswerten Verständnis für den Häufigkeitsbegriff des *Aristoteles* leitet *Richard von Mises* sein Werk über die Wahrscheinlichkeitsrechnung ein, indem er sagt: « Erscheinungen, die wir heute mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung erfassen, wie das Würfelspiel, waren schon im Altertum bekannt. Einen bemerkenswerten Ansatz zur Begriffsbildung gibt gelegentlich *Aristoteles* mit den Worten: 'Das Wahrscheinliche ist etwas, was zumeist geschieht.' » Diese Stelle entnimmt *Mises* nicht der Physik des *Aristoteles*, sondern, wie er selbst angibt, der Ars rhetorica, A, 2, 1357 a 34: Τὸ μὲν γὰρ εἰκός ἐστιν ὡς ἐπὶ τὸ πολύ γιγνόμενον [1]. Die angeführte Stelle beweist, daß *Aristoteles* nicht nur den Begriff der Häufigkeit kannte, sondern daß er ihn direkt mit dem Begriff der Wahrscheinlichkeit in Zusammenhang zu bringen wußte.

Die historische Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes stand aber keineswegs im Zeichen des Häufigkeitsbegriffes. Vielmehr war für die nunmehr über ein Jahrhundert zurückliegende Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung die *Laplace*sche Definition maßgebend, die folgenden Wortlaut hat: « Die Theorie des Zufalls ermittelt die gesuchte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses durch Zurückführung aller Ereignisse derselben Art auf eine gewisse Anzahl gleich möglicher Fälle, d. i. solcher, über deren Existenz wir in gleicher Weise unschlüssig sind, und durch Bestimmung der dem Ereignis günstigen Fälle. Das Verhältnis dieser Zahl zu der aller möglichen Fälle ist das Maß dieser Wahrscheinlichkeit, die also nichts anderes als ein Bruch ist, dessen

[1] *Richard von Mises*, Vorlesungen aus dem Gebiete der angewandten Mathematik, I. Band, Wahrscheinlichkeitsrechnung. Leipzig 1931. S. 1.

Zähler die Zahl der günstigen Fälle und dessen Nenner die Zahl aller möglichen Fälle ist. »[1]

Diese Definition hat sich in der Fachliteratur über hundert Jahre erhalten und beginnt erst in der Gegenwart eingehend studiert und vervollkommnet zu werden. Einer strengen Kritik unterwirft diese Definition *Mises*, welcher darlegt, daß sie auf die Probleme der gegenwärtigen Statistik nicht anwendbar ist. Er sagt wörtlich: « Daß hier eine petitio principii vorliegt, da gleichmöglich doch nur ein Deckwort für gleichwahrscheinlich sein kann, ist noch der geringste Mangel dieser Definition, die weder auf das Beispiel eines 'falschen' Würfels noch auf das der Lebens- und Sterbenswahrscheinlichkeit anwendbar ist; niemand kann sagen, wo hier die gleichwahrscheinlichen Fälle stecken. »[2] *Mises* verknüpft den Wahrscheinlichkeitsbegriff aufs engste mit dem Begriffe der Häufigkeit und kehrt so zur ursprünglichen aristotelischen Auffassung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes zurück. Wenn wir den Unterschied zwischen der *Laplace*schen und der aristotelischen Wahrscheinlichkeitsauffassung klar herausheben wollen, können wir sagen, daß *Laplace* einen aprioristischen Wahrscheinlichkeitsbegriff schafft, *Aristoteles* hingegen, getreu seiner realistischen Einstellung als Naturwissenschaftler, prägt seinen Begriff auf empirischer Grundlage. Denn Häufigkeit setzt ja eine andauernde systematische Beobachtung voraus. In der Neuzeit waren schon vor *Laplace* Anbahnungen zu einer Wahrscheinlichkeitsrechnung bemerkbar, die durch die Namen *Blaise Pascal*, *Pierre de Fermat*, *Jacob Bernoulli* und *Thomas Bayes* gekennzeichnet sind. Diese zeigen durchwegs Tendenzen zu einer empirischen Auffassung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes, indem sie ihn auf die Häufigkeit zurückzuführen. *Mises* überwindet, in Anlehnung an englische und französische Arbeiten[3], den vorherrschenden Einfluß der aprioristischen Auffassung *Laplaces* und bietet eine systematisch auf dem Häufigkeitsbegriff aufgebaute Wahrscheinlichkeitsrechnung. Der empirische Einschlag, den das *Mises*sche Werk dadurch bekommt, wird noch verstärkt durch die ausdrückliche Charakteristik seiner Wahrscheinlichkeitsrechnung als einer naturwissenschaftlichen Theorie, die ebenso behandelt werden will wie die Geometrie und die übrigen Zweige der Mathematik,

[1] *P. S. de Laplace*, Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeit, 1814. Deutsche Übersetzung, *R. v. Mises*. Leipzig 1932. S. 4.

[2] *Mises*, l. c. S. 3.

[3] *Leslie Ellis* und *A. A. Cournot* nach Angabe von *Mises*, S. 4.

die wir in den Naturwissenschaften anwenden [1]. Das Werk erscheint daher auch folgerichtig als erster Band der Sammlung von Vorlesungen aus dem Gebiete der *angewandten* Mathematik. Gleichzeitig stellt die *Mises*sche Theorie den erstmaligen Versuch dar, dieses Gebiet der anwendbaren Mathematik in axiomatischer Form darzustellen.

Für uns bietet die Anlehnung an das aristotelisch-thomistische Häufigkeitskriterium für die Einteilung der Naturereignisse einen ausreichenden Beweggrund, einige nachfolgende Kapitel den Grundzügen der Misesschen Wahrscheinlichkeitstheorie zu widmen, zumal sie auch methodisch durch ihren axiomatischen Aufbau einen bemerkenswerten Versuch darstellt.

5. Der Wiederholungsvorgang als Ausgangsobjekt der Misesschen Theorie

Mises widmet dem Ausgangsobjekt ein eigenes Kapitel, betitelt « Gegenstand der Wahrscheinlichkeitsrechnung ». Indem wir in dem schon im ersten Teil dieser Arbeit eingeführten Unterschied zwischen dem unmittelbar gegebenen Objekt oder Ausgangsobjekt und dem Gegenstand einer Wissenschaft unterscheiden, da dieser bereits von geeigneten Erkenntnismitteln geformt sein muß, müssen wir in dem angeführten Kapitel aus dem *Mises*schen Buche eine Behandlung des Ausgangsobjektes in seiner unmittelbaren empirischen Gegebenheit erblicken. Denn den Gegenstand seiner Theorie legt *Mises* tatsächlich erst in den weiteren Kapiteln fest, wobei er schließlich in der von uns benützten Terminologie bis zu dem Subjekte seiner Wissenschaft zu gelangen trachtet.

