

**Zeitschrift:** Bulletin de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles = Bulletin der Naturforschenden Gesellschaft Freiburg

**Herausgeber:** Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles

**Band:** 94 (2005)

**Artikel:** Das Universum der Musik : Big Bang oder prästabilierte Harmonie?

**Autor:** Mazzola, Guerino

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-308860>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 29.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# **Das Universum der Musik — Big Bang oder prästabilierte Harmonie?**

GUERINO MAZZOLA

Institut für Informatik der Universität Zürich, AI Lab

Andreasstrasse 15, 8050 Zürich

E-mail: guerino@mazzola.ch

## **Résumé**

Comme la physique, la composition et réflexion musicale subissent la dialectique entre expérience et théorisation. En contraste avec les sciences naturelles, la musique en tant que sujet d'une science humaine expérimentale n'a pas affaire à la nature extérieure, mais à la nature intérieure de l'homme. Avec les outils des mathématiques contemporaines et de l'informatique nous avons réussi à créer et implémenter des modèles formels d'instances clef de l'expression musicale, telles que l'harmonie, le contrepoint, le rythme, la mélodie, ou la théorie de l'interprétation, et d'expérimenter avec ces outils théoriques. Ainsi s'achève la vision du fameux mathématicien HERMANN WEYL d'un langage adéquat mathématique pour la description de faits de la musique. Dans ces théories, l'univers de la musique existante apparaît comme immergé dans une variété fabuleuse d'univers potentiels. Contrepoint et harmonie à la base de gammes exotiques, utilisant des intervalles et accords inouïs, rendent possible l'expérience d'une variation radicale du "clavier bien tempéré" de BACH ou de la sonate "Hammerklavier" de BEETHOVEN. Dans ce potentiel de mondes musicaux, notre musique est-elle un point d'harmonie LEIBNITZienne préétablie ou est-elle sujette à la dynamique explosive des lois encore instables comme l'origine du Big Bang de la physique nous l'a appris ?

## **Zusammenfassung**

Musikalischer Komposition und Reflexion unterliegt wie die Physik einer Dialektik zwischen Experiment und Theoriebildung. Im Gegensatz zu den Naturwissenschaften handelt die Musik allerdings als experimentelle Geisteswissenschaft nicht von der äusseren, sondern von der inneren menschlichen Natur. Mit den Werkzeugen modernster Mathematik und der Informationstechnologie ist es gelungen, Schlüsselpositionen des musikalischen Ausdrucks, wie Harmonielehre, Kontrapunkt, Rhythmik,

Melodik oder Interpretationstheorie, formal zu beschreiben und damit zu experimentieren. Es erfüllt sich damit der vom berühmten Mathematiker HERMANN WEYL geäusserte Wunsch nach einer adäquaten mathematischen Sprache für musikalische Sachverhalte. In diesen Theorien erscheint der existierende musikalische Kosmos als eingebettet in eine atemberaubende Mannigfaltigkeit möglicher Welten. Kontrapunkt und Harmonielehre auf exotischen Skalen mit "unerhörten" Intervall- und Akkord-Konstellationen ermöglichen das Experiment eines Neuentwurfs von BACHS "Wohltemperiertem Klavier", oder von BEETHOVENS "Hammerklavier-Sonate". Ist in diesem Potenzial von Klangwelten unsere Musik ein Punkt prästabilerer LEIBNITZscher Harmonie oder unterliegt sie der explosiven Dynamik noch fliessender Gesetze, wie sie im Ursprung des Big Bang der Physik geherrscht hat?

## Abstract

Much as physics, musical composition and reflection are subject to the dialectics between experiment and theoretical development. In contrast to natural sciences, music, being the object of experimental human sciences, does not deal with external nature, but with the internal human nature. By use of the tools of modern mathematics and information technology, we have succeeded in modeling core positions of musical expression, such as harmony, counterpoint, motifs, rhythm, and expressive performance, and to apply these models in experimental contexts. This meets the vision of the famous mathematician HERMANN WEYL of an adequate mathematical language to deal with musical phenomena. In these theories, the musical reality appears as being embedded in a breathtaking variety of fictitious, but possible worlds. Counterpoint and harmony on exotic scales, using unheard interval and chord constellations, enable experiments with radically new versions of BACH's well-tempered piano, or with BEETHOVEN's "Hammerklavier" sonata. Is our musical reality a point of LEIBNITZian preestablished harmony in this potential of worlds of sound, or is it subject to the explosive dynamics of the still blurred laws, as they happen to appear in the very beginning of the cosmological Big Bang?

## 1. Ein Big Bang in Physik, Biologie und Kultur

Die Entwicklung unserer Kultur im allgemeinen - und der Musik im besonderen - steht in hohem Masse im Spannungsfeld zwischen historischen Fakten und den Zukunftsperspektiven der schöpferischen Phantasie, weil ihre Gesetze weit weniger als jene etwa der Physik festzuliegen scheinen. Wir möchten hier die Evolution der Musikkultur im Rahmen des Urknall-Paradigmas aus der Physik und Biologie diskutieren und die neusten Ansätze einer Mathematischen Musiktheorie vorstellen, welche in diesem Zusammenhang Modelle anbietet, deren Wirkung nicht nur retrospektiv historisierend, sondern auch prospektiv gestaltend ist.

Nachdem 1927 der belgische Astronom GEORGES LEMAÎTRE die Hypothese geäussert hatte, dass das Universum aus einem Punkt heraus entstanden sein könnte, wurde diese als Big Bang bekannte Theorie 1965 von den Astrophysikern ARNO PENZIAS und ROBERT WILSON bestätigt durch die Entdeckung der Hintergrundstrahlung. Demnach entstand das Universum vor rund 14 Milliarden Jahren aus einem infinitesimalen Punktraum. Erst nach der PLANCK-Zeit von  $10^{-43}$  sec begannen sich physikalische Gesetze zu bilden. Die vier Grundkräfte (elektromagnetische -, schwache -, starke - und Gravitationskraft) "kondensierten" sich nach  $10^{-12}$  sec heraus. Nach einer Milliarde Jahren entstanden die Galaxien, dann die schweren chemischen Elemente wie Eisen. Erst vor 4.6 Milliarden Jahren entstand die Erde, die Einzeller vor 3.8 Milliarden Jahren.

Der eigentliche *biologische Big Bang* wird im Kambrium vor 543 Millionen Jahren datiert. Damals entstand innerhalb "nur" 5-10 Millionen Jahren, möglicherweise durch die Hox-Gene verursacht, explosionsartig eine ungeheure Varietät von Vielzellern. Der Mensch (*homo habilis*) dann erschien als Endpunkt vor 2.5 Millionen Jahren.

Erste Spuren eines dritten, neben dem physikalischen und biologischen nun *kulturellen, Big Bang* finden sich in der Musik vor rund 50'000 Jahren; die älteste Mammuthochzeit-Flöte aus dem schwäbischen Jura datiert vor 30'000 Jahren, und die "tanzende Venus" von Galgenberg um 32'000 Jahre. Wir betonen hier die drei Realitätsebenen, Physik, Biologie und Kultur/Musik der Entwicklung, denn es wird oft stillschweigend angenommen, der physikalische Big Bang hätte alle Gesetze geschaffen, während in Wirklichkeit die Ausfaltung der Welt mit der Physik noch weit von ihrem Potenzial entfernt ist, welches biologische und geistige Realität und deren mögliche Gesetze umfasst. Die exzellente Kenntnis der physikalischen Gesetze und die recht gute derjenigen der Biologie stehen im

Gegensatz zur Problematik kultureller Gesetze. Existieren solche Gesetze, sind sie erst im Entstehen begriffen wie die physikalischen Gesetze in der PLANCK-Zeit, oder gibt es keine Chance, jemals solchen Gesetze zu begegnen?

