

Zeitschrift: Bulletin de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles = Bulletin der Naturforschenden Gesellschaft Freiburg

Herausgeber: Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles

Band: 103 (2014)

Artikel: De la réalité des nombres

Autor: [s.n.]

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-583610>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 29.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

De la réalité des nombres

EDGAR MÜLLER, Chemin des Bouleaux 14, 1012 Lausanne

Résumé

On démontre que la réalité physique est conditionnée par les identités algébriques de « 2 carrés », de « 4 carrés » et de « 8 carrés ». Ces identités définissent des espaces non-Euclidiens à géométrie hyperbolique et à métrique négative. Ainsi l'identité de « 4 carrés » mène-t-elle au 4-espace \mathbb{H} , dans laquelle l'équation de POISSON gouvernant le transport de matière devient une équation d'onde qui, dans sa forme la plus générale, correspond à l'équation fondamentale de l'électrodynamique. La géométrie hyperbolique du 4-espace \mathbb{H} mène directement à la transformation de LORENTZ et à la relativité restreinte.

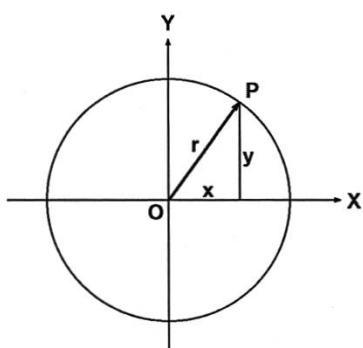
Zusammenfassung

Es wird aufgezeigt dass die physikalische Realität durch die algebraischen 2-Quadrate, 4-Quadrate und 8-Quadrate-Identitäten konditioniert ist. Diese Identitäten konstituieren nichteuclidische Räume, mit hyperbolischer Geometrie und negativer Metrik. Die 4-Quadrate-Identität führt in dieser Weise zum 4-Raum \mathbb{H} , in dem die den Materietransport beschreibende POISSON-Gleichung zu einer Wellengleichung wird, die in ihrer allgemeinsten Form der Grundgleichung der Elektrodynamik entspricht. Die hyperbolische Geometrie des 4-Raumes \mathbb{H} führt in direkter Weise zur LORENTZ-Transformation und zur speziellen Relativität.

Summary

It is shown that physical reality is conditioned by the algebraic 2-square, 4-square, and 8-square identities. These identities constitute non-Euclidian spaces, with hyperbolic geometry and negative metric. In this way the 4-square identity leads to the 4-space \mathbb{H} , in which the POISSON equation, governing the transport of matter, becomes a wave equation, which in its most general form corresponds to the fundamental equation of electrodynamics. The hyperbolic geometry of the 4-space \mathbb{H} leads directly to the LORENTZ transform and to special relativity.

1. L'invariance directionnelle des lois de la physique



Il découle de notre expérience quotidienne, que les lois de la physique ne dépendent pas du lieu et de la direction. Un bâton conserve sa longueur, indépendant de son orientation dans l'espace. Ceci a des conséquences profondes sur la théorie physique.

L'invariance du lieu se manifeste en ce que les degrés de liberté physiques (les coordonnées) entrent toujours comme différences dans les formules.

L'indépendance directionnelle est liée à l'existence de scalaires invariants. Le bâton OP, de longueur r , peut être tourné autour de l'origine O. Ce faisant, les coordonnées (x,y) de son bout P changent.

Cependant, selon le théorème de PYTHAGORE, la somme des carrés $x^2 + y^2 = r^2$, et par conséquent la longueur r du bâton, restent invariants sous une rotation du bâton ou du système de coordonnées.¹