Indem wir uns der angeführten terminologisch feinen Unterschiede bewußt bleiben, führen wir wörtlich die Definition des Ausgangsobjektes der *Mises*schen Theorie an. Sie lautet : « Gegenstand der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind Massenerscheinungen oder Wiederholungsvorgänge ; sie bestehen aus einer sehr großen Zahl aufeinanderfolgender Elemente (Beobachtungen), deren jedes als Merkmal (Beobachtungsergebnis) eine Zahl (oder eine Gruppe von Zahlen) in 'regelloser Anordnung' aufweist. Die Einzelbeobachtung vollzieht sich nach einer festen Vorschrift, die eindeutig über die Bestimmung des Merkmals oder die eventuelle Ausscheidung der Beobachtung verfügt. » [2]

[1] *Mises*, S. 22.

[2] *Mises*, l. c. S. 9. Die Anführungszeichen und die Klammern stammen von *Mises*.

Dieser Definition entnehmen wir vor allem, daß das Ausgangsobjekt, wie wir übrigens bereits wissen, eine Beobachtung, also eine sinnliche Wahrnehmung erfordert. Wesentlich für die Theorie ist es nun, daß jede Einzelbeobachtung nach einer festen Vorschrift zu einem eindeutig bestimmten Ergebnis gelangen muß. Wenn wir also zum Beispiel ein Merkmal beobachten, dürfen wir unter keinen Umständen zu dem Ergebnis gelangen, daß das Merkmal *teilweise* oder *fast* eingetreten ist oder daß es *unsicher* ist, ob es eingetreten ist. Dieser Verschwommenheit des Beobachtungsergebnisses muß eine feste Beobachtungsvorschrift vorbeugen. Wir können uns dies an dem klassischen Beispiel der Wahrscheinlichkeitsrechnung, dem Würfelspiel, veranschaulichen. Bei jedem Wurf muß das Ergebnis eine bestimmte Augenzahl bieten, wenn ein Spiel überhaupt möglich sein soll. Wir können nicht *fast* eine Sechs werfen oder etwa das Ergebnis eines Wurfes als zwischen Fünf und Sechs liegend beurteilen. Das wäre bei einem kugelähnlichen Würfelgebilde der Fall, dessen Stabilität nicht an die sechs Flächen gebunden ist. Es muß auch festgesetzt werden durch die Vorschrift, wie das Herabfallen des Würfels von der Versuchsfläche, z. B. der Tischfläche zu beurteilen ist, ob diese Beobachtung ungültig sein soll, da sie den Beobachtungsbedingungen nicht entspricht, oder ob die Ablesung vielleicht auch auf dem Fußboden vorgenommen werden soll, wohin der Würfel ausnahmsweise herunterfallen könnte. In diesem Zusammenhang ist es nicht wesentlich zu wissen, für welche Beobachtungsvorschrift oder noch besser für welche Bestimmtheitsvorschrift sich der Beobachter entscheidet, weil er dadurch bloß die Gesamtheit seiner Ausgangsobjekte ändert, keineswegs aber den wesentlichen Charakter des Beobachtungsprozesses gefährdet. Dagegen wäre das Zustandekommen einer Folge von Beobachtungsergebnissen unmöglich, wenn die feste Bestimmtheitsvorschrift nicht gegeben wäre.

Entgegen vielfach geäußerten Ansichten von Nichtfachleuten, die die Vorstellung einer Unsicherheit, einer Unbestimmtheit, eines Nichtwissens und einer Ungenauigkeit mit dem Begriffe der Wahrscheinlichkeit und mit allen seinen Anwendungen in Verbindung bringen, *ist es angezeigt, die für jede Statistik, nicht nur für die Misessche Theorie, selbstverständliche, notwendige Bedingung hervorzuheben, nach der jede statistisch zu verarbeitende Beobachtungsfolge mit einem klaren Entscheid enden muß, ob das beobachtete Merkmal aufgetreten ist oder nicht.*

Diese Forderung ist vom philosophischen Standpunkte aus wohl verständlich, denn sie entspricht der ersten Bedingung jeglicher Wissen-

schaft, von klaren Begriffen auszugehen. Die Vorbedingung für klare Ausgangsbegriffe sind eben eindeutige Ausgangsobjekte als Ergebnisse der Beobachtung.

An die Bestimmtheitsvorschrift der Einzelbeobachtung reiht sich in der Definition die Voraussetzung, daß die Einzelbeobachtungen in großer Zahl vorliegen sollen, wenn man Wahrscheinlichkeitsrechnung betreiben will. Durch diese Voraussetzung kommt die empirische Erfassung des Gesetzes der großen Zahlen zum Ausdruck, wonach die Berechnungen mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsgrößen nur im Rahmen großer Zahlen, großer Anzahlen von Ereignissen Geltung haben. Die Annahme des empirisch aufgefaßten Gesetzes der großen Zahlen nimmt allerdings in die Theorie einen ganz eigentümlichen Zug auf, der entschieden einer philosophischen Erklärung, also einer philosophischen Zurückführung auf einfachere Begriffe oder Prinzipien erfordert. Daß die *Mises*sche Theorie diese Erklärung nicht gibt, kann bei ihrem Charakter einer naturwissenschaftlichen Theorie nicht wundernehmen, da sie sich traditionsgemäß mit der Übereinstimmung zwischen Gesetz und Erfahrung beschäftigt, nicht aber mit einer philosophisch tieferen Erfassung der erarbeiteten Gesetzmäßigkeiten. Wir wissen ja bereits, daß wir uns in der Naturwissenschaft auf der rechten, der bloß akzidentellen Seite der Fundamentalanalogie befinden. Die mathematische Ableitung, die *Mises* in der Form des historischen Beweises des Gesetzes der großen Zahlen nach *Bernoulli* deduktiv in seine Wahrscheinlichkeitsrechnung einzufügen weiß, wird einer tieferen Durchdringung des sachlichen Inhaltes dieser der Natur innewohnenden Struktur nicht gerecht, da er bloß im Rahmen seines axiomatischen Systems formal zum Ausdruck bringt, was er durch die Voraussetzung der großen Anzahl bei der Bestimmung des Gegenstandes seiner Wissenschaft aus empirischer Notwendigkeit einfach vorweggenommen hat.

Wie schon die klassische Wahrscheinlichkeitsrechnung mit ihrem inkonsequenten apriori-Wahrscheinlichkeitsbegriff, der letzten Endes denn doch empirisch beeinflußt ist, es tat, so muß erst recht jede empirisch verankerte Wahrscheinlichkeitsrechnung oder Statistik die große Anzahl als Ausdruck des empirisch aufgefaßten Gesetzes der großen Zahlen hinnehmen, wobei es einer philosophischen Disziplin überlassen bleibt, diese Eigentümlichkeit der Natur näher zu erklären, da es sich keineswegs um eine einsichtige Struktureigenschaft der Natur handelt.

Die große Anzahl tritt in der Definition des Ausgangsobjektes bei *Mises* in den Massenerscheinungen und in den Wiederholungsvorgängen

auf. Diese zwei Begriffe machen den Eindruck einer Uneinheitlichkeit der Definition. Denn Massenerscheinungen und Wiederholungsvorgänge sind verschiedene Objekte, die auch verschieden behandelt sein wollen. Die Massenerscheinung bietet eine Gesamtheit, die auf einmal, also in einem einzigen Zeitpunkt gegeben ist und ein räumliches Nebeneinander bildet. Der Wiederholungsvorgang dagegen bildet ein zeitliches Nacheinander, das sich gegebenenfalls in einem einzigen Raumpunkt abspielt. Die Einheitlichkeit der Definition erreicht nun *Mises* dadurch, daß er die Massenerscheinung mit ihrem räumlichen Nebeneinander auf das zeitliche Nacheinander des Wiederholungsvorganges überführt. Der Charakter der in der Natur auftretenden Massenerscheinungen bietet zwei verschiedene Wege für deren Überführung auf Wiederholungsvorgänge. Wir brauchen die Massenerscheinungen nur ihrer Entstehung nach genauer zu untersuchen. Wir finden dann, daß eine Gruppe von Massenerscheinungen das Ergebnis einer zeitlichen Folge von Einzelvorgängen ist, die auf einem begrenzten Raumgebiet enden und nur deshalb als räumliches Nebeneinander einer Massenerscheinung angesprochen werden, weil die durch die Einzelvorgänge hervorgebrachten Strukturelemente in einem räumlichen Nebeneinander andauern. In diesem Falle genügt es, anstatt der Massenerscheinung in ihrer Vollendung die Entstehung zu verfolgen, die in den aufeinanderfolgenden Einzelvorgängen einen Wiederholungsvorgang bietet.

Bei der zweiten Gruppe von Massenerscheinungen können wir auch bei der Entstehung der einzelnen Elemente kein zeitliches Nacheinander feststellen, und da wir sonst keine Unterlage für die Aufweisung eines zeitlichen Nacheinanders besitzen, bleibt uns nichts anderes übrig, als daß wir das räumliche Nebeneinander Punkt für Punkt abtasten und so eine künstliche Zeitfolge erhalten. Um auch in der sprachlichen Ausdrucksweise die Einheitlichkeit des Ausgangsobjektes zu betonen, beschränkt sich *Mises* auf den Begriff der Beobachtung und des Beobachtungsergebnisses, anstatt von Elementen und Merkmalen zu sprechen, und das Beobachtungsergebnis ist tatsächlich das, was bei beiden Gruppen als zeitliches Nacheinander einen Wiederholungsvorgang irgendwie realisieren kann. Es werden also gerade diejenigen Ausdrücke, die in der angeführten Definition als bloße Ergänzungen oder Erläuterungen in der Klammer standen, zu den eigentlichen Ausgangsobjekten. Es wäre also richtiger, wenn *Mises* gleich in der Definition des Ausgangsobjektes von der Einzelbeobachtung an einer Massenerscheinung und von der Einzelbeobachtung eines Wiederholungsvor-

ganges spräche, deren Ergebnis dann eine Folge von Einzelbeobachtungsergebnissen wäre.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung begnügt sich also aus Gründen der mathematischen Einfachheit und Einheitlichkeit mit bloßen Beobachtungsergebnissen, die als merkmalbestimmte Folgen das Ausgangsobjekt dieser Wissenschaft bilden.

6. Die Wahrscheinlichkeit als Grenzwert

Damit wir vom *Mises*schen Ausgangsobjekte der Folge der Beobachtungsergebnisse zum Gegenstand seiner Wahrscheinlichkeitsrechnung gelangen, müssen wir noch zwei Forderungen hinzunehmen, von denen die erste in diesem Kapitel besprochen werden soll. Sie lautet:

« Es muß möglich sein, sich die Folge der Einzelerscheinungen oder Beobachtungen (Elemente) unbeschränkt fortsetzbar zu denken, und es müssen die relativen Häufigkeiten für das Auftreten der gegebenen Merkmale bestimmte Grenzwerte besitzen. Diese Grenzwerte sind es, die man als die (mathematischen) Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der beiden Merkmale anzusehen hat. »[1]

Diese Forderung ist hier in ihrer einfachsten Form für ein bestimmtes Merkmal angeführt. Das Merkmal kann entweder auftreten oder es kann auch nicht auftreten, und in diesem Sinne sind dann das « *Auftreten* » und das « *Nichtauftreten* » zwei Merkmale, eben die beiden Merkmale, von denen in der Forderung die Rede ist.

Die Forderung verlangt nicht, daß die Folge der Einzelerscheinungen unendlich viele Glieder tatsächlich hat, sondern sie verlangt, daß sie unbeschränkt fortsetzbar ist, daß also zu den bereits vorliegenden Gliedern immer wieder nach Belieben neue Glieder hinzugeschaffen werden können. Diese unbeschränkte Fortsetzbarkeit der Folge drückt also die Forderung einer realen Möglichkeit aus, die ja in der Tat bei den Experimenten in gewissen Variationsgrenzen gegeben ist. Die Forderung einer solchen realen Möglichkeit spielt in der Experimentalphysik an und für sich, also ohne einen Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung, eine wichtige Rolle. Die Forderung der immer wieder möglichen Wiederholung eines Experimentes ist in der Experimentalphysik geradezu das Kriterium für die Beurteilung, ob das beobachtete Ereignis tatsächlich in seinen Entstehungsbedingungen voll

[1] *Mises*, S. 10.

erfaßt ist und ob sein Auftreten nicht auf eine zufällige experimentelle Zusammenstellung zurückzuführen ist. Eine neue Beobachtung, ein neuer « Effekt » kann in der Physik niemals als gesichertes experimentelles Gut anerkannt werden, wenn es nicht gelingt, in allen Laboratorien der Welt die Beobachtung nach den Angaben des ersten Beobachters nach Belieben zu wiederholen. *So hat die Forderung der unbeschränkten Fortsetzbarkeit der Folge von Beobachtungsergebnissen von Seiten des physikalischen Experimentes ihre volle Berechtigung.*

Aber auch philosophisch ist die Forderung einer unbeschränkten Möglichkeit durchaus zulässig. Denn gerade die Begriffe des Unendlichen und der bloßen Möglichkeit sind aufs engste verknüpft, sodaß Thomas vom Unendlichen ausdrücklich sagt, daß es gleichsam in der Möglichkeit sei, relinquitur igitur quod infinitum sit tamquam in potentia ens [1]. Das, was unbegrenzt, unbeschränkt ist, hat eben überhaupt keine andere Realität als die der dauernd offenstehenden Möglichkeit. *So hat die Forderung der unbeschränkten Fortsetzbarkeit auch ihre philosophische Berechtigung, da die Begriffe Unbegrenztheit und Möglichkeit einander entsprechen.*