## 2. Das Universum der Musik zwischen Fakt und Fiktion

Wie steht es nun um mögliche Gesetze der Musik? Sind sie von einem Gott "von aussen" in diese Welt eingepflanzt, oder befinden wir uns (noch) im gesetzlosen Zustand? Die erste Hypothese wurde von den PYTHAGOREERN vertreten. Sie suchten durch das Bespielen des Monochords das ewige Gesetz des Kosmos zu erhören, welches in der metaphysischen Gestalt der Tetraktyς konkretisiert ist. Die Tetraktyς besteht aus der bei den alten Griechen magischen Zahl von 10 Punkten, welche als Pyramide von der Basis zu 4 Punkten über 3 und 2 zur Spitze mit einem Punkt dargestellt ist. Die reinen Intervalle der Oktav (Frequenzverhältnis 1:2), der Quint (2:3) und der Quart (4:3) sind in der Tetraktyς dargestellt. JOHANN WOLFGANG VON GOETHE erkannte in diesem Sinn in JOHANN SEBASTIAN BACHs Musik —etwa in der herrlichen Fuge in g-moll im "Wohltemperierten Klavier" — die Harmonie in Gottes Busen vor der Erschaffung der Welt, einer Harmonie, die GOTTFRIED WILHELM LEIBNITZ als die *prästabilierte* beschrieben hat.

Die zweite Hypothese würde uns in einem gesetzlosen Zustand situieren, welcher möglicherweise durch eine *kulturelle* PLANCK-Zeit limitiert ist. Wir wären in dieser Situation im Besitz der Lizenz zur revolutionären Gestaltung musikalischer Gesetze, so, wie es typischerweise die Wende in der Kompositionstechnik darstellt, welche von ARNOLD SCHÖNBERG mit der Zwölftontechnik vorgeschlagen worden ist. Wir können den revolutionären Entwurf neuer Gesetze an der stupenden ersten Komposition mit zwölf Tönen von 1920, dem Walzer op. 23.5 für Klavier, erkennen.

Die dramatische Differenz zur Genese der physikalischen Gesetze ist, dass die Entstehung von Gesetzen der Musik nicht von aussen und aus der historischen Perspektive des Vollendeten beobachtet werden kann, es gilt hier eine Dynamik unserer inneren mentalen Natur, nicht der äusseren der Physik. Selbst unter Zuhilfenahme der Offenbarung aus einer möglicherweise prästabilierten Harmonie wären wir allein gelassen, denn die Gesetze der Tetraktyς sind vollkommen ungenügend zur Herstellung von selbst einfachsten Kompositionen! Entgegen LUDWIG VAN BEETHOVENS Aphorismus, die Musik sei höhere Offenbarung als alle Weisheit und

Philosophie, sind wir, lapidar gesagt, allein gelassen und müssen uns die Gesetze selber erarbeiten.

Wir wollen zwar nicht mit MARTIN HEIDEGGER in seiner Metaphysik fragen: "Warum ist überhaupt Seiendes und nicht vielmehr Nichts?" Diese Frage scheint gegenwärtig noch zu schwierig. Aber wir können mit STEPHEN HAWKING eine etwas weniger fundamentale, dafür aber operationellere Frage angehen, nämlich diejenige nach dem Wie des Seienden: "Warum ist das Seiende so wie es ist, und nicht vielmehr ganz anders?" Dieses Problem beschäftigt die Kosmologen im Zusammenhang mit den alternativen Universen, mit der Hinterfragung unseres Universums: Was war vorher, was war oder ist ausserhalb, was alles hielt Gott noch in seinem Busen, bevor er unser Universum geschaffen hat? Papst JOHANNES PAUL II hatte HAWKING vergeblich ermahnt, diese Fragen nicht zu stellen.

Und so werden auch wir uns fragen, warum wir gerade in dieser und nicht in einer anderen Welt der Musik leben. Und zwar als Gestaltende, nicht als Beobachter von vollendeten Gesetzen. Allerdings ist diese unsere Rolle deswegen nicht automatisch die von freien Schöpfern, wir können zwar Versuche unternehmen, Gesetze zu schaffen, wir sind aber nicht sicher, welche und für wie lange sie gelten werden. Wir müssen uns aber gerade deswegen die mentalen und technologischen Werkzeuge verfügbar machen, um alle möglichen Vektoren einer zukünftigen Entwicklung der Musik auszukundschaften, denn Musik ist fundamental für den Menschen, so sehr, dass, mit FRIEDRICH NIETZSCHE gesagt, das Leben ohne sie ein Irrtum. Es wäre unverantwortlich, hierbei einfach den Zufall walten zu lassen oder die Entwicklung mit weniger Kompetenz voranzutreiben, als uns die Wissenschaft offeriert.

Was ist der Profit der Diskussion alternativer Universen? In der Physik lernen wir unter dem Titel des *anthropischen Prinzips*, dass schon die kleinste Variation der Naturkonstanten (Gravitationskonstante, Lichtgeschwindigkeit, elektrische Elementarladung, etc.) die gesamte Konfiguration des Universums zusammenbrechen lässt: Es ist keine Kohlenstoffchemie und damit kein Leben in der uns bekannten Form möglich. Dies hat tiefe philosophische und theologische Konsequenzen: Ist das Universum so "gestimmt", dass es uns die Existenz ermöglicht? Sind wir in diesem Sinne denn doch der Mittelpunkt der Schöpfung, nicht kosmographisch zwar, aber in der Topologie der Systemparameter? In der Biologie sind wir im SETI-Programm (Search for ExtraTerrestrial Intelligence) intensiv am Suchen von (intelligenten) ausserirdischen Lebensformen. Hätte SETI Erfolg, würde unsere Position im Universum

massiv relativiert — die Fiction-Literatur überbordet an entsprechenden mehr oder weniger horrenden Perspektiven.

Und die Musik? In der Tat tun sich auch hier alternative Universen auf, deren Konfrontation zwischen historischen Fakten, globalen Kulturen und fiktiven virtuellen Welten uns zwingt, die Entwicklung der Musik nicht nur mit Wohlwollen zu betrachten, sondern auch mit der Potenz des Ingenieurs zu entwerfen. Es "treten auf" der Roboter-Pianist WABOT, KOJI SHIBUYAS künstlicher Geiger, die Zeitlupenmusik der japanischen Tradition des No-Theaters, die energetische Free-Jazz-Pianistik eines CECIL TAYLOR und JOHN CAGES Zufallsmusik, bis hin zur fraktalen Big-Bang-Komposition eines GEORGE JETSON und den virtuellen Musikwelten von EDUARDO RECK MIRANDAS künstlichen autonomen Agenten. Wir erleben eine wahre Explosion von Musikwelten und müssen uns fragen, welche Optionen wir haben und wohin die Reise gehen soll. PETER SLOTERDIJK hat in [12] unsere gegenwärtige Situation trefflich beschrieben: "Wir sagen nicht mehr, die Welt ist alles, was uns von Gott so eingerichtet ist, wie es ist — nehmen wir es hin; wir sagen auch nicht, die Welt ist ein Kosmos, ein Ordnungsjuwel — fügen wir uns an der richtigen Stelle ein. Statt dessen meinen wir, die Welt ist alles, was der Fall ist. Nein, auch das ist noch zu scholastisch ausgedrückt, denn in Wahrheit leben wir, als wollten wir uns zum Satz bekennen: Die Welt ist alles, womit wir bis zum Zerbrechen experimentieren."

Allerdings ist es damit nicht das vordringliche Traktandum, das wilde Schöpferische sich selbst zu überlassen, sondern vermehrt Werkzeuge der systematischen wissenschaftlichen Erfassung von Musik zu entwickeln, so, wie es auch ROBERT JOURDAIN [5] fordert: "Vielleicht braucht die Musik im Moment weniger einen neuen BEETHOVEN als einen neuen NEWTON, der systematisch die tiefsten musikalischen Beziehungen analytisch fassbar macht."

### **3. Mit Werkzeugen der Topos-Logik ästhetische Phänomene verstehen**

Das Programm, welches wir hier ganz im Geist der Physiker ins Auge fassen, kann naturgemäß nicht mit Mitteln der traditionellen Musikwissenschaft bewältigt werden, weil diese die historisch gewachsene Musik nicht systematisch dekonstruieren kann, um sie dann in neuen Parametrisierungen gewissermassen als historische Fiktion zu rekonstruieren. Es fehlt ihr dazu einerseits das Interesse und die Argumentationslogik, welche das Historische vor dem Hintergrund eines Systems aufspannen könnte. Bemerkenswert, dass gerade diese wissenschaftstheoretische

Forderung von CARL DAHLHAUS [2], einem führenden Musikwissenschaftler des 20. Jahrhunderts, ungehört verhallt ist. Andererseits fehlt dazu auch das Werkzeug der Formalisierung musicalischer und musiktheoretischer Sachverhalte, welche ein Modell als Instanz in einem Raum virtueller Modelle positionieren könnte. Das geometrisch artikulierte Denken von Sachverhalten als Punkten in Räumen scheint in den Geisteswissenschaften nur mangelhaft ausgebildet, obwohl ja viele fundamentale Denkformen geometrischer Natur sind.

Der Musikwissenschaft diese Werkzeuge zur Verfügung zu stellen ist eine der Leistungen der Mathematischen Musiktheorie (MaMuTh), welche seit 1980 in der westlichen Wissenschaft virulent ist, siehe etwa RUDOLF WILLES Übersicht in [4], oder [10] für eine aktuelle Bestandesaufnahme. Die MaMuTh ist ihrer Natur nach eine mathematische Theorie und kann damit das Charakteristische und Schwierige der Mathematik: die Synthese von Allgemeinheit und Präzision, einsetzen, um die fiktiven Universen der Musik als Varianten von allgemeinen Modellen vorzuschlagen.

Dies war lange nicht denkbar, wie es das Zitat von HERMANN WEYL aus seinem programmatischen Buch "Symmetry" [14] belegt: "All musicians agree that underlying the emotional element of music is a strong formal element. It may be that it is capable of some such mathematical treatment as has proved successful for the art of ornaments. If so, we have probably not yet discovered the appropriate mathematical tools." Die Forscher, welche zu meinem Buch "The Topos of Music—Geometric Logic of Concepts, Theory, and Performance" [9] beigetragen haben, sind überzeugt, dass wir heute die von WEYL 1952 erfragten Werkzeuge zur Verfügung haben. Die Mathematik des 20. Jahrhunderts hat nämlich 1960 eine ihrer massivsten Bewegungen zu einer neuen Sprache in einer fundamentalen Kritik des Punktbegriiffs durch ALEXANDER GROTHENDIECK und WILLIAM LAWVERE in der Topos-Theorie [3] vollzogen. Darin wurden Logik und Geometrie miteinander "verheiratet", eine Leistung, welche eine neue Basis für die Mathematik und neuerdings auch für die Theoretische Informatik etabliert hat [13].

Durch diese Vereinheitlichung von Logik und Geometrie erhält jedes geometrische Objekt automatisch einen logischen Status (und umgekehrt). Objekte in der Topos-Theorie werden damit zu logischen Räumen und Punkte zu logischen Werten. Philosophisch gesehen löst die Topos-Theorie IMMANUEL KANTS Begriffsdefinition in [6] ein: "Man kann einen jeden Begriff, einen jeden Titel, darunter viele Erkenntnisse gehören, einen logischen Ort nennen." Ein Begriff ist also demnach ein Punkt in einem Raum, der logische Natur ist. Was aber ist ein Punkt? EUKLID folgend ist

"punctus cuius pars nulla", also ein begriffliches Atom, ohne Teile. Das gilt auch heute noch, so verweist der Webster dictionary unter dem Stichwort "point" auf lateinisch "pungere" (stechen), was wiederum auf "to prick" verweist, und zirkular erklärt wird mit "to pierce slightly with a sharp point". Der Punktbegriff ist in der Tat ein Begriffsatom, das auf eine elementare Aktion "pungere" baut, so wie es auch TOMMASO CAMPANELLA in seiner "philosophia rationalis" beschrieben hat, dass nämlich das Zeigen (im Verb pungere) die sicherste aller Gewissheiten sei.

GROTHENDIECK und LAVWERE haben genau diese Erkenntnis in ihrer Neubestimmung des Punktbegriffs eingebracht und definieren einen Punkt als Pfeil (in der Topos-Theorie auch Morphismus genannt). Damit wird nicht nur die Pfeilspitze als Zielobjekt, sondern auch die Nocke, der Startpunkt des Pfeils, entsprechend als Subjekt spezifiziert. Durch diesen "subjektiven Gesichtspunkt", den wir *Adresse des Pfeils* nennen, eröffnet sich pro Adresse eine spezifische Ontologie mathematischer Objekte, welche es ermöglicht, das Zielobjekt als Raum aufzufassen, den man von einer frei wählbaren Adresse aus betrachtet. Es ist das Verdienst des japanischen Mathematikers NOBUO YONEDA, gezeigt zu haben, dass man das Zielobjekt aus der Vielfalt der Gesichtspunkte (Pfeile) von allen Adressen aus eindeutig bestimmen kann. Dies ist die YONEDA-Philosophie: Ein Objekt lässt sich vollkommen verstehen durch Integration aller Perspektiven, unter denen man es betrachten kann.

Die YONEDA-Philosophie hat insbesondere für die MaMuTh dramatische Konsequenzen für die Frage, was ein musikalisches Objekt, etwa ein Ton, eine Melodie, ein Intervall, sei. Anschaulich gesprochen gelingt es mit dem GROTHENDIECKSchen Punktbegriff, auch komplexe Transformationen oder gar Mengen von Transformationen als (einzelne!) Punkte aufzufassen. Wenn also der *lieu commun* "c'est le ton qui fait la musique" gilt, dann kann dieser in der MaMuTh gültig bleiben, wenn wir die Verallgemeinerung des Begriffs des Tons im Sinn der Topos-Theorie akzeptieren, worin als Ton auch ein ganzer Akkord, oder eine Melodien, etc. subsumiert wären.

So wird etwa in der Mathematischen Harmonielehre eine einzelne Symmetrie  $f(x)=3x+7$  zur Beschreibung des C-Dur-Dreiklangs  $\{c,e,g\} = \{0,4,7\}$  in der wohltemperierten Chromatik modulo Oktaven, i.e., in der modularen Gruppe  $\mathbb{Z}_{12}$ , angegeben als Bahn ihrer Operation, nämlich durch  $f:0 \rightarrow 7 = f(0)$ ,  $f:7 \rightarrow 4 = f(7)$ ,  $f:4 \rightarrow 7 = f(4)$ . Es ist also der Dur-Dreiklang durch einen einzigen "Punkt", den Notenpfeil  $f: \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$ , beschrieben. Damit lassen sich die wichtigen Akkorde der klassischen Harmonielehre

ohne Rekurs auf die physikalische Theorie der Obertöne herleiten [7]. Auf diesem Ansatz beruht die Rekonstruktion der RIEMANNSchen Harmonielehre (eigentlich die Konstruktion, da diese Theorie ein Torso geblieben war) in der Dissertation von THOMAS NOLL [11].

#### **4. De- und Rekonstruktion von BEETHOVENS "Hammerklavier"-Sonate op. 106**

Wir wollen am Beispiel des Allegro-Satzes der Hammerklavier-Sonate op. 106 von LUDWIG VAN BEETHOVEN die Modellierung im Sinne der MaMuTh in groben Zügen exemplifizieren, für Details sei auf [9] verwiesen. Ein solches Programm realisiert die Ideen einer "analyse créatrice", welche PIERRE BOULEZ in [1] skizziert hat. Es geht ihm dabei um den Gegensatz zur "analyse stérile académique". Dabei soll der problematische Charakter des analysierten Werkes im Sinne eines unerfüllten, offenen Potenzials, welches sich für eine kreative Variation des Modells anbietet, ausgenutzt werden. BOULEZ nennt dieses Verfahren "transduction", also weder Induktion, noch Deduktion, sondern variative Erweiterung des offenen Werkes.

Wir haben diese bei BOULEZ noch abstrakten Vorstellungen ausgearbeitet in dem Sinne, dass das Werk zuallererst in einen Raum von möglichen Werken als Punkt positioniert wird, dass ihm zweitens eine Analyse in einem entsprechenden analytischen Raum als Bildpunkt zugeordnet wird, dass drittens die Koordinaten der Analyse variiert werden, und dass dann schliesslich im Urbild, in der "kreativen Faser" über der variierten Analyse ein neues Werk konstruiert wird, das dem originalen Werk als kreative Variation gegenübergestellt wird.

Die berühmte "Hammerklavier"-Sonate gilt als eines der schwierigsten Klavierwerke überhaupt, und sie ist nicht nur für den Interpreten, sondern auch für die Analyse durchaus problematisch. Zunächst ist ihr harmonischer Verlauf nicht in Deckung mit dem Sonatenschema, wie es ADOLF BERNHARD MARX kanonifiziert hat. Abgesehen von Modulationen, die von diesem Schema abweichen, haben die Beethoven-Spezialisten ERWIN RATZ und JÜRGEN UHDE auch Tonarten-Modulationen ausgemacht, welche sie als "Katastrophenmodulationen" bezeichnen, weil sie sich von normalen Modulationen durch dramatische Zusammenbrüche jeder Tonalität und Motivik auszeichnen. Zum Beispiel ist der relativ normale Tonartwechsel von G-Dur nach Es-Dur in den Takten 124 ff. kontrastiert zur Katastrophenmodulation Es-Dur nach h-moll in den Takten 188 ff., wo die Tonartenvorzeichen aufgehoben sind und die Komposition sich auf eine

dramatische Anhäufung von verminderten Septakkorden reduziert. RATZ hat dieses Auftauchen von Katastrophenmodulationen als Ausdruck des Übergangs von der "Welt" um B-Dur (Haupttonart der Sonate) zu einer "Gegenwelt" um h-moll gedeutet, während UHDE als Charakteristikum solcher Übergänge die Häufung von verminderten Septakkorden erkennt.

Unser Plan ist es, diese Beobachtungen in ein analytisches Modell einzubauen, welches es erlaubt, die Analyseparameter zu variieren, um damit eine Rekonstruktion der Sonate zu ermöglichen. Es ist an dieser Stelle angebracht, die Frage nach den Kriterien für ein solches Modell zu stellen. BOULEZ hat in seiner Forderung nach einer kreativen Analyse betont, dass es nicht darum gehen könne, eine unantastbare Analyse zu bauen, die allen denkbaren Gesichtspunkten der historischen Nachvollziehbarkeit genüge. Sein Blick gilt vor allem der Eröffnung der kreativen Potenz. Wir werden in diesem Sinne nicht versuchen, eine Analyse aus der historischen Lokalisation des Werkes zu geben, sondern eine, die die musiksemiotisch neutralen Strukturen der Sonate im Sinne von JEAN MOLINO am besten als Ausdruck eines kohärenten Denkens entwickelt, ohne die Frage nach der poetischen Entsprechung in BEETHOVENS Bewusstsein zu stellen.

Allerdings muss man für die Modellierung eine Reihe von Fragen beantworten, die in Folge der musikwissenschaftlichen Forschung von RATZ und UHDE offen bleiben:

- Woraus besteht die Welt und ihre Gegenwelt von UHDE?
- Was ist überhaupt die Gesamtheit der Tonarten, die hier zur Diskussion stehen?
- Was ist die Beziehung zwischen Welt und Gegenwelt?
- Existiert ein Plan, der alle Tonartenübergänge regelt, oder sind die Modulationen unabhängige Einzelereignisse?
- Gibt es einen Zusammenhang zwischen den harmonischen und motivisch-thematischen Strukturen?

Um diese Probleme zu lösen, werden wir ein Modulationsmodell entwickeln müssen, welches einige der in op. 106 beobachteten Phänomene erklärt, nämlich:

1. den Gesamtplan der Modulationen
2. die modulatorischen Katastrophen
3. die Rolle des verminderten Septakkordes
4. die Welt-Gegenwelt-Polarität

5. die merkwürdigen Nebeneffekte auch in den normalen Modulationen, wie sie etwa in den Takten 45, 46 nach der Modulation B-Dur nach G-Dur in den Seitensatz und in den Takten 124-127 zu Beginn der oben erwähnten Modulation von G-Dur nach Es-Dur auftreten.
6. die Beziehung zwischen Motivik und Harmonik, evtl. sogar betreffend die verminderten Septakkorde.

Mit Hilfe dieses Modells werden wir dann die Rekonstruktion meiner Sonate op. 3 realisieren können, welche unter dem Namen "L'essence du bleu" eingespielt und publiziert worden ist [8].

## 4.1 Das Modulationsmodell

Unser Modulationsmodell lehnt sich an SCHÖNBERGS klassische Harmonielehre von 1911 an, worin eine Modulation als dreiteiliger Prozess beschrieben wird. Im ersten Teil A wird die alte Tonart neutralisiert, man darf nur Stufen spielen, die diese Tonart nicht eindeutig bestimmen. In Teil B treten die so genannten Modulationsakkorde auf, welche die Wende zur neuen Tonart erzwingen. In Teil C dann werden Akkorde der neuen Tonart gesetzt, welche sie kadenzieren, also eindeutig bestimmen. Beispielsweise kann eine Modulation von C-Dur nach F-Dur so durchgeführt werden, dass man in Teil A die neutralen Stufen  $I_C$  und  $VI_C$  spielt. In Teil B dann gibt Schönberg die Modulationsstufen  $II_F$ ,  $IV_F$  und  $VII_F$  an. In Teil C schliesslich kommen die Kadenzstufen  $II_F$  und  $V_F$ .

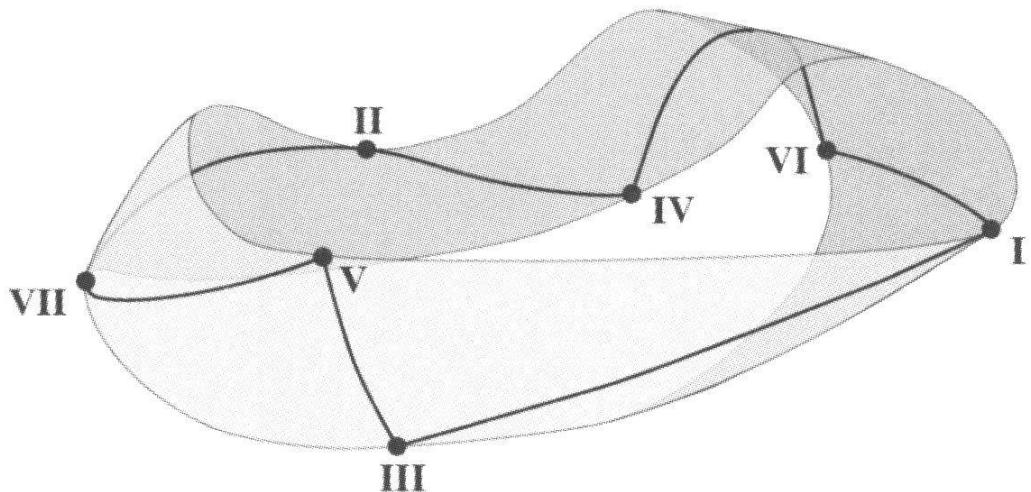
In unserem Modell werden Tonarten als diatonische Tonleitern X modulo Oktave aufgefasst, welche zusätzlich mit den sieben bekannten Dreiklangstufen überdeckt sind. D.h., X ist eine siebenelementige Teilmenge von  $\mathbb{Z}_{12}$ , während die sieben Stufen  $I_X$ ,  $II_X$ ,  $III_X$ ,  $IV_X$ ,  $V_X$ ,  $VI_X$ ,  $VII_X$ , dreielementige Teilmengen von X sind. Für C-Dur haben wir

$$X = \{c=0, d=2, e=4, f=5, g=7, a=9, h=11\},$$

während

$$\begin{aligned} I_C &= \{0, 4, 7\}, II_C = \{2, 5, 9\}, III_C = \{4, 7, 11\}, IV_C = \{5, 9, 0\}, V_C = \{7, 11, 2\}, \\ VI_C &= \{9, 0, 4\}, VII_C = \{11, 2, 5\}. \end{aligned}$$

Die anderen elf Tonarten sind entsprechend transponiert. Wir notieren eine Tonart auf der Skala X mit  $X^{(3)}$ . Es wäre also C-Dur durch C<sup>(3)</sup> symbolisiert. Eine Tonart wird geometrisch dargestellt als harmonisches Band wie folgt. Man zeichnet die sieben Stufen als Punkte im Raum und verbindet alle Tripel von Stufen, welche einen Ton gemeinsam haben (z.B. die Stufen I, III, V), zu einer Dreiecksfläche. Die so entstehenden sieben Dreiecksflächen bilden zusammen ein Möbiusband, welches nach einer Idee von SCHÖNBERG *harmonisches Band* heisst, siehe **Bild 1**.



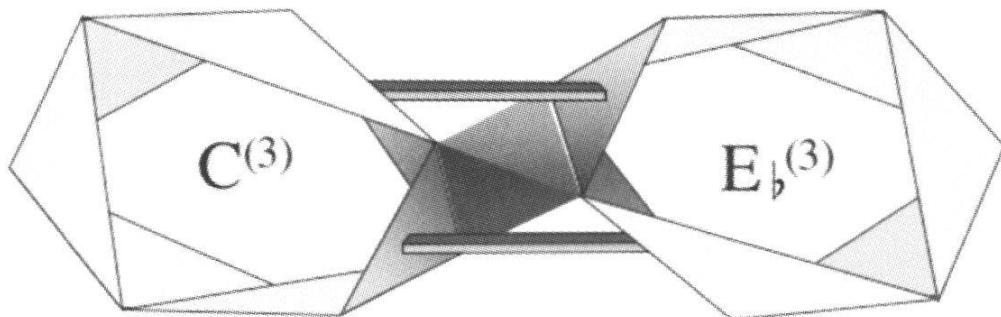
**Bild 1:** Das harmonische Band einer Tonart.

Die Menge der 12 Tonarten notieren wir entsprechend mit  $\text{Dia}^{(3)}$ . Eine Moll-Tonart wird hier also identifiziert mit der entsprechenden parallelen Dur-Tonart, also etwa h-moll durch D-Dur. Trotz dieser groben Vereinfachung, welche die Tonika und damit die Modalität (ionischer Modus gegen äolischen Modus) ignoriert, funktioniert unser Modell für unsere Analyse der "Hammerklavier"-Sonate.

Um Modulationen von Tonart  $X^{(3)}$  zu Tonart  $Y^{(3)}$  zu definieren, beachtet man, dass es genau zwei Symmetrien s gibt, welche die Skala X und ihre Stufen in die Skala Y und deren Stufen transformiert, nämlich eine Transposition (Verschiebung) und eine Umkehrung (Spiegelung). Ferner existieren fünf Möglichkeiten, eine Tonart  $X^{(3)}$  durch eine kleinstmögliche Anzahl von Stufen zu kadenzieren, d.h. eindeutig zu bestimmen innerhalb von  $\text{Dia}^{(3)}$ . Wir bezeichnen diese fünf Kadenzzen mit  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$ . Die klassische Kadenz  $k_1$  beispielsweise ist durch die Angaben der Stufen  $IV_X$  und  $V_X$  definiert. Dann definieren wir als Modulation von  $X^{(3)}$  nach  $Y^{(3)}$  die

Angabe eines Paares (s,k), bestehend aus einer Symmetrie s:  $X^{(3)} \rightarrow Y^{(3)}$  sowie einer der fünf Kadenzen k.

Soweit ist eine Modulation aber noch nicht geeignet, die von SCHÖNBERG angegebenen Modulationsakkorde zu generieren. Dazu benutzen wir eine Analogie zur Teilchenphysik. Dort werden Kräfte durch Quanten materialisiert, etwa die elektromagnetische Kraft durch das Photon. Wir interpretieren hier die Modulation (s,k) als Kraft, welche (vermittels der Symmetrie s)  $X^{(3)}$  in  $Y^{(3)}$  verwandelt, und suchen nun ein zugehöriges "Modulationsquant" M als Materialisierung dieser Kraft. Es soll in der Tat M eine Menge von Tönen in  $\mathbb{Z}_{12}$  sein, so dass einerseits s eine innere Symmetrie von M ist, also  $s(M) = M$ , und andererseits soll M minimal sein, derart, dass es alle Stufen der Kadenz k auf  $Y^{(3)}$  enthält. Diese Eigenschaften kennzeichnen M im wesentlichen, und es lässt sich beweisen, dass es ein solches M tatsächlich gibt für jedes Paar von Tonarten und einer geeigneten Modulation. Es kann weiterhin auch M überdeckt werden durch Dreiklangsstufen aus  $X^{(3)}$  und  $Y^{(3)}$ . Damit besitzen wir einen Kandidaten für die Modulationsstufen, nämlich die Stufen der Zieltonart  $Y^{(3)}$ , welche in M enthalten sind. Man kann ein Quant wieder wie beim harmonischen Band durch die Überdeckung mit den Stufen aus  $X^{(3)}$  und  $Y^{(3)}$  visualisieren, **Bild 2** zeigt ein Quant (in dunklem Grau) für die Modulation von C-Dur nach Es-Dur. Die Modulationsstufen sind hier  $\text{II}_{\text{Es}}$ ,  $\text{III}_{\text{Es}}$ ,  $\text{V}_{\text{Es}}$ ,  $\text{VII}_{\text{Es}}$ . Es sind dies die vier Punkte im Bild, welche das Quant und das harmonische Band von Es-Dur verbinden.



**Bild 2:** Modulationsquant für die Modulation von C-Dur nach Es-Dur (Mitte, dunkel gefärbt). Das Quant ist vierdimensional, was durch die beiden horizontalen Balken gekennzeichnet ist.

Das Erstaunliche an diesem Modell ist, dass die so errechneten Modulationsschritte mit jenen, die SCHÖNBERG in seiner Harmonielehre angibt, übereinstimmen. Der Vorteil unseres Modells ist, dass hier die

Modulationsakkorde systematisch aus einem einheitlichen Procedere gewonnen werden, und nicht wie bei SCHÖNBERG von Fall zu Fall und nicht für alle Tonart-Verwandtschaften.

## 4.2 Die Modellierung der RATZ-UHDE-Theorie

Mit diesem Modell wollen wir nun die RATZ-UHDE-Hypothese von der Welt/Gegenwelt, der Rolle des verminderten Septakkordes und der Katastrophenmodulationen diskutieren. Unsere mathematische Variante jener Hypothese lässt sich knapp fassen als

These: Die inneren Symmetrien  $s$  des verminderten Septakkordes  $C_{\#}^{-7} = \{1, 4, 7, 10\}$  fungieren als erlaubte Modulationskräfte und definieren zwei Welten: Jene acht Tonarten  $X^{(3)}$  in Dia<sup>(3)</sup>, welche durch solche Symmetrien  $s$  aus B-Dur erreichbar sind,  $s: B^{(3)} \rightarrow X^{(3)}$ , bilden die

$$\text{Welt} = \{ B^{(3)}, D\text{es}^{(3)}, E^{(3)}, G^{(3)}, A^{(3)}, C^{(3)}, E\text{s}^{(3)}, G\text{es}^{(3)} \},$$

während die restlichen Tonarten der

$$\text{Gegenwelt} = \{ D^{(3)}, F^{(3)}, A\text{s}^{(3)}, H^{(3)} \}$$

gerade jene vier  $Y^{(3)}$  sind, welche durch diese Symmetrien  $s$  aus h-moll (d.h. D-Dur) erreichbar sind,  $s: D^{(3)} \rightarrow Y^{(3)}$ . Welt und Gegenwelt haben keine gemeinsamen Tonarten.

Diese These ist also mit der Einschränkung der erlaubten Modulationsmittel (Symmetrien) verbunden, welche durch die inneren Symmetrien des verminderten Septakkordes zugelassen sind. Das bedeutet, dass unter dieser Voraussetzung keine Modulation möglich ist zwischen zwei Tonarten aus verschiedenen Welten, also etwa Es-Dur nach h-moll. Hingegen ist eine Modulation von G-Dur nach Es-Dur oder von B-Dur nach G-Dur durch eine Symmetrie erlaubt. Es zeigt sich, dass alle Modulationen im Allegro-Satz von op. 106 diesen Restriktionen genügen, dass also alle Übergänge von Welt zu Gegenwelt und zurück Katastrophenmodulationen sind und die Ursache der Katastrophe, jene verminderten Septakkorde, bringen, während alle anderen Modulationen normal vonstatten gehen, d.h.

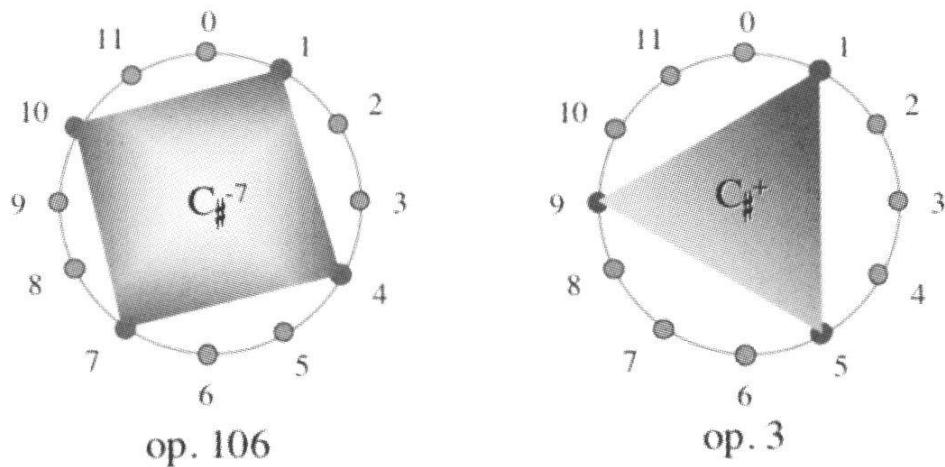
unserem Modell genügen, und schliesslich auch die Symmetrien, welche das Modell voraussagt, in der Konfiguration der Töne in jenen Modulationen in Evidenz treten.

Wir haben hiermit alle Traktanden der Modellierung erfüllt, bis auf die Frage nach dem Zusammenhang der Motivik mit der harmonischen Struktur. Ein solcher kann effektiv nachgewiesen werden in folgendem Sinne. Der verminderte Septakkord ist eine Messiaen-Skala mit verminderter Transposition, d.h., die Transposition um eine kleine Terz (3 Halbtone) führt den Akkord in sich selber über. Was in der C-Dur-Skala erst nach 12 Halbtönen möglich ist, geschieht also schon nach 3 Halbtönen. Es ist mit anderen Worten die kleine Terz so etwas wie die Oktav für diesen verminderten Septakkord. Wie kann man daraus eine Motivik ableiten? Die einfachste Melodie in dieser 3-periodischen Tonhöhenorganisation ist ein Zickzack-Motiv, welches sich um eine kleine Terz rauf und runter bewegt, also etwa

$$Z_3 = 0,1,2,3,2,1,0,1,2,3,2,1,0,1,\dots$$

Wenn man dieses Motiv verschiedenen Symmetrien, wie Transpositionen, Umkehrungen, Krebs, Krebsumkehrungen, Streckungen, etc. unterzieht, entsteht ein paradigmatisches Feld von Motiven, welches in op. 106 die Motivik dominiert.

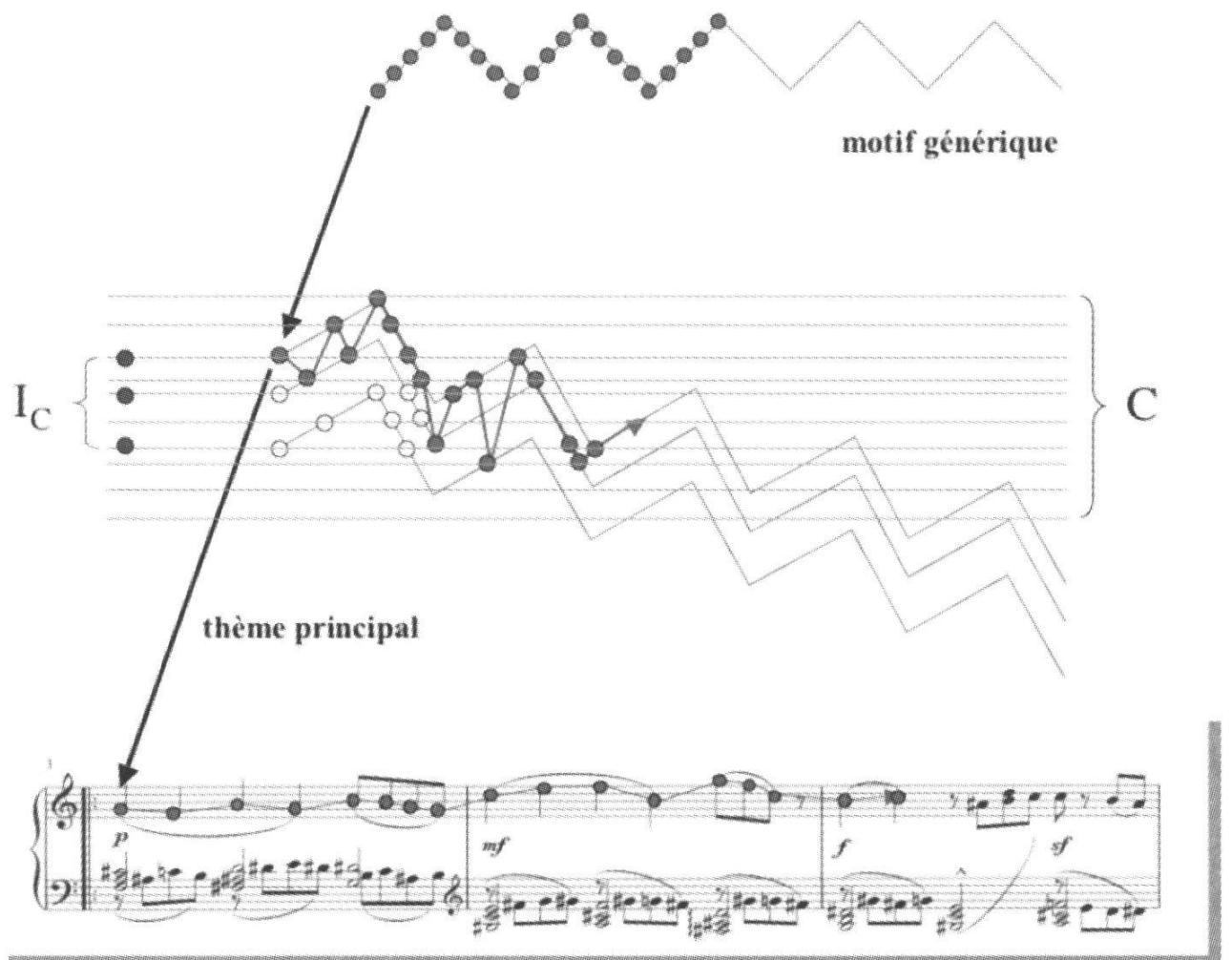
*Wir können also sagen, dass die harmonische und die motivisch-thematische Arbeit aufs engste miteinander verknüpft sind durch den verminderten Septakkord  $C_{\sharp}^{-7}$  und seine Symmetrien.*



**Bild 3:** Verminderter Septakkord und übermässiger Dreiklang als Basisstrukturen der Sonate op. 106 (BEETHOVEN) und ihrer Rekonstruktion op. 3 (MAZZOLA).

## 4.3 Rekonstruktion durch Variation der analytischen Parameter

Die Rekonstruktion muss ausgehen von der Grundstruktur der Analyse, nämlich dem Septakkord  $C_{\#}^{-7}$  und seiner Symmetriegruppe. Dieser Akkord ist durch die kleine Terz gekennzeichnet, und durch nichts Anderes ausser ihrem Ansatz,  $cis = 1$ , von wo aus sie zur Erzeugung des Akkordes einsetzt. Es liegt daher nahe, die Variation dieser analytischen Basisstruktur durch Ersatz der kleinen Terz durch die grosse Terz mit ihren vier Halbtönschritten zu vollziehen, was statt des verminderten Septakkordes von  $cis$  aus den übermässigen Dreiklang  $C_{\#}^+ = \{cis = 1, f = 5, a = 9\}$  definiert. Bild 3 zeigt die beiden analytische Basisakkorde. In der Rekonstruktion ist auch die Motivik eingeschlossen, wobei nun anstatt dem Zickzack  $Z_3 = 0,1,2,3,2,1,0,1,2,3,2,1,0,1,\dots$  über die kleine Terz ein Zickzack  $Z_4 = 0,1,2,3,4,3,2,1,0,1,2,3,4,3,\dots$  über die grosse Terz verwendet wird zur Konstruktion der Motivik. Die Rekonstruktion der Sonate ist in [7] ausführlich beschrieben. Sie wird durch die obigen Basisstrukturen harmonisch und motivisch-thematisch bis in kleinste Details geregelt. Bild 4 zeigt die Konstruktion des Hauptthemas aus einer Transformation des Zickzacks  $Z_4$ . Dabei wird zuerst das Zickzack affin transformiert, dann werden die Töne der transformierten Version mit der C-Dur-Skala geschnitten, und davon wird die obere Kontur extrahiert, welche das Hauptthema stellt.



**Bild 4:** Konstruktion des Hauptthemas von op. 3 "L'essence du bleu" aus dem motivischen Zickzack  $Z_4$ .

## 5. Der Fuxsche Kontrapunkt, eingebettet in Kontrapunktwelten der Zukunft

Während dem ersten Beispiel einer Konstruktion der Variation historisch-faktischer Komposition ein Modell der Modulation zugrunde liegt, was als solches nicht verändert wird, werden wir nun ein mathematisches Modell des Kontrapunktes diskutieren, welches nicht Anlass zu kompositorischen Variationen innerhalb des Modells, sondern in einer *Variation des Modells selber* gibt, für Details verweisen wir auf [9]. Um in der Analogie zur Physik zu bleiben, könnte man die Variation im Modulationsmodell mit einer Variation der Naturkonstanten vergleichen, während wir im Folgenden die Naturgesetze selber ändern werden. In diesem Kontext stellt sich natürlich die Frage des anthropischen Prinzips verschärft: Können wir aus der Variation der Gesetze des Kontrapunktes lernen, weshalb

gerade diese Gesetze, etwa das scharfe Quintparallelenverbot, so prominent aus der historischen Entwicklung des Kontrapunktes hervorgegangen sind. Man muss dazu wissen, dass der Kontrapunkt in der Bestimmung der Konsonanten und dissonanten Intervalle und in der Stabilisierung der Kontrapunktregeln, wie dies im "gradus ad parnassum" eines JOHANN JOSEPH FUX festgeschrieben ist, das Ende einer 700 Jahre dauernden Entwicklung seit dem 9. Jahrhundert darstellt. Man muss dazu auch wissen, dass diese Regeln nicht physikalisch, sondern kompositorisch konzipiert und relevant sind. Es ist gerade in der ersten Gattung Note-gegen-Note eine Charakteristik dieses Ansatzes, dass die Quart (Intervall von 5 Halbtonschritten) entgegen der physikalischen Beurteilung dissonant ist. Diese Setzung wurde von CARL DAHLHAUS als ungelöstes Faktum erkannt, welches seines Erachtens einer satztechnischen Überlegung entsprungen sein muss.

Vor diesem Hintergrund scheint es vordringlich, ein Modell des Kontrapunktes zu entwerfen, welches die zugrunde liegenden Strukturen von Konsonanzen, Dissonanzen und den Kontrapunktregeln in einen systematischen und satztechnischen Zusammenhang stellt.

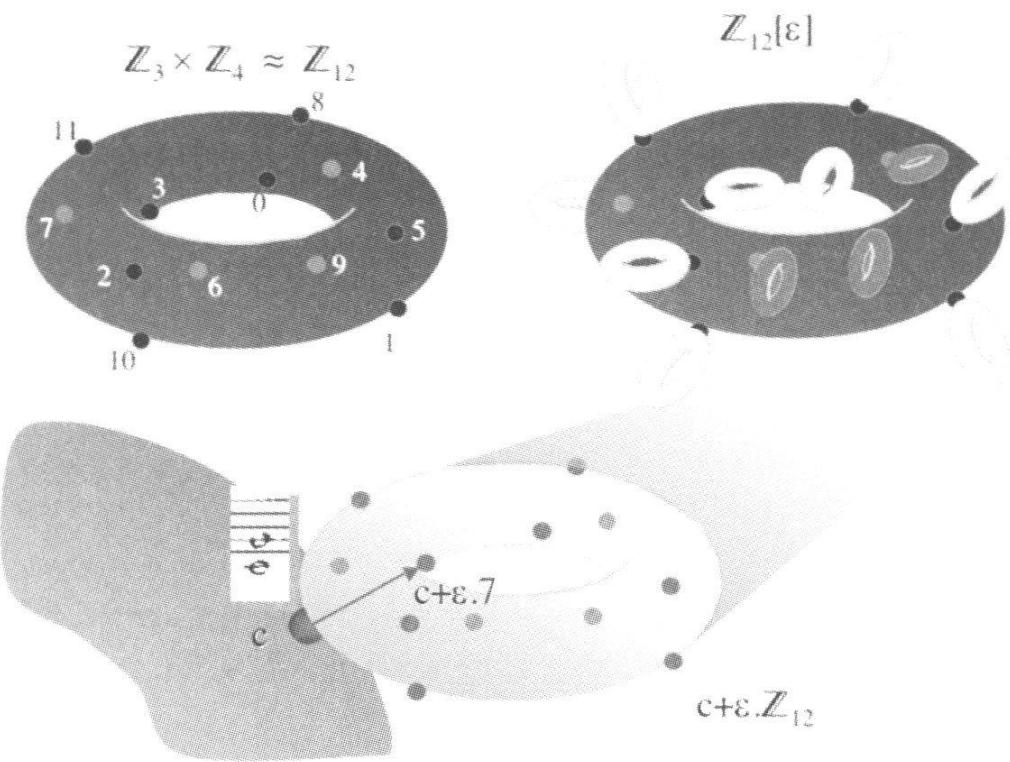
## 5.1 Intervalle als Tangenten am Torus der Tonhöhen

Die klassische Darstellung von Tonhöhen modulo Oktave, die so genannten Tonigkeiten in der herkömmlichen Musiktheorie, welche wir bisher in der modularen Gruppe  $\mathbb{Z}_{12}$  geortet hatten, stellt diese Punkte als Ecken auf einem regulären 12-Eck dar. Es ist dies allerdings eine naive mathematische Darstellung, denn die inneren Symmetrien von  $\mathbb{Z}_{12}$  lassen die Abstände von solchen Punkten nicht invariant. So wird eine Quint, die Differenz von 7 Halbtonschritten, durch die innere Symmetrie der Quarttransformation  $f(x)=5 \cdot x$  in eine Septime zu  $11=5 \cdot 7$  Halbtonschritten verwandelt. Das heisst, dass die Abstandszahl der Halbtonschritte, die Zahl, welche ja in der Kreisdarstellung von  $\mathbb{Z}_{12}$  sich anbietet, nicht die innere Struktur dieser Gruppe reflektiert. Die Gruppentheorie bietet allerdings hier mit der SYLOW-Zerlegung die Lösung an, in der alle inneren Symmetrien von  $\mathbb{Z}_{12}$  abstandserhaltend sind.

Dies geschieht durch einen Isomorphismus von Gruppen  $s: \mathbb{Z}_{12} \rightarrow T = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ , der die Tonigkeit  $z$  in das Paar  $(z \bmod 3, -z \bmod 4)$  abbildet. Damit geht eine grosse Terz 4 in  $(1,0)$  und eine kleine Terz 3 in  $(0,1)$  über.

Umgekehrt wird das Paar  $(x,y)$  durch  $3.x+4.y$  in eine Tonigkeit überführt, und zwar so, dass die beiden Abbildungen zueinander invers sind. Anschaulich gesagt führt  $s$  die Tonhöhendifferenz  $z$  in die Anzahl  $x$  grosser und die Anzahl  $y$  von kleinen Terzen über, aus welchen beiden sich  $z$  zusammensetzt. Die Gruppe  $T$  wird deshalb *Terztorus* genannt. Sie ist nämlich als Menge von zwölf Punkten auf einem Torus dargestellt, wobei die horizontalen Kreise die Kleinterzzyklen in  $\mathbb{Z}_4$  und die vertikalen Kreise die Grossterzzyklen in  $\mathbb{Z}_3$  darstellen, siehe Bild 5, links oben. Wenn wir als Abstand  $d(z,w)$  zweier Tonigkeiten die minimale Anzahl von Klein- oder Grossterzschriften zwischen den Punkten  $s(z)$  und  $s(w)$  auf dem Terztorus definieren, dann folgt leicht, dass alle (affinen) inneren Symmetrien auf  $\mathbb{Z}_{12}$  den Abstand  $d(z,w)$  erhalten. Dieser Abstand ist also auf dem Terztorus die minimale Anzahl von horizontalen oder vertikalen Schritten, um vom Punkt  $z$  zum Punkt  $w$  zu kommen.

In dieser Darstellung lassen sich nun Intervalle anschaulich als Tangenten an den Torus verstehen, siehe Bild 5. Formal wird ein Intervall als Ausdruck  $i = c + \varepsilon \cdot d$  geschrieben, wobei  $c$  der cantus-firmus-Ton des Intervalls ist, während  $d$  die Differenz zwischen dem cantus firmus und dem Diskantton des Intervalls ist. Dabei wird bei hängendem Kontrapunkt der Diskant als  $c-d$ , bei schweifendem Kontrapunkt aber als  $c+d$  berechnet. Die Menge dieser Intervalle heisst *Tangentialtorus* und wird mit  $\mathbb{Z}_{12}[\varepsilon]$  bezeichnet. Man addiert und multipliziert Intervalle wie in der algebraischen Geometrie üblich wie Polynome, ausser dass der infinitesimale Charakter der Tangenten durch die Regel  $\varepsilon \cdot \varepsilon = 0$  ausgedrückt wird; so ist beispielsweise  $(1+\varepsilon \cdot 7) \cdot (1+\varepsilon \cdot 5) = 1$ .



**Bild 5:** Links oben: Torusdarstellung der Gruppe  $\mathbb{Z}_{12}$  der Tonigkeiten; horizontal die Kleinterzyklen 0-3-6-9, 1-4-7-10, 2-5-8-11, vertikal die Grossterzyklen 0-4-8, 1-5-9, 2-6-10, 3-7-11. Rechts oben: Der Tangentialtorus enthält zu jeder Tonigkeit  $c$  einen kleinen Tangententorus, dessen Punkte  $c + \epsilon \cdot d$  (unten) die Intervalle mit der Intervallzahl  $d$  sind.

Die konsonanten Intervalle bilden die Menge  $K_\epsilon$  jener 72 Intervalle  $c + \epsilon \cdot k$  des Tangentialtorus, deren Intervallzahl  $k$  aus der Menge  $K$  der sechs Zahlen 0 (Prim), 3 (kleine Terz), 4 (grosse Terz), 7 (Quint), 8 (kleine Sext), 9 (grosse Sext) stammt. Die restlichen 72 Intervalle heissen dissonant, ihre Menge  $D_\epsilon$  besteht aus den Intervallen  $c + \epsilon \cdot d$ , deren Intervallzahl  $d$  aus der Menge  $D$  der sechs Zahlen 1 (kleine Sekund), 2 (grosse Sekund), 5 (Quart!), 6 (Tritonus), 10 (kleine Sept), 11 (grosse Sept) stammt. Der Tangentialtorus  $\mathbb{Z}_{12}[\epsilon]$  ist also disjunkte Vereinigung von  $K_\epsilon$  und von  $D_\epsilon$ .

## 5.2 Das Kontrapunktmodell aus der inneren Symmetrie der Intervalle

Das Wunder dieser durch die historische Entwicklung des Kontrapunktes stabilisierten Dichotomie der Intervalle ist, dass die konsonanten und dissonanten Intervalle im wesentlichen durch eine einzig mögliche Symmetrie ineinander transformiert werden können. Es ist dies die Symmetrie, welche auf Intervallzahlen durch die Formel  $AK(k) = 5 \cdot k + 2$

operiert, wobei  $\text{AK} \cdot \text{AK} = \text{Id}$ . Sie transformiert also auch rückwärts Dissonanzzahlen in Konsonanzzahlen, d.h., wir haben  $\text{AK}(K) = D$  und  $\text{AK}(D) = K$ . Dabei werden folgende Paare von Konsonanzen und Dissonanzen gebildet:  $0 \leftrightarrow 2, 3 \leftrightarrow 5, 4 \leftrightarrow 10, 7 \leftrightarrow 1, 8 \leftrightarrow 6, 9 \leftrightarrow 11$ . Diese so genannte *Autokomplementaritätssymmetrie* lässt sich auch auf den Tangentialtorus übertragen. Betreffend die signifikante Sensibilität des menschlichen Tiefen-EEG für diese Symmetrie in Hippocampus und Hörrinde sei auf [9] verwiesen.

Die Regeln des Kontrapunktes erster Gattung Note-gegen-Note beschreiben, welche Intervallfolgen  $i_1, i_2, \dots, i_n, i_{n+1}, \dots, i_N$  erlaubt sind und welche verboten. Die Regeln beschreiben im wesentlichen, welche unmittelbaren Intervallfolgen  $i_n, i_{n+1}$  zugelassen sind. Die Grundregel ist dabei, dass nur konsonante Intervalle, also Elemente aus  $K_\varepsilon$ , zugelassen sind. Die prominenteste Regel sagt dann, dass Quintparallelen grundsätzlich verboten sind, es darf also  $i_n = c_n + \varepsilon \cdot 7, i_{n+1} = c_{n+1} + \varepsilon \cdot 7$  nie auftreten. Unter Benutzung der Autokomplementaritätssymmetrie AK konnten wir ein Modell des Kontrapunktes entwickeln, bei welchem sich die erlaubten Intervallfolgen aus rein mathematischen Gründen ergeben, also nicht mit Rekurs auf psychologische Argumente, wie es bei den Klassikern der Fall ist. Die nach diesem mathematischen Modell erlaubten Intervallfolgen decken sich weitestgehend mit den klassischen Lizenzen. Insbesondere folgt auch das Quintparallelenverbot als einziges striktes Parallelenverbot. Ferner lässt sich zeigen, dass die Regeln unseres Modells auch mit starken, aber kompositorisch relevanten Einschränkungen gelten: Selbst wenn man nur die Töne aus einer Dur-Skala für cantus firmus und discantus zulässt und in diesem Kontext zuerst eine beliebige cantus-firmus-Melodie setzt, lassen sich erlaubte Intervallfolgen mit aufsteigender Zeitordnung immer finden. Es gibt also auch für Dur-Skalen keinen cul-de-sac in unserem Modell.

### **5.3 Erweiterung des Modells auf Variationen der Konsonanz-Dissonanz-Dichotomie**

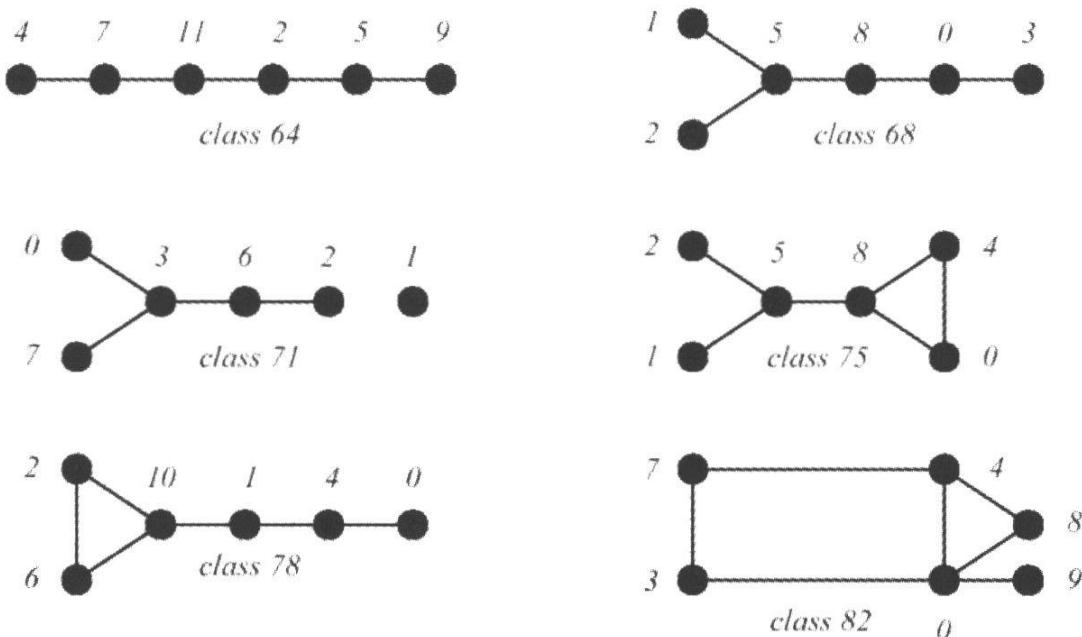
Die Konsonanz-Dissonanz-Dichotomie

$$K/D = \{0, 3, 4, 7, 8, 9\} / \{1, 2, 5, 6, 10, 11\}$$

wurde durch die historische Entwicklung herausdestilliert aus einer Vielfalt von temporären Intervall-Dichotomien. Warum gerade diese Dichotomie, was zeichnet sie aus? Oder ist sie zufällig gewählt worden, und

wir könnten mit vielen anderen Dichotomien genauso gut Kontrapunkt treiben? Diese Frage stellt sich deshalb nicht nur in Bezug auf historische Faktizität, sondern muss auch jene interessieren, die sich als Theoretiker oder als Komponisten über die Zukunft der Musik in neuen Formen des Kontrapunktes Gedanken machen. Wir stehen hier exakt vor der Situation der Physik, welche über die Wahl der physikalischen Gesetze nachdenken muss vor dem Hintergrund ihrer Variation: