

**Zeitschrift:** Bulletin de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles = Bulletin der Naturforschenden Gesellschaft Freiburg

**Herausgeber:** Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles

**Band:** 106 (2017)

**Artikel:** Leonhard Euler und die Elektrodynamik

**Autor:** Müller, Edgar

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-760341>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 29.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Leonhard Euler und die Elektrodynamik

EDGAR MÜLLER, Chemin des Bouleaux 14, 1012 Lausanne

## Zusammenfassung

In Quaternion-Algebra ergibt der Gradient  $\delta * A$  des 4-Potenzials  $A$  direkt das elektromagnetische Feld  $(E/c + B)$ :  $\delta * A = i(E_1/c + B_1) + j(E_2/c + B_2) + k(E_3/c + B_3)$ .

## Résumé

En algèbre des quaternions, le gradient  $\delta * A$  du 4-potentiel  $A$  donne directement le champ électromagnétique  $(E/c + B)$ :  $\delta * A = i(E_1/c + B_1) + j(E_2/c + B_2) + k(E_3/c + B_3)$ .

## Summary

In quaternion algebra, the gradient  $\delta * A$  of the 4-potential  $A$  yields directly the electromagnetic field  $(E/c + B)$ :  $\delta * A = i(E_1/c + B_1) + j(E_2/c + B_2) + k(E_3/c + B_3)$ .

## 1. Einleitung

Die Assoziation des Mathematikers LEONHARD EULER (1707-1783) mit der Elektrodynamik liegt nicht auf der Hand, denn die Theorie der Elektrodynamik wurde erst vom hundert Jahre später lebenden JAMES CLERK MAXWELL (1831-1879) geschaffen. Und doch war es LEONHARD EULER, der eine für die Elektrodynamik fundamentale mathematische Beziehung entdeckte: **die Vier-Quadrat-Identität**.

## Die Vier-Quadrat-Identität

Der in St Petersburg wirkende Schweizer Mathematiker LEONHARD EULER offenbarte die nachfolgende algebraische Identität in zwei an den ebenfalls in St. Petersburg tätigen CHRISTIAN GOLDBACH gerichteten Briefen, vom 4. Mai 1748 (mit  $\varepsilon = 1$ )<sup>i</sup> und vom 12 April 1749 (mit  $\varepsilon = \pm 1$ )<sup>ii</sup>, in der nachfolgenden Form:

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) = (ap + bq + cr + ds)^2 + \\ (aq - bp - \varepsilon cs + \varepsilon dr)^2 + \\ (ar + \varepsilon bs - cp - \varepsilon dq)^2 + \\ (as - \varepsilon br + \varepsilon cq - dp)^2, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Der Beweis der Identität erfolgt durch einfaches algebraisches Ausrechnen.

Wie EULER selbst in seiner Korrespondenz erwähnte, können die Zahlen  $a, b, c, d, p, q, r, s$  sowohl positiv als auch negativ angenommen, miteinander kombiniert, und in

ihrer Ordnung verändert werden, was zu weiteren Möglichkeiten der Vorzeichen im Produkt führt. Diese Möglichkeiten sind alle mathematisch äquivalent.

Unter diesen weiteren Möglichkeiten ist die folgende besonders erwähnenswert:

$$\begin{aligned}
 & (v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) = \\
 & (v_0 w_0 - v_1 w_1 - v_2 w_2 - v_3 w_3)^2 + \\
 & (v_0 w_1 + v_1 w_0 + v_2 w_3 - v_3 w_2)^2 + \\
 & (v_0 w_2 - v_1 w_3 + v_2 w_0 + v_3 w_1)^2 + \\
 & (v_0 w_3 + v_1 w_2 - v_2 w_1 + v_3 w_0)^2 ,
 \end{aligned}$$

weil sie die die heute gebräuchliche Quaternionen-Multiplikationsregel präfiguriert. Der Beweis der Identität erfolgt durch algebraisches Ausrechnen.

Quadratsummen können als Skalarprodukte von Vektoren mit sich selbst, d.h. als Längenquadrate, aufgefasst werden, und die EULERSche Vier-Quadrat-Identität besagt deshalb, *dass es im vierdimensionalen Raum ein Vektorprodukt gibt, bei dem die Länge des Produkts zweier Vektoren gleich dem Produkt der Längen der Vektoren ist*. Diese Eigenschaft wird als *multiplikative Norm* bezeichnet<sup>iii</sup>. Das durch die EULERSche Vier-Quadrat-Identität definierte Vektorprodukt begründet einen hyperbolischen Raum mit negativer Metrik (+1,-1,-1,-1), der dem Zahlensystem der Quaternionen entspricht<sup>iv</sup>.

## Die Quaternionen und ihre Rechenregeln

Quaternionen ( $q = (q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3)$ , mit  $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ ) haben die folgenden Eigenschaften<sup>v</sup>:

$$\begin{aligned}
 \text{Länge:} \quad & |q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \\
 \text{Einheitsquaternion:} \quad & q/|q| \\
 \text{Konjugierte:} \quad & q^* = (q_0 - iq_1 - jq_2 - kq_3) \\
 \text{Produkt:} \quad & (a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3)^* (b_0 + ib_1 + jb_2 + kb_3) = \\
 & (a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3) + \\
 & i(a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2) + \\
 & j(a_0 b_2 - a_1 b_3 + a_2 b_0 + a_3 b_1) + \\
 & k(a_0 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_0).
 \end{aligned}$$

Das Quadrat dieses Produkts,  $(a * b) * (a * b)^* = a * (b * b^*) * a^* = (a * a^*)(b * b^*)$  ist gemäss  $q * q^* = q^* * q = (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)$  die EULERSche 4-Quadrat-Identität.

Das Produkt ist nicht kommutativ:  $a * b \neq b * a$

Produkt mit der Konjugierten:  $q * q^* = q^* * q = |q|^2$

Inverse:  $q^{-1} = q^*/(q * q^*)$

Für Einheitsquaternionen gilt:  $q^{-1} = q^*$

## Rotationen im 4-dimensionalen Raum

Die Multiplikation eines vierdimensionalen Vektors  $P$  von links oder von rechts mit einem Einheitsquaternion stellt eine isokline<sup>vi</sup> Doppelrotation im 4D-Raum dar. Jedes Einheitsquaternion kann nämlich in der folgenden Form dargestellt werden:

$$q(\varphi) = (\cos(\varphi) + i u_1 \sin(\varphi) + j u_2 \sin(\varphi) + k u_3 \sin(\varphi)) ;$$

$\bar{u}$  ist darin ein 3D-Einheitsvektor, der die Achse der Rotation festlegt; und

$\varphi$  ist der Rotationswinkel um diese Achse  $\bar{u}$ .

Das Quaternion rotiert den Vektor  $P$  aber nicht bloss um die  $\bar{u}$ -Achse im 3D-Raum, sondern gleichzeitig ebenfalls „von innen nach aussen“ oder „von aussen nach innen“ im 4D-Raum (Doppelrotation). Spezifisch führt eine Multiplikation mit  $q(\varphi)$  von links mit positivem  $\varphi$  zu einer Rotation im mathematisch positiven Sinn und „von innen nach aussen“. Ein Vorzeichenwechsel des Rotationswinkels  $\varphi$  führt zu einer Rotation im mathematisch negativen Sinn und „von aussen nach innen“. Die Multiplikation mit  $q(\varphi)$  von rechts mit positivem  $\varphi$  ändert den mathematischen Sinn der 3D-Rotation, nicht aber den Sinn der „innen – aussen“-Rotation.

Um eine blosse Rotation von  $P$  im 3-dimensionalen Raum zu erhalten, kann eine Rotation von links mit dem halben Rotationswinkel mit einer Rotation von rechts mit dem halben negativen Rotationswinkel kombiniert werden; die beiden 3D-Rotationskomponenten addieren sich dann zum vollen Rotationswinkel auf, während die 4D-„innen-aussen“ und „aussen-innen“-Rotationskomponenten sich gegenseitig aufheben.

$$P_r = \left( q\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right) * P_0 * \left( q\left(-\frac{\varphi}{2}\right) \right) = q * P_0 * q^*$$

mit  $q\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \left( \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + i u_1 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + j u_2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + k u_3 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right)$

Gleicherweise kann, um eine blosse 4-dimensionale „innen-aussen“ oder „aussen-innen“-Rotation von  $P$  zu erhalten, eine Rotation von links mit dem halben Rotationswinkel mit einer Rotation von rechts mit dem halben Rotationswinkel kombiniert werden; die beiden 3D-Rotationskomponenten heben sich dann gegenseitig auf, während die 4D-„innen-aussen“ oder „aussen-innen“-Rotationskomponenten sich zum vollen Rotationswinkel addieren.

$$P_r = \left( q\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right) * P_0 * \left( q\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right) = q * P_0 * q$$

## Quaternionen in der Elektrodynamik

Die kovariante Formulierung der Elektrodynamik leitet alle elektrischen Größen von einem 4-Potenzial  $A = \left( \frac{\varphi}{c}, (A_1, A_2, A_3) \right)$  und einer 4-Ladungsstromdichte  $J = (\rho c, (J_1, J_2, J_3))$  ab, mit Hilfe der Grundgleichung der Elektrodynamik:

$$\square A = \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) A = \mu_0 J,$$

worin  $\square$  der D'ALEMBERTSche Operator ist.

Das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  und das magnetische Feld  $\mathbf{B}$  gehen aus dem 4-Potenzial gemäss den folgenden Gleichungen hervor<sup>vii</sup>:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta t}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Die Grundgleichung der Elektrodynamik ist ein Analogon zur POISSON-Gleichung der Elektrostatik:  $\operatorname{div} \operatorname{grad}(\varphi) = \Delta(\varphi) = -4\pi\rho$ ,

nur dass sie in einem 4-dimensionalen Raum mit negativer Metrik (+1,-1,-1,-1) formuliert ist, und dass in ihr sowohl Potenzial wie auch Ladungsstromdichte vektorielle Grössen sind.

Die *div grad*-Struktur des D'ALEMBERTSchen Operators wird in der Regel mit Hilfe von Tensor-Algebra bewältigt, d.h. der Gradient wird als 2-Form durch Differenzieren jeder Komponente des Vektorpotenzials  $\mathbf{A}$  nach jeder Richtung gebildet. Man erhält dadurch den Feldstärke-Tensor  $\mathbf{F}$  als  $F^{\mu\nu} = \delta^\mu A^\nu - \delta^\nu A^\mu$ . Der  $\mathbf{F}$ -Tensor enthält die getrennten Feldkomponenten von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$ . Dieses Vorgehen entspricht aber nicht der physikalischen Natur des Gradienten eines Potenzials, der bloss eine 1-Form, d.h. ein Vektor, sein kann<sup>viii</sup>, und elektrisches und magnetisches Feld sind auch keine getrennten, sondern zusammengehörende Grössen, die eine selbe Ursache haben.

**Es wurde bisher wenig beachtet dass die direkte Differenzierung des 4-Potenzials  $\mathbf{A}$  mit einem Quaternion-Differentialoperator  $\delta$  ebenfalls, und in ganz natürlicher Weise, zu den elektromagnetischen Feldkomponenten führt<sup>ix</sup>:**

$$(\delta_0 + i\delta_1 + j\delta_2 + k\delta_3) * (A_0 + iA_1 + jA_2 + kA_3) =$$

$$((\delta_0 A_0 - \delta_1 A_1 - \delta_2 A_2 - \delta_3 A_3) +$$

$$i(\delta_0 A_1 + \delta_1 A_0 + \delta_2 A_3 - \delta_3 A_2) +$$

$$j(\delta_0 A_2 - \delta_1 A_3 + \delta_2 A_0 + \delta_3 A_1) +$$

$$k(\delta_0 A_3 + \delta_1 A_2 - \delta_2 A_1 + \delta_3 A_0)),$$

und nach Umordnen der Terme in den Zeilen 2, 3, und 4:

$$((\delta_0 A_0 - \delta_1 A_1 - \delta_2 A_2 - \delta_3 A_3) +$$

$$i(\delta_0 A_1 + \delta_1 A_0 + \delta_2 A_3 - \delta_3 A_2) +$$

$$j(\delta_0 A_2 + \delta_2 A_0 - \delta_1 A_3 + \delta_3 A_1) +$$

$$k(\delta_0 A_3 + \delta_3 A_0 + \delta_1 A_2 - \delta_2 A_1)).$$

In Zeilen 2, 3, und 4 stellen nun die Terme  $(\delta_0 A_i + \delta_i A_0) = \left(\frac{1}{c} \frac{\delta}{\delta t} A_i + \frac{\delta \varphi}{x_i c}\right)$  die Feldkomponenten  $\frac{E_i}{c}$ ,  $i = 1,2,3$ , des elektrischen Feldes  $\mathbf{E}$  dar. Man beachte die Vorzeichen-Umkehr wegen der negativen Metrik (+1,-1,-1,-1) des Minkowski-Raumes.

Die Terme  $(+\delta_2 A_3 - \delta_3 A_2)$ ,  $(-\delta_1 A_3 + \delta_3 A_1)$ , und  $(+\delta_1 A_2 - \delta_2 A_1)$  sind gemäss  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  die Feldkomponenten  $B_i$ ,  $i = 1,2,3$ , des magnetischen Feldes  $\mathbf{B}$ .

Unter LORENZ-Eichung<sup>x</sup>,  $\delta_\alpha A^\alpha = 0$  (4-Divergenz = 0), verschwindet zudem die erste Zeile.

In Quaternion-Algebra ergibt damit der Gradient  $\delta * A$  des 4-Potenzials A direkt das elektromagnetische Feld ( $E/c + B$ ):

$$\delta * A = i(E_1/c + B_1) + j(E_2/c + B_2) + k(E_3/c + B_3).$$

Die elektromagnetischen Feldkomponenten  $E/c$  und  $B$  sind hier nicht räumlich getrennt, sondern unterscheiden sich bloss durch ihre Symmetrie: Das elektrische Feld  $E/c$  stellt den Quellen-Teil, das magnetische Feld  $B$  den Wirbel-Teil des elektromagnetischen Feldes dar; beide sind Teile einer selben 4-dimensionalen isoklinen Doppelrotation, und können durch einen einzigen Vektor ausgedrückt werden. Wie man sich durch Ausrechnen überzeugen kann, ist das Quadrat dieses Gradienten  $(\delta * A) * (\delta * A)^* = (E/c)^2 + B^2$ , d.h. die gemischten Terme verschwinden.

## Dank

Ich danke Prof. JEAN-PAUL BERRUT für das Durchlesen des Manuskripts und für seine wertvollen Kommentare.

## Referenzen

- i Brief CXV EULERS an GOLDBACH
- ii Brief CXXV EULERS an GOLDBACH
- iii Das Theorem von ADOLF HURWITZ besagt, dass  $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots + b_n^2) = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + \dots + c_n^2$ , worin die  $c_i$  bilineare Funktionen der  $a_i$  und der  $b_i$  sind, nur für  $n = 1, 2, 4$ , und 8 möglich ist. ADOLF HURWITZ (1898), "Über die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen", Goett. Nachr.: 309–316
- iv EDGAR MÜLLER, *De la réalité des nombres*, Bull. Soc. Frib. Sc. Nat. Vol. 103 (2014) p. 83-90
- v JOHN H. CONWAY, DEREK A. SMITH, "On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic, and Symmetry", CRC Press, Boca Raton, 2003
- vi Rotationen im 2-dimensionalen Raum drehen um einen Punkt (*Rotationszentrum*), der invariant ist unter der Rotation. Rotationen im 3-dimensionalen Raum drehen um eine Linie (*Rotationsachse*), die invariant ist unter der Rotation. Im 4-dimensionalen Raum gibt es zwei Arten von Rotationen: a) Einfache Rotationen um eine Ebene, die invariant ist unter der Rotation, und b) Doppelrotationen um einen Punkt (*Rotationszentrum*), der invariant ist unter der Rotation. Allgemeine Doppelrotationen haben zwei voneinander verschiedene Rotationswinkel. Isokline Rotationen sind Doppelrotationen worin beide Rotationswinkel denselben Betrag haben; sie können sich aber noch im relativen Vorzeichen unterscheiden: es gibt links-isokline und rechts-isokline Rotationen.
- vii Siehe dazu einen Standardtext der klassischen Elektrodynamik, z.B. WALTER GREINER, *Klassische Elektrodynamik*. 6. Auflage. Harri Deutsch, 2002, oder [https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell%27s\\_equations](https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell%27s_equations).
- viii Der Gradient eines Potenzials ist Ursache einer Kraft oder Bewegung, und diese muss notwen-

digerweise eine Richtung im Raum haben.

- ix Wir bezeichnen im Folgenden diesen Differentialoperator mit  $\delta$  und seine Komponenten mit  $\delta_i$ . Im Speziellen ist  $\delta_0 = \frac{1}{c} \frac{\delta}{\delta t}$ ,  $\delta_1 = \frac{\delta}{\delta x_1}$ ,  $\delta_2 = \frac{\delta}{\delta x_2}$ , und  $\delta_3 = \frac{\delta}{\delta x_3}$
- x LUDVIG LORENZ (1867). *"On the Identity of the Vibrations of Light with Electrical Currents"* *Philosophical Magazine. Series 4.* **34** (230): 287–301.