Bei *Mises* entspringt nun die Folgerung der unbeschränkten Fortsetzbarkeit der Beobachtungen einem mathematischen Bedürfnis. Glücklicherweise ist dieses mathematische Bedürfnis auf die angeführte Weise im besten Einklang sowohl mit der experimentalen Praxis als auch mit der philosophischen Begriffsbildung. *Mises* sucht nämlich den Übergang von der Beobachtungsfolge zum mathematischen Grenzwert. Er benützt dazu den Begriff der relativen Häufigkeit. Die relative Häufigkeit ist ein verhältnismäßig sehr einfacher und heute in der Physik voll eingebürgerter Begriff. Wenn wir zum Beispiel bei der n-ten Beobachtung angelangt sind und wenn in dieser Beobachtungsfolge das ausgewählte Merkmal insgesamt n_o-mal aufgetreten ist, dann ist der Bruch $\frac{n_o}{n}$ die relative Häufigkeit des Auftretens des ausgewählten Merkmales in der aus n-Gliedern bestehenden Beobachtungsfolge. Neben der Beobachtungsfolge entsteht so eine ihr zugeordnete Folge von relativen Häufigkeiten. Es ist klar, daß es immer nur soviel Glieder der Folge der relativen Häufigkeiten geben kann, als es Glieder der Beobachtungsfolge gibt. Die Anzahl der Beobachtungen ebenso wie die Anzahl der beobachteten Ereignisse kann immer nur endlich sein. Also ist auch die Folge der relativen Häufigkeiten immer endlich.

[1] III Phys. l. 10, n. 3.

Der Grenzwertbegriff verlangt aber eine unendliche Anzahl von relativen Häufigkeiten. *Mises* stellt sich nämlich den Grenzwert der relativen Häufigkeiten so vor, wie bei den unendlichen Reihen. Von dem Grenzwert einer unendlichen Reihe sprechen wir dann, wenn wir bestimmte Konvergenzkriterien erfüllt finden, die sich auf die Kenntnis aller unendlich vielen Glieder der Reihe stützen. Wir kennen nämlich die Konstruktionsvorschrift, wie ein beliebiges Glied der Reihe berechnet werden kann. Und in diesem Sinne « kennen » wir die unendlich vielen Glieder der Reihe, oder in anderer Ausdrucksweise, die Reihe ist uns in allen ihren Gliedern gegeben. Die Unendlichkeit der Reihe ist hier durch die Möglichkeit der Berechnung eines beliebigen Gliedes der Reihe gegeben. In einem solchen Falle ist dann der Grenzwert verhältnismäßig einfach zu berechnen, denn es ist dies die Zahl, zu der sich die einzelnen Glieder der Reihe nähern, ja sogar beliebig nähern, ohne sie jemals zu erreichen. Die Berechnung eines solchen Grenzwertes ermöglicht die Konstruktionsvorschrift, die durch das allgemeine Glied der Reihe gegeben ist.

Ein so definierter mathematischer Grenzwert ist nun bei der Folge der relativen Häufigkeiten nicht errechenbar, da uns das allgemeine Glied als Konstruktionsvorschrift fehlt. Der Bruch $\frac{n_o}{n}$ ist im Zähler empirisch durch die Ergebnisse der Beobachtungen bestimmt, ist also im vorhinein mathematisch nicht erfaßbar. Die Häufigkeiten überraschen uns in ihren Schwankungen immer wieder. *Mises* hilft sich nun so, daß er einfach die Existenz eines derartigen Grenzwertes fordert. Das Kriterium für die Zulässigkeit einer derartigen Voraussetzung ist dann die praktische Bewährung des errechneten Ergebnisses. Daß sie sich im Rahmen der bisherigen Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung bewährt hat, ist eine Tatsache.

Mathematisch ist die Annahme der Existenz eines derartigen Grenzwertes von größter Bedeutung. Denn wenn es möglich ist, einer vorgelegten Häufigkeitsfolge eine bestimmte Zahl eindeutig als mathematischen Grenzwert zuzuordnen, dann tritt an Stelle des allgemein unausdrückbaren Verlaufes der Folge diese feste Zahl, die den Aufbau einer exakten Theorie ermöglicht. Die Frage, ob eine solche Annahme mathematisch berechtigt sei, ist gleichbedeutend mit der Frage, ob sie nicht zu einem Widerspruch führt. Bisher wurde ein derartiger Einwand mathematisch noch nicht erbracht.

Philosophisch läßt sich der Begriff des Grenzwertes an dieser Stelle

noch nicht analysieren, aber die Tatsache, daß durch diese Zahl eine gewisse Stabilität in den Schwankungen der einzelnen relativen Häufigkeitswerte zum Ausdruck kommt, steht außer Zweifel.

Der Grenzwert bei Mises ist also eine in ihrer Existenz vorausgesetzte Zahl, deren naturstrukturelle Bedeutung auf stabile natürliche Elemente hinweist, die ansonsten aber an dieser Stelle noch nicht durchblickt werden kann.

7. Das Regellosigkeitsprinzip

Die zweite Folgerung, die *Mises* an das Ausgangsobjekt, an seine Beobachtungsfolge stellt, um es als Gegenstand der Wahrscheinlichkeitsrechnung ansprechen zu können, lautet: « Wird aus der gesamten, unendlich gedachten Folge der Elemente eine unendliche Teilfolge so gebildet, daß über die Zugehörigkeit eines Elementes zur Teilfolge ohne Kenntnis seines Merkmales, nur nach der Stellung, die dieses Element in der Gesamtfolge hat, entschieden, so müssen auch innerhalb der Teilfolge die relativen Häufigkeiten des Auftretens der beiden Merkmale Grenzwerte besitzen, und zwar dieselben wie in der Gesamtfolge. » [1]

Mises fordert also eine Unempfindlichkeit des Grenzwertes einer Auswahl aus der Beobachtungsfolge gegenüber. Die empirische Folge soll so beschaffen sein, daß es keine mathematische Formel, kein mathematisches Gesetz geben soll, das irgendeine Regelmäßigkeit in dem Auftreten der Folge aufdeckte. Ließe sich nämlich eine solche Regelmäßigkeit in der irgendwie beliebig ausgewählten Teilfolge entdecken, dann ließe sich eine derartige Auswahl an Hand der entdeckten Regelmäßigkeit durchführen, daß die Häufigkeit für das Auftreten des betreffenden Merkmales sichtlich größer wäre. Das aber hätte die Steigerung des Grenzwertes zur Folge. Beobachtungsfolgen, in denen man mit Erfolg diese Auswahlmethode zur Änderung des Grenzwertes vornehmen könnte, sollen also nach dieser zweiten Forderung aus der *Mises*schen Wahrscheinlichkeitsrechnung ausgeschlossen sein.

Erfahrungsgemäß gibt es nun tatsächlich Ereignisfolgen, die wir mit keiner bekannten mathematischen Formel zu erfassen imstande sind. Das ist zum Beispiel bei den Glücksspielen der Fall. Wir kennen kein System, nach welchem ein Spieler seinen Gewinn bei einem Würfelspiel oder bei der Roulette beliebig steigern könnte.

[1] *Mises*, l. c. S. 12.

Die Unmöglichkeit, in einem derartigen Spielverlauf ein brauchbares Gesetz aufzudecken, läßt solche Ereignisse als von jeglicher Regel losgelöst erscheinen. Positiv kommt dann diese Unmöglichkeit bei *Mises* dadurch zum Ausdruck, daß er für das Verhalten derartiger Ereignisse ein eigenes Prinzip, das Regellosigkeitsprinzip, verantwortlich macht. Als ob diese Ereignisse von einem eigenen Prinzip in ihrer Regellosigkeit erhalten würden. In Anlehnung an die Glücksspiele nennt *Mises* das Prinzip der Regellosigkeit auch das Prinzip vom ausgeschlossenen Spielsystem.

Daß die mathematische Unerfaßbarkeit bestimmter Ereignisabläufe direkt auf ein Prinzip zurückgeführt wird, ist ein Schritt, den *Mises* dem Problem des Perpetuum mobile an die Seite stellt. Die erfahrungsgemäße Unmöglichkeit, ein Perpetuum mobile zu konstruieren, führte in der Physik letzten Endes zur Formulation des zweiten thermodynamischen Hauptsatzes, also eines physikalischen Prinzipes. Analog soll nun die erfahrungsgemäße Unmöglichkeit einer mathematischen Erfassung bestimmter Beobachtungsfolgen durch die Formulation des Prinzipes der Regellosigkeit gelöst werden. Das Prinzip der Regellosigkeit hat dann zur Folge, daß in der *Mises*schen Wahrscheinlichkeitsrechnung ausschließlich bloß derartige Ereignis- und Beobachtungsfolgen zulässig sind, die das Regellosigkeitsprinzip erfüllen.

Ob es *Mises* tatsächlich gelungen ist, dieses Regellosigkeitsprinzip mathematisch einwandfrei zu formulieren und ob dies überhaupt eine lösbare mathematische Aufgabe darstellt, wollen wir vorerst nicht weiter untersuchen. In formaler Hinsicht ermöglicht dieses Prinzip jedenfalls die Definition des Multiplikationstheorems der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mag auch für *Mises* dieser formale Grund für die Formulierung des Regellosigkeitsprinzipes ausschlaggebend gewesen sein, uns interessiert hier vor allem die sachliche Tragweite des Regellosigkeitsprinzipes. Wir wollen wissen, was über die Natur der empirischen Beobachtungsfolge durch das Regellosigkeitsprinzip vorausgesetzt wird. Uns interessiert es, zu erfahren, welcher Art die Naturereignisse sein müssen, damit sie für *Mises* überhaupt bearbeitbar werden, um so als Gegenstände in seine Wahrscheinlichkeitsrechnung eingehen zu können.

Es ist nicht so ganz einfach, den positiven Inhalt eines gegebenenfalls in der Natur vorherrschenden Regellosigkeitsprinzipes für bestimmte Ereignisse herauszuschälen. Ein solches Regellosigkeitsprinzip müßte notwendigerweise eine Auswahlarbeit leisten, indem es jedesmal nur

solche Ereignisse zusammenwürfelte, die keinen ursächlichen Zusammenhang untereinander haben. Denn ein ursächlicher Zusammenhang führt zu einem bestimmten Nacheinander der Ereignisse, und dies wäre dann durch eine Regel erfaßbar. Die Auswahlarbeit des Regellosigkeitsprinzipes käme dann einer Sammelvorrichtung gleich, die alles erfaßt, was von den ursächlich verknüpften Reihen nicht erfaßt werden konnte und daher nicht erfaßt wurde. Diese Sammelvorrichtung wäre dann imstande, eine Reihe ursächlich unzusammenhängender Einzelglieder zu konstituieren, eine Reihe von ausgesprochenen Zufällen, wie man sich in der Wahrscheinlichkeitsrechnung auszudrücken pflegt. Schon die klassischen Anfänge dieser mathematischen Theorie kennen den Begriff des Zufalls. *Laplace* nennt seine Theorie ausdrücklich eine Zufallstheorie. In Verfolgung dieses Zufallsbegriffes, dieses Zustandes einer Loslösung von jeglicher ursächlichen Verknüpfungen dürfte nun *Mises* gefolgt sein und hat dann im Rahmen seiner Entwicklung der Ereignisreihen auch die Zufälle zu Zufallsreihen ausgebaut. *Das Regellosigkeitsprinzip ist für* Mises *das bildende Prinzip seiner Zufallsreihen*, denn zu solchen werden alle seine Ereignisreihen durch das Regellosigkeitsprinzip gestempelt.

Nun haben wir bereits im Kapitel « Das thomistische *Frequenter* » an Hand des Textes der *Physik* gezeigt, daß Thomas den Zufall selbst als eine Gegebenheit der Natur anerkennt ; der Zufall ist für ihn einfach da [1]. Wir können uns auch wohl Zufallsreihen denken, indem zum Beispiel in einer Ereignisfolge zwei Merkmale abwechseln, sagen wir z. B. die Merkmale A und B. Andere Merkmale gebe es in der Ereignisfolge nicht. Ein Ereignis tritt ein, wenn das Auftreten von einem der Merkmale gegeben ist. Nehmen wir an, daß das Merkmal A sehr häufig auftritt, von diesem urteilt dann Thomas, daß es den Gesetzen der Natur entsprechend auftritt, kurz ausgedrückt, daß es sich kausal verhalte. Wenn aber das Merkmal A häufig auftritt, so muß notwendigerweise das Merkmal B sehr selten auftreten, muß also eine sehr geringe Häufigkeit aufweisen. Von diesem Merkmal wird Thomas urteilen, daß es zufällig auftritt. Wir können jetzt gar wohl die Zufallsreihe aus der Kausalreihe sozusagen herausheben, und in diesem Sinne haben wir dann eine herausgehobene Kausalreihe und eine herausgehobene Zufallsreihe vor uns. Das sind aber eben herausgehobene Reihen, und keineswegs naturgegebene Reihen. Von Natur aus gibt

[1] Siehe S. 75.

es keine selbständigen Zufallsreihen. Das würde bedeuten, daß das Merkmal mit geringer Häufigkeit häufig auftreten müßte, was ein Widerspruch ist. Es müssen nämlich immer zwei Reihen verflochten sein : eine Reihe mit großer Häufigkeit und eine mit kleiner Häufigkeit. In diesem Sinne braucht die Zufallsreihe mit der kleinen Häufigkeit ihre Verflechtung in eine Ursachenreihe mit entsprechend großer Häufigkeit. Anders ist das Zustandekommen von Zufallsreihen mit kleiner Häufigkeit nicht denkbar. Eine naturgegebene reine Zufallsreihe, wo also die Einzelereignisse sich als reine Zufälle aneinanderreihen, hat keinen Platz mehr für eine Verflechtung mit einer anderen Reihe. Dem Begriffe der *Mises*schen reinen Zufallsreihe fehlt also die Voraussetzung der Ursachenreihe ; ja eine solche Zufallsreihe schließt diesen für sie primären Begriff direkt aus und zerstört sich so selbst als kontradiktorisch. *Der Begriff der* Mises*schen reinen und dadurch selbständigen Zufallsreihe ist logisch nicht haltbar.*

Wir können diese philosophische Erkenntnis experimentell interpretieren, indem wir sagen, daß sich kein Experiment angeben läßt, das auf reinen Zufallserwägungen beruht und das dann ausschließlich reine Zufallsereignisse liefern muß. Wir wissen gar wohl, daß in der experimentellen Praxis gerade die Zufallsergebnisse eine ganz besondere Rolle spielen, daß dies aber niemals die Hauptrolle, also die ausschlaggebende, die wesentliche und einzige Rolle ist. Es müssen vorerst Normalfälle, also Ursachenfälle durch das Experiment beabsichtigt sein ; dann müssen sich die Ursachenfälle auch tatsächlich verwirklichen. Und erst in eine solche Ursachenreihe von Ursachenfällen eingebettet können die Zu-fälle überhaupt erst zu Tage treten. Auch das Würfelspiel macht hier keine Ausnahme ; auch dieses Spiel braucht eine Anordnung, um nicht ganz unverhoffte Ereignisse zu liefern. Erst der Würfel mit seiner charakteristischen geometrischen Form, mit seinen sechs Flächen, dann die Tischfläche, auf der wir würfeln und schließlich die Hand, die würfelt ; dies alles bildet eine Gesamtheit von Bedingungen, die mir keineswegs beliebige, sondern sechs bestimmte Ergebnisse liefern, in einer Reihenfolge, die allerdings zunächst noch nicht voll beurteilbar ist. Wir wissen überhaupt nicht, wie wir eine reine Zufallsreihe experimentell verwirklichen sollten. Zur Realisation des hier geforderten Zufallsreihenexperimentes fehlt uns das einer Reihe von Experimentalergebnissen innewohnende Gesetz, denn nur nach einem ordnenden Gesetz können wir unsere Experimentalapparatur aufbauen. Durch die Forderung eines ihr innewohnenden Gesetzes sprengen wir aber den

Begriff der reinen Zufallsreihe. Letzten Endes zerschellt also der Versuch, eine reine Zufallsreihe experimentell herzustellen, an dem der reinen, selbständigen Zufallsreihe innewohnenden begrifflichen Widerspruch.

Ebenso wie die experimentelle Interpretation des ablehnenden philosophischen Standpunktes, bringt auch das Verhältnis des Begriffes Grenzwert zu dem Begriffe Gesetzmäßigkeit, bzw. Gesetzlosigkeit, bereits im Rahmen der *Mises*schen Begriffswelt Argumente, die gegen eine reine Zufallsreihe sprechen. *Mises* verlangt nämlich, wie wir bereits wissen, die Existenz eines Grenzwertes für die seinen Ereignisfolgen zugeordneten Folgen der relativen Häufigkeiten, denn auf dem Grenzwert baut er seinen mathematischen Wahrscheinlichkeitsbegriff auf. Außerdem verlangt er auch die Existenz von Grenzwerten für die aus der Grundfolge durch Auswahl abgeleiteten Teilfolgen, ja sogar die Gleichheit zwischen dem Grenzwert der Grundfolge und dem Grenzwert der abgeleiteten Teilfolge. Der Grenzwert an und für sich ist aber bereits der Ausdruck einer irgendwie verdeckt vorhandenen Gesetzmäßigkeit. Denn wäre dem nicht so, dann würde sich die Ereignisfolge ohne Gesetzmäßigkeit von einer Ereignisfolge mit Gesetzmäßigkeit durch gar nichts unterscheiden, und es hätte dann überhaupt keinen Sinn, von der Existenz oder Nichtexistenz des Grenzwertes irgendetwas in der Theorie abhängig zu machen, kurz gesagt, wäre es überflüssig, diesen Begriff zu bilden. Eine Reihe mit Grenzwert kann sich von einer Reihe ohne Grenzwert nur dadurch unterscheiden, daß die Reihe mit Grenzwert irgendwie zu dem Grenzwert hingeordnet ist, mag auch die Art der Hinordnung mathematisch noch so verwickelt sein. Einzig die Reihe ohne Grenzwert wäre unter Umständen ohne jedwede innere Regelmäßigkeit denkbar, obzwar es allem Anscheine nach gar nicht so einfach wäre, eine absolut regellose Reihe auch nur auszudenken. Aber Reihen ohne Grenzwert bieten keinen Wahrscheinlichkeitswert und sind für *Mises* unbrauchbar.

Es verbleiben somit bloß die Reihen mit Grenzwert mit ihrer ihnen innewohnenden Regelmäßigkeit, und diese stehen natürlich im offenen Gegensatz zu der Forderung der Regellosigkeit. Die Begriffe Grenzwert und Regellosigkeit widersprechen einander.

Mit der Unverträglichkeit der Begriffe Regellosigkeit und Grenzwert wird auch der Begriff des *Mises*schen Kollektivs hinfällig. *Mises* definiert diesen Begriff mit den Worten: « Für Erscheinungen oder Vorgänge, die — gehörig idealisiert — den beiden Forderungen nach Existenz des Grenzwertes und nach 'Regellosigkeit' der Zuordnung

genügen, führen wir den Ausdruck 'Kollektiv' ein.»[1] Beide einander widersprechenden Begriffe sollen also den neuen Begriff des Kollektivs, übrigens den grundlegenden Begriff der *Mises*'schen Theorie, konstituieren. Daß eine solche Konstruktion logisch unmöglich ist, ist aus dem bisher Gesagten ersichtlich.

Vielleicht überrascht aber der Umstand, daß *Mises* auf diesem logisch unhaltbaren Begriffe des Kollektivs seine in vieler Hinsicht bewährte Theorie aufbaut. Diese Tatsache findet durch zweierlei Umstände ihre Erklärung. Vor allem stellt *Mises* zwei getrennte Forderungen, die eine nach der Existenz des Grenzwertes, die andere nach der Gültigkeit des Regellosigkeitsprinzips. Der Zusammenhang dieser beiden Forderungen wird in der Theorie weiter nicht untersucht, da *Mises* selbst zugibt, nicht streng axiomatisch seine Ableitungen vorzunehmen. Diese beiden einander fremden Begriffe werden dann einfach definitorisch miteinander verschmolzen, ohne daß die gegenseitigen Beziehungen der aufbauenden Begriffe Grenzwert und Regellosigkeit näher untersucht würden. Eine Erklärung liefert also die Unvollkommenheit der Methode, die nicht streng deduktiv arbeitet und ausgesprochene Lücken, sowie nicht zu Ende gedachte Gedankengänge aufweist. Der zweite Umstand liegt darin, daß *Mises* selbst seine durch die beiden Forderungen ausgesprochenen Grundbegriffe abschwächt, indem er zugibt, daß sie praktisch hinsichtlich ihrer Erfüllung oder Nichterfüllung unkontrollierbar sind[1]. *Mises* hat kein Kriterium für die Auffindung des Grenzwertes oder für die bloße Feststellung, ob es in der vorgelegten konkreten Folge einen Grenzwert überhaupt gibt. Ebensowenig kann er an einer vorgelegten Folge entscheiden, ob sie die Regellosigkeit erfüllt. Für eine Beurteilung, ob sich die beiden Begriffe wenigstens in bestimmten konkreten Fällen bewähren, entbehrt die Theorie jeglicher Unterlage. Es bleibt also lediglich die praktische Bewährung der Theorie als Ganzes. Die Erkenntnis einer praktischen Bewährung beweist aber keineswegs die Richtigkeit der benützten Begriffe. Die praktische Bewährung ist zwar nützlich; für eine widerspruchsfrei aufgebaute Theorie ist sie ein wertvoller Fingerzeig; sie ist aber kein Fortschritt in unserer Erkenntnis, wenn die Theorie selbst in ihren Begriffen nicht einwandfrei aufgebaut ist. Denn ohne die logisch einwandfreie Durchdringung der in einer Theorie angewandten

[1] *Mises*, S. 14.

Begriffe stehen wir ratlos vor dem Ergebnis des zur Theorie gehörigen Experimentes, wenn die Theorie überhaupt ein solches bietet.

Wir sehen also, daß die Regellosigkeitsforderung, die folgerichtig zu den widerspruchsvollen Begriffen der reinen Zufallsreihe und des Kollektivs führt, auf keine Weise als ein philosophisch berechtigtes Prinzip angesehen werden kann.

8. Die Misessche Wahrscheinlichkeitsrechnung als naturwissenschaftliche Theorie

Um ein abschließendes Urteil über die *Mises*sche Wahrscheinlichkeitsrechnung fällen zu können, müssen wir uns vergegenwärtigen, daß *Mises* selbst seine Wahrscheinlichkeitsrechnung eine naturwissenschaftliche Theorie nennt und sie ausdrücklich anderen naturwissenschaftlichen Theorien an die Seite stellt [1]. So erklären wir uns den empirischen Ausgangspunkt der Theorie, die in den Ergebnissen der Experimente ihre Ausgangsobjekte sieht, ganz im Einklang mit anderen naturwissenschaftlichen Theorien. *Mises* kennt daher keine « apriori -Wahrscheinlichkeiten », wie sie in der klassischen Theorie auftreten, die tatsächlich eine rein mathematische Theorie sein wollte. Der für eine naturwissenschaftliche Theorie einzig mögliche Standpunkt des experimentellen Ausgangsobjektes führt *Mises* zum Begriffe der Häufigkeit und im weiteren Gedankengang zu den Folgen der relativen Häufigkeiten. Da wir bereits festgestellt haben, daß auch die Philosophie den Häufigkeitsbegriff zur Ordnung der Naturereignisse benützt, findet auch durch diese Wissenschaft die Grundeinstellung der *Mises*schen Theorie ihre Bestätigung. *Die empirische Häufigkeitsgrundlage kann also sowohl philosophisch als auch naturwissenschaftlich als gesichert gelten, und es bleibt das durch eventuelle Einwände anderer Art ungeschmälerte Verdienst Mises, in seiner Wahrscheinlichkeitsrechnung erstmalig den Versuch gewagt zu haben, ein axiomatisches System auf dem Begriffe der relativen Häufigkeit aufzubauen.*

Aber *Mises* ist ein mathematischer Geist, und sein ganzes Streben ist dahin gerichtet, seiner naturwissenschaftlichen Theorie die Exaktheit einer mathematischen Abhandlung zu geben. Schon das Beispiel, dem er seine Theorie in ihrem naturwissenschaftlichen Charakter angleicht, ist bezeichnend ; es ist die Geometrie, also eine ausgesprochen mathe-

[1] *Mises*, S. 22.

matische Disziplin, die ihre ersten Begriffe der Erfahrung entnehmen kann, dies aber nicht konsequent tun muß. In dem Sinne, wie nun die Geometrie als angewandte mathematische Wissenschaft dem Techniker hilft, soll nun die Wahrscheinlichkeitsrechnung dem Physiker Dienste leisten. Es ist also eine naturwissenschaftliche Theorie, die gegen die Erfahrung soweit als möglich unabhängig bleiben will. *Mises* spricht diese Gedanken mit folgenden Worten aus : « Man muß, wenn man die in diesen Vorlesungen zur Durchführung kommende 'Naturwissenschaftliche Theorie der Wahrscheinlichkeit' verstehen will, stets die vollkommene Analogie mit der Geometrie im Auge behalten. Die Theorie, die von den beiden Axiomen oder Forderungen an ein Kollektiv : Existenz der Grenzwerte und deren Unempfindlichkeit gegen Stellenauswahl, ausgeht, nimmt für sich in Anspruch, eine mathematische, d. h. an den Denkgesetzen allein prüfbare Theorie zu sein, wie das theoretische Lehrgebäude der Geometrie. » Unter naturwissenschaftlicher Theorie ist hier also eine rein mathematische Theorie verstanden, die dann entschieden Gefahr laufen könnte, sich für das experimentelle Material als ungeeignet zu erweisen. Soweit will aber *Mises* dennoch nicht gehen, weshalb er die rein mathematische Durchführung seiner Grundgedanken, seiner Forderungen durch die weiteren Ausführungen abschwächt : « Dabei ist in der folgenden Darstellung kein Wert darauf gelegt, diesen Anspruch (eine an den Denkgesetzen allein prüfbare Form zu sein) in allen Einzelheiten hervortreten zu lassen, wie dies etwa die Aufgabe einer speziellen axiomatischen Untersuchung wäre, die alle, auch die nebensächlichsten Voraussetzungen und an sich unbedeutendsten Zwischenschlüsse explicite vorzuführen hat. Es ist möglich, daß ein Versuch, diese Aufgabe der vollständigen Axiomatisierung nach dem Maßstabe der erst in der neuesten Zeit in der Geometrie verwirklichten Genauigkeit durchzuführen, noch zu kleinen Abänderungen der Formulierungen Anlaß geben würde. Aber die wesentlichen Grundgedanken unseres Aufbaues und ihre Gegensätzlichkeit zu der 'klassischen' Wahrscheinlichkeitstheorie müssen dabei unberührt bleiben. » [1]

Wir können uns hier eines Gefühles der Unentschiedenheit nicht erwehren, da die Theorie einmal eine naturwissenschaftliche Theorie, dann wieder eine mathematische Theorie, dann aber wieder etwas weniger exaktes als eine mathematische Theorie, etwa eine bloß in groben Zügen angewandte mathematische Theorie sein soll. Der Mathematiker

[1] *Mises*, S. 22.

Mises fühlt hier den mangelnden Zusammenhang zwischen Empirie und formal-mathematischer Behandlung sehr wohl. Und auch unsererseits wird das Verständnis für diese wissenschaftliche Unentschlossenheit begreiflich in dem Augenblicke, wo wir uns mit den Schwierigkeiten näher bekannt machen, die die mathematische Formulierung eines so eigenartigen experimentellen Materiales mit sich bringt, wie es bei einer Wahrscheinlichkeitstheorie der Fall ist.

Schon bei dem Begriffe des Grenzwertes der relativen Häufigkeiten ersteht jedem Mathematiker das selbstverständliche Vorbild des Grenzwertes einer unendlichen konvergenten Reihe. Mathematisch vereinfacht sich die unendliche Folge auf einen einzigen Zahlenwert, eben den Grenzwert. Es fragt sich nur, ob die Natur der Folge der relativen Häufigkeiten sinngemäß eine solche Vereinfachung zuläßt. In groben Zügen sicherlich, da wir aus Erfahrung wissen, daß sich mit diesen Grenzwerten praktisch rechnen läßt. Anders gestaltet sich die Sachlage, wenn wir die Exaktheit der hier eingeführten Beziehungen beurteilen, die *Mises* in seinem Werke nicht gelöst haben will. So bietet schon der mathematische Begriff des Grenzwertes eine prinzipielle Schwierigkeit durch die Unkontrollierbarkeit an der Erfahrung. Die Folge muß, um einen Grenzwert im Sinne der unendlichen Reihen definieren zu können, unendlich sein, eine empirische Folge ist dagegen notwendigerweise immer endlich. Eine andere Schwierigkeit bietet das allgemeine Glied. Bei den unendlichen Reihen läßt sich das allgemeine Glied durch einen bestimmten algebraischen Ausdruck festhalten ; es bildet den Typ oder die Anweisung, nach welcher alle Glieder der unendlichen Reihe zu bilden sind. Die empirische Folge der relativen Häufigkeiten ist auf jedem Schritte von der Empirie abhängig, sodaß von der Bildung eines Grenzwertes auf die bei den konvergenten Reihen üblichen Art keine Rede sein kann. Es verbleibt nur eine Analogie etwa dieser Art : Wenn wir die empirische Folge der relativen Häufigkeiten unbegrenzt fortsetzten, so würde sich ein bestimmter Wert als Grenzwert ergeben ; nehmen wir also an, es wäre dies dieser und dieser Zahlenwert und rechnen wir nun so, als ob dies der gesuchte Grenzwert wäre. Wenn schon auf diese Weise der exakte Zusammenhang zwischen Erfahrung und mathematischem Formalismus sehr gelockert erscheint, so bringt die Forderung des Grenzwertes für den Gegenstand der Theorie auch eine Abtrennung eines Teiles der empirischen Ausgangsobjekte aus der Theorie mit sich. Denn wenn nur Folgen mit einem existierenden Grenzwert den Gegenstand der Theorie bilden können, sind alle diejenigen

Folgen aus der Theorie ausgeschlossen, die keinen Grenzwert haben. Hier erhebt sich die von der Theorie unbeantwortet gelassene Frage, ob solche empirische Folgen ohne Grenzwert nicht vielleicht die eigentlichen Zufallsreihen sind, deren Bearbeitung sich die Theorie gerade zum Ziele gesetzt hat. So zeigt bereits die erste Forderung, daß sie dem empirischen Material nicht voll gerecht werden kann, auch wenn sie die mathematische Exaktheit teilweise preisgibt.

Auch die zweite Forderung, die im Regellosigkeitsprinzip ausgesprochen ist, ist wiederum durch die Mathematik bestimmt. Maßgebend ist hier das bereits in der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie aufgestellte Multiplikationstheorem, welches für die Multiplikation zweier Wahrscheinlichkeiten deren gegenseitige Unabhängigkeit fordert. Um nun auch Teilfolgen mit ihren Wahrscheinlichkeiten untereinander durch Multiplikation kombinieren zu können, muß auch die Unabhängigkeit der einzelnen Glieder der Folge untereinander gewährleistet sein. Diese Gewähr soll nun die Regellosigkeit bieten. Auch wenn wir der Regellosigkeit einen empirischen vernünftigen Sinn beilegen könnten, wäre dadurch die empirische Grundlage nur wieder von neuem eingeengt, denn nicht jede Folge könnte zum Gegenstand der Theorie werden, sondern bloß die regellose. An dieser Stelle wäre wiederum die Frage angebracht, wie dann die Folgen zu behandeln wären, die zwar nicht regellos im Sinne der Forderung sind, die aber dennoch einer klassischen Gesetzmäßigkeit entbehrten. Denn es ist kaum anzunehmen, daß die Natur auf der einen Seite bloß die klassisch wohl definierten Naturereignisse kennt und auf der anderen Seite wiederum bloß die regellosen.

Wenn wir dann die Schwierigkeiten der ersten und der zweiten Forderung zusammenfassen, so bekommen wir die ganze Problematik des Begriffes Kollektiv, dessen innerer Widerspruch nur dadurch ausgewogen wird, daß *Mises* die ausschließliche Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung darin erblickt, aus den jeweils gegebenen Wahrscheinlichkeiten in gewissen Ausgangskollektivs die Wahrscheinlichkeiten in daraus abgeleiteten Kollektivs zu berechnen [1]. Wenn dann noch die jeweils gegebenen Wahrscheinlichkeiten hypothetisch angenommen werden, dann ist der Zusammenhang mit der experimentellen Erfahrung so indirekt wie nur möglich.

Die so erkannten Grundlagen der *Mises*schen Wahrscheinlichkeits-

[1] *Mises*, S. 22.

rechnung lassen uns deren Analyse mit folgender Feststellung abschließen.

Mises arbeitet sein sowohl philosophisch als auch physikalisch glücklich gewähltes empirisches Ausgangsobjekt, nämlich die beobachteten Ereignisfolgen, durch den Begriff der relativen Häufigkeit zu einer praktisch in gewissen Grenzen bewährten Theorie aus, beabsichtigt aber dabei keineswegs, den durch seine Axiome angedeuteten formal-mathematischen Ausbau des empirischen Ausgangsobjektes zum Gegenstand einer Wahrscheinlichkeitswissenschaft exakt durchzuführen, sodaß die Theorie schon aus der formal zurückhaltenden Stellung ihres Schöpfers heraus nicht als adäquates Instrument für die volle wissenschaftliche Durchdringung des vorliegenden experimentellen Materials angesehen werden will und daß sie in Ermanglung eines einwandfrei definierten Gegenstandes auch nicht als eine wirklich exakte naturwissenschaftlich-mathematische Theorie angesehen werden kann.

(*Schluß folgt.*)