2. La norme multiplicative

La physique ne se borne pas à la description de la réalité physique en soi, mais comporte également la description de ses changements (mouvements) et interactions. Un changement (mouvement) correspond à un quotient différentiel, p.ex. $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$, qui exprime le changement d'une quantité dépendante $f(x)$ lors d'un changement de la variable indépendante x . Dans le cas de quantités vectorielles de dimension n , la totalité du changement est exprimé par la matrice de Jacobi, de dimension $n \times n$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & & \\ \cdots & & \\ \frac{\partial}{\partial x_n} & & \end{pmatrix} (f_1 \quad \cdots \quad f_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

qui est le produit extérieur d'un opérateur vectoriel de dimension n et d'une fonction vectorielle de même dimension. Etant donné que le changement appartient au même espace physique de dimension n , ce produit extérieur de dimension $n \times n$, pour représenter une réalité physique, doit être réductible sans ambiguïté, ni diviseurs de zéro, à la dimension n ; en d'autres termes, il doit exister un « produit vectoriel » a^*b avec une norme multiplicative, c'est-à-dire telle que $|a||b| = |a^*b|$ ou, ce qui revient au même, $(a \cdot a)(b \cdot b) = (a^*b) \cdot (a^*b)$.

3. Les quatre espaces de nombres avec norme multiplicative

Comme A. HURWITZ l'a prouvé en 1898², il n'y a que quatre constructions mathématiques de base, en plus de leurs isomorphes, qui possèdent une norme multiplicative, à savoir l'espace des nombres réels \mathbb{R} , l'espace des nombres complexes \mathbb{C} , l'espace des nombres hypercomplexes \mathbb{H} (quaternions) et l'espace des nombres hyper-hypercomplexes \mathbb{O} (octonions). Les espaces \mathbb{C} , \mathbb{H} et \mathbb{O} sont respectivement basés sur des singularités mathématiques, notamment les identités de 2, 4 et 8 carrés.

3.1 L'espace des nombres réels \mathbb{R}

Pour $n = 1$ la formule est triviale:

$$(x^2)(y^2) = (x * y)^2$$

Elle vaut pour toute paire de nombres $(x, y) \in \mathbb{R}$.

3.2 L'espace des nombres complexes³ \mathbb{C}

Pour $n = 2$ il existe une identité de 2 carrés⁴:

$$(X_0^2 + X_1^2)(Y_0^2 + Y_1^2) = (X_0Y_0 - X_1Y_1)^2 + (X_0Y_1 + X_1Y_0)^2$$

qui peut être exprimée comme carré vectoriel:

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} (X_0Y_0 - X_1Y_1) \\ (X_0Y_1 + X_1Y_0) \end{pmatrix}^2$$

La substitution (avec $i^2 = -1$)

$$X_0 = x_0; \quad Y_0 = y_0; \\ X_1 = ix_1; \quad Y_1 = iy_1;$$

donne maintenant

$$(x_0^2 - x_1^2)(y_0^2 - y_1^2) = (x_0y_0 + x_1y_1)^2 - (x_0y_1 + x_1y_0)^2$$

ce qui correspond à un carré vectoriel à métrique négative:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ ix_1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} y_0 \\ iy_1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} (x_0y_0 + x_1y_1) \\ i(x_0y_1 + x_1y_0) \end{pmatrix}^2$$

Les nombres complexes sont **associatifs**: $a(bc) = (ab)c$, et **commutatifs**: $ab = ba$.

3.3 L'espace des nombres hypercomplexes⁵ (quaternions) \mathbb{H}

Pour $n = 4$ il existe une identité de 4 carrés⁶,

$$(X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)(Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2) = \\ + (X_0Y_0 - X_1Y_1 - X_2Y_2 - X_3Y_3)^2 \\ + (X_0Y_1 + X_1Y_0 + X_2Y_3 - X_3Y_2)^2 \\ + (X_0Y_2 + X_2Y_0 - X_1Y_3 + X_3Y_1)^2 \\ + (X_0Y_3 + X_3Y_0 + X_1Y_2 - X_2Y_1)^2$$

qui peut être exprimée comme carré vectoriel:

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} (X_0Y_0 - X_1Y_1 - X_2Y_2 - X_3Y_3) \\ (X_0Y_1 + X_1Y_0 + X_2Y_3 - X_3Y_2) \\ (X_0Y_2 + X_2Y_0 - X_1Y_3 + X_3Y_1) \\ (X_0Y_3 + X_3Y_0 + X_1Y_2 - X_2Y_1) \end{pmatrix}^2$$

Il y a ici apparemment une coordonnée (X_0, Y_0) qui se distingue des trois autres (indices 1, 2, 3). La substitution (avec $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$):

$$X_0 = x_0; \quad Y_0 = y_0; \\ X_1 = ix_1; \quad Y_1 = iy_1; \\ X_2 = jx_2; \quad Y_2 = jy_2; \\ X_3 = kx_3; \quad Y_3 = ky_3;$$

donne maintenant:

$$(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)(y_0^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2) = \\ + (x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \\ - (x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2)^2 \\ - (x_0y_2 + x_2y_0 - x_1y_3 + x_3y_1)^2 \\ - (x_0y_3 + x_3y_0 + x_1y_2 - x_2y_1)^2$$

ce qui correspond à un carré vectoriel à métrique négative:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ ix_1 \\ jx_2 \\ kx_3 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} y_0 \\ iy_1 \\ jy_2 \\ ky_3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} (x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \\ i(x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2) \\ j(x_0y_2 + x_2y_0 - x_1y_3 + x_3y_1) \\ k(x_0y_3 + x_3y_0 + x_1y_2 - x_2y_1) \end{pmatrix}^2$$

Contrairement aux nombres complexes, on ne peut pas faire disparaître ici tous les signes négatifs.. Les quaternions sont **associatifs** : $a(bc) = (ab)c$, mais **non-commutatifs**: $ab \neq ba$.

On a $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$; $ij = -ji = k$; $jk = -kj = i$; $ki = -ik = j$.

3.4 L'espace des nombres hyper-hypercomplexes⁷ (octonions) \mathbb{O}

Pour $n = 8$ existe l'identité de 8 carrés⁸

$$(X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 + X_6^2 + X_7^2)(Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2 + Y_5^2 + Y_6^2 + Y_7^2) = \\ + (X_0Y_0 - X_1Y_1 - X_2Y_2 - X_3Y_3 - X_4Y_4 - X_5Y_5 - X_6Y_6 - X_7Y_7)^2 \\ + (X_0Y_1 + X_1Y_0 + X_2Y_3 - X_3Y_2 + X_4Y_5 - X_5Y_4 - X_6Y_7 + X_7Y_6)^2 \\ + (X_0Y_2 - X_1Y_3 + X_2Y_0 + X_3Y_1 + X_4Y_6 + X_5Y_7 - X_6Y_4 - X_7Y_5)^2 \\ + (X_0Y_3 + X_1Y_2 - X_2Y_1 + X_3Y_0 + X_4Y_7 - X_5Y_6 + X_6Y_5 - X_7Y_4)^2 \\ + (X_0Y_4 - X_1Y_5 - X_2Y_6 - X_3Y_7 + X_4Y_0 + X_5Y_1 + X_6Y_2 + X_7Y_3)^2 \\ + (X_0Y_5 + X_1Y_4 - X_2Y_7 + X_3Y_6 - X_4Y_1 + X_5Y_0 - X_6Y_3 + X_7Y_2)^2 \\ + (X_0Y_6 + X_1Y_7 + X_2Y_4 - X_3Y_5 - X_4Y_2 + X_5Y_3 + X_6Y_0 - X_7Y_1)^2 \\ + (X_0Y_7 - X_1Y_6 + X_2Y_5 + X_3Y_4 - X_4Y_3 - X_5Y_2 + X_6Y_1 + X_7Y_0)^2$$

qui peut être exprimée comme carré vectoriel:

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \\ Y_7 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} (X_0Y_0 - X_1Y_1 - X_2Y_2 - X_3Y_3 - X_4Y_4 - X_5Y_5 - X_6Y_6 - X_7Y_7)^2 \\ (X_0Y_1 + X_1Y_0 + X_2Y_3 - X_3Y_2 + X_4Y_5 - X_5Y_4 - X_6Y_7 + X_7Y_6)^2 \\ (X_0Y_2 - X_1Y_3 + X_2Y_0 + X_3Y_1 + X_4Y_6 + X_5Y_7 - X_6Y_4 - X_7Y_5)^2 \\ (X_0Y_3 + X_1Y_2 - X_2Y_1 + X_3Y_0 + X_4Y_7 - X_5Y_6 + X_6Y_5 - X_7Y_4)^2 \\ (X_0Y_4 - X_1Y_5 - X_2Y_6 - X_3Y_7 + X_4Y_0 + X_5Y_1 + X_6Y_2 + X_7Y_3)^2 \\ (X_0Y_5 + X_1Y_4 - X_2Y_7 + X_3Y_6 - X_4Y_1 + X_5Y_0 - X_6Y_3 + X_7Y_2)^2 \\ (X_0Y_6 + X_1Y_7 + X_2Y_4 - X_3Y_5 - X_4Y_2 + X_5Y_3 + X_6Y_0 - X_7Y_1)^2 \\ (X_0Y_7 - X_1Y_6 + X_2Y_5 + X_3Y_4 - X_4Y_3 - X_5Y_2 + X_6Y_1 + X_7Y_0)^2 \end{pmatrix}$$

Il y a ici apparemment une coordonnée (X_0, Y_0) qui se distingue des sept autres (indices 1 à 7). La substitution (avec $i^2 = j^2 = k^2 = l^2 = m^2 = n^2 = o^2 = ijklmno = -1$) :

$$\begin{aligned} X_0 &= x_0; & Y_0 &= y_0; \\ X_1 &= ix_1; & Y_1 &= iy_1; \\ X_2 &= jx_2; & Y_2 &= jy_2; \\ X_3 &= kx_3; & Y_3 &= ky_3; \\ X_4 &= lx_4; & Y_4 &= ly_4; \\ X_5 &= mx_5; & Y_5 &= my_5; \\ X_6 &= nx_6; & Y_6 &= ny_6; \\ X_7 &= ox_7; & Y_7 &= oy_7; \end{aligned}$$

donne maintenant:

$$(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 - x_7^2)(y_0^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 - y_5^2 - y_6^2 - y_7^2) = \\ + (x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 + x_5y_5 + x_6y_6 + x_7y_7)^2 \\ - (x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_5 - x_5y_4 - x_6y_7 + x_7y_6)^2 \\ - (x_0y_2 - x_1y_3 + x_2y_0 + x_3y_1 + x_4y_6 + x_5y_7 - x_6y_4 - x_7y_5)^2 \\ - (x_0y_3 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_0 + x_4y_7 - x_5y_6 + x_6y_5 - x_7y_4)^2 \\ - (x_0y_4 - x_1y_5 - x_2y_6 - x_3y_7 + x_4y_0 + x_5y_1 + x_6y_2 + x_7y_3)^2 \\ - (x_0y_5 + x_1y_4 - x_2y_7 + x_3y_6 - x_4y_1 + x_5y_0 - x_6y_3 + x_7y_2)^2 \\ - (x_0y_6 + x_1y_7 + x_2y_4 - x_3y_5 - x_4y_2 + x_5y_3 + x_6y_0 - x_7y_1)^2 \\ - (x_0y_7 - x_1y_6 + x_2y_5 + x_3y_4 - x_4y_3 - x_5y_2 + x_6y_1 + x_7y_0)^2 \end{math>$$

ce qui correspond à un carré vectoriel à métrique négative:

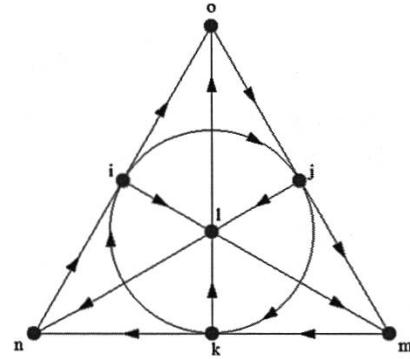
$$\begin{pmatrix} x_0 \\ ix_1 \\ jx_2 \\ kx_3 \\ lx_4 \\ mx_5 \\ nx_6 \\ ox_7 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} y_0 \\ iy_1 \\ jy_2 \\ ky_3 \\ ly_4 \\ my_5 \\ ny_6 \\ oy_7 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} (x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 + x_5y_5 + x_6y_6 + x_7y_7) \\ i(x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_5 - x_5y_4 - x_6y_7 + x_7y_6) \\ j(x_0y_2 - x_1y_3 + x_2y_0 + x_3y_1 + x_4y_6 + x_5y_7 - x_6y_4 - x_7y_5) \\ k(x_0y_3 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_0 + x_4y_7 - x_5y_6 + x_6y_5 - x_7y_4) \\ l(x_0y_4 - x_1y_5 - x_2y_6 - x_3y_7 + x_4y_0 + x_5y_1 + x_6y_2 + x_7y_3) \\ m(x_0y_5 + x_1y_4 - x_2y_7 + x_3y_6 - x_4y_1 + x_5y_0 - x_6y_3 + x_7y_2) \\ n(x_0y_6 + x_1y_7 + x_2y_4 - x_3y_5 - x_4y_2 + x_5y_3 + x_6y_0 - x_7y_1) \\ o(x_0y_7 - x_1y_6 + x_2y_5 + x_3y_4 - x_4y_3 - x_5y_2 + x_6y_1 + x_7y_0) \end{pmatrix}^2$$

Les octonions sont **non-commutatifs** et **non-associatifs**: $ab \neq ba$; $a(bc) \neq (ab)c$.

On a cependant toujours : $a(ab) = (aa)b$; $(ab)b = a(bb)$; $a(ba) = (ab)a$; (**alternativité**) ainsi que les identités de MOUFANG⁹ : $((ab)a)c = a(b(ac))$; $((ab)c)b = a(b(cb))$; $(ab)(ca) = (a(bc))a = a((bc)a)$.

Les règles de multiplication sont données par le diagramme de FANO¹⁰:

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = l^2 = m^2 = n^2 = o^2 = -1 \\ i &= jk = lm = on = -kj = -ml = -no \\ j &= ki = ln = mo = -ik = -nl = -om \\ k &= ij = lo = nm = -ji = -ol = -mn \\ l &= mi = nj = ok = -im = -jn = -ko \\ m &= il = oj = kn = -li = -jo = -nk \\ n &= jl = io = mk = -lj = -oi = -km \\ o &= ni = jm = kl = -in = -mj = -lk \end{aligned}$$



Les trois systèmes de nombres, complexes, hypercomplexes et hyper-hypercomplexes, ainsi que tout système algébrique qui leur est homomorphe, sont tout aussi solidement établis que les identités algébriques de 2 carrés, 4 carrés et 8 carrés, sur lesquelles ils sont basés ; ils ne sont, en fait, qu'une autre façon d'exprimer ces identités algébriques.

4. L'équation de continuité

L'équation de continuité exprime la conservation d'une entité physique lors d'un transport. Dans sa version la plus générale, elle prend la forme de la loi générale de STOKES :

$$\int_V d\omega = \int_{\partial V} \omega$$

ou, dans sa forme différentielle, celle de la loi de GAUSS :

$$\operatorname{div}(\omega(\underline{x})) = \rho(\underline{x})$$

La quantité ω y représente un flux quelconque, et la quantité ρ une densité de source (ou de puits). En exprimant le flux ω comme gradient d'un potentiel φ ¹¹

$$\omega(\underline{x}) = -\operatorname{grad}(\varphi(\underline{x}))$$

on obtient l'équation de POISSON :

$$\Delta(\varphi(\underline{x})) = \operatorname{div} \operatorname{grad}(\varphi(\underline{x})) = -\rho(\underline{x})$$

ou explicitement, en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta(\varphi(x)) = \sum_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = -\rho(x)$$

Les solutions de l'équation de POISSON (ou de l'équation de LAPLACE, pour $\rho = 0$), sont des fonctions harmoniques des coordonnées x avec des **fréquences imaginaires**.

4.1 L'équation de continuité dans l'espace \mathbb{H}

L'équation de continuité dans un espace Euclidien à 4 dimensions :

$$\Delta(\varphi(x)) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = -\rho(x)$$

devient dans l'espace \mathbb{H} , à cause de sa métrique négative (+1, -1, -1, -1),

$$\Delta(\varphi(x)) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = \rho(x)$$

c.à.d. une équation d'onde, dont les solutions sont des fonctions harmoniques des coordonnées x avec des **fréquences réelles**. A noter que $\rho(x)$ change également de signe lors de cette opération.

La grandeur φ dans cette équation est scalaire. Cependant, rien n'empêche de la généraliser à quatre dimensions, tout en respectant la géométrie de l'espace \mathbb{H} . On obtient par-là directement l'équation fondamentale de l'électrodynamique¹² :

$$\square A = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) A = \mu_0 J$$

où \square représente l'opérateur de d'Alembert ; $A = \left(\frac{\varphi}{c}, (A_1, A_2, A_3) \right)$ le 4-potentiel, composé des potentiels scalaire et vecteur, et $J = (\rho c, (J_1, J_2, J_3))$ la densité du 4-courant, composée de la charge et du courant.

En l'absence de sources, c.-à-d. dans le 4-espace vide, l'équation de continuité se simplifie en l'équation des ondes électromagnétiques libres (avec la substitution $x_0 = ct$) :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

Nous sommes donc devant le constat intéressant que l'apparition d'ondes électromagnétiques, voire d'ondes tout court, lors d'un mouvement physique est bien une conséquence de la géométrie hyperbolique du 4-espace, qui à son tour découle directement et nécessairement d'une identité algébrique, l'identité des 4 carrés ! Voici une réponse courte et étonnante au problème de la **dualité « onde-particule »** !

En plus on y trouve **aussi le fondement de la mécanique quantique** : si tout mouvement physique dans le 4-espace \mathbb{H} prend nécessairement la forme d'une onde, avec fréquence réelle et phase, un mouvement rotationnel ramenant l'objet physique en lui-même ne peut exister que pour des fréquences discrètes déterminées, où l'onde associée au mouvement rotationnel est en interférence constructive avec elle-même. Autrement l'onde s'effacerait, et un tel mouvement ne pourrait exister, si ce n'est très transitoirement. A rappeler que le quantum de PLANCK \hbar a précisément la dimension physique d'un mouvement rotationnel !¹³

4.2 Conséquences de la géométrie hyperbolique de l'espace \mathbb{H} : la relativité restreinte

Les fondements de la physique et notre expérience quotidienne veulent que la charge électrique soit invariante et quantifiée en multiples d'une charge élémentaire, ne dépendant pas de l'état de mouvement du référentiel.

Nous pouvons donc postuler l'équivalence entre la charge dans un système en mouvement ($x' :$ $x' = x'_0(1 + iu_1 + ju_2 + ku_3)$, avec $u_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x'_0}$) et la charge dans un système stationnaire (x) :

$$\rho(x') = \rho(x)$$

et par conséquent formuler l'équivalence des Lapaciens correspondants en 4 dimensions:

$$\Delta(\varphi(x')) = \Delta(\varphi(x'(x)))$$

De là on obtient, par évaluation, en tenant compte des dérivés intérieures selon la règle de la chaîne :

$$\Delta(\varphi(x')) = \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right)^2 \Delta(\varphi(x')) + \frac{\partial^2 x'}{\partial x^2} \nabla(\varphi(x'))$$

Ceci ne peut être vrai que si

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right)^2 = 1$$

ce qui implique également $\frac{\partial^2 x'}{\partial x^2} = 0$

Sous cette condition, et partant du vecteur $x' = x'_0(1 + iu_1 + ju_2 + ku_3)$, on obtient maintenant:

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right)^2 = \left(\frac{\partial x'_0}{\partial x} \right)^2 (1 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2) = 1$$

d'où il s'ensuit:

$$\left(\frac{\partial x'_0}{\partial x} \right) = \gamma = \frac{1}{\sqrt{(1 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2)}}$$

En substituant $u_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x'_0} = \frac{\partial x'_i}{c \partial t} = \frac{v_i}{c}$ pour $i = 1, 2, 3$, on voit qu'il s'agit du facteur de LORENTZ¹⁴:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2 - \left(\frac{v_3}{c}\right)^2\right)}}$$

Le facteur de LORENTZ tend vers l'infini pour des vitesses $|v|$ s'approchant de la vitesse de la lumière c , au-delà il devient imaginaire. La vitesse de la lumière est donc la vitesse maximale possible pour le transport d'entités physiques dans le 4-espace \mathbb{H} .

La relativité restreinte se présente ici comme une conséquence directe et immédiate de la géométrie hyperbolique du 4-espace \mathbb{H} , sous l'hypothèse que la charge électrique est indépendante du référentiel¹⁵.

Remerciements

J'exprime mes vifs remerciements à Dr. MICHEL SABATIER et au prof. JEAN-PAUL BERRUT pour la relecture de ce manuscrit et pour leurs suggestions constructives.

Références

¹ Les observables physiques sont par conséquent des fonctions de formes carrés des degrés de liberté (des coordonnées) du système physique, impliquant des tenseurs de rang 2 dans les formules respectives.

² ADOLF HURWITZ „Ueber die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen“, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Göttingen; 1895, 1933, 309-316. Voir aussi: FERDINAND GEORG FROBENIUS, « Über lineare Substitutionen und bilineare Formen », in *J. reine angew. Math.*, vol. 84, 1878, 1-63. *Gesammelte Abhandlungen*, vol. 1, p. 343-405.

³ La mathématique des nombres complexes a été développée surtout par LEONHARD EULER (1707-1783).

⁴ DIOPHANTE D'ALEXANDRIE *Arithmetica* (III, 19); le fait que le produit de deux sommes de deux carrés soit toujours de nouveau une somme de deux carrés est aussi connu comme Identité de BRAMAGUPTA ou Identité de FIBONACCI.

⁵ « Découverts » et développés par WILLIAM ROWAN HAMILTON (1805-1865). W.R. HAMILTON (1866) *Elements of Quaternions* University of Dublin Press.

⁶ Cette identité, selon laquelle le produit de deux sommes de quatre carrés est toujours de nouveau une somme de quatre carrés est connue comme Identité d'EULER ; voir *Leonhard Euler: Life, Work and Legacy*, R.E. BRADLEY and C.E. SANDIFER (eds), Elsevier, 2007, p. 193.

⁷ « Découverts » par JOHN THOMAS GRAVES et ARTHUR CAYLEY (1821-1895) ; ce dernier les développa (« Cayley Numbers ») ; voir également: JOHN C. BAEZ, *The Octonions*, Bulletin of the American Mathematical Society, 39, 145-205 (2002).

⁸ Cette identité selon laquelle le produit de deux sommes de huit carrés est toujours de nouveau une somme de huit carrés, a été découverte par le mathématicien FERDINAND DEGEN vers 1818, puis indépendamment par JOHN THOMAS GRAVES (1843) et par ARTHUR CAYLEY (1845).

⁹ RUTH MOUFANG, Zur Struktur von Alternativkörpern, *Math. Ann.* **110** (1935), 416-430.

¹⁰ Appelé ainsi d'après le mathématicien italien GINO FANO (1871-1952).

¹¹ En simplifiant avec le théorème de HELMHOLTZ-HODGE, qui stipule que $\underline{\omega} = \text{rot}(\underline{A}) - \text{grad}(\varphi)$; dans ce qui suit nous ne considérerons que la divergence de cette quantité, $\text{div}(\text{rot})$ étant égal à zéro.

¹² Formulation dans le 4-espace de métrique (+1, -1, -1, -1).

¹³ Ceci ouvre la voie à une théorie de l'électron comme vortex quantique en 4 dimensions. On cherche notamment encore une explication pour la quantisation de la charge électrique, voire même pour la nature du champ de Coulomb, qui d'après des résultats expérimentaux récents est rigidement couplé à la charge ; voir ALESSANDRO CALCETERRA et al. « Measuring Propagation Speed of Coulomb Fields », *arXiv:1211.2913v1 [gr-qc]* 13 Nov 2012.

¹⁴ Cette transformation a été décrite par WOLDEMAR VOIGT, « Ueber das Doppler'sche Princip », *Nachr. Königl. Ges. Wiss. u. Georg-Augusts-Univ. Göttingen*, Dieterichsche Verlags-Buchhandlung, no 2, 1887, p. 41-51. VOIGT y arriva par une analyse des propriétés de l'équation des ondes électromagnétiques.

¹⁵ Ce fait remet en question la pertinence de l'expérience de MICHELSON et MOORLEY comme preuve de l'absence d'un éther lumineux. En fait, cette expérience était conçue sous l'hypothèse d'un espace euclidien ; cependant, dans le 4-espace de géométrie hyperbolique avec métrique négative (+1, -1, -1, -1), elle représente un système inertiel. Un éther lumineux dans la géométrie du 4-espace \mathbb{H} ne serait pas détectable par l'expérience de MICHELSON et MOORLEY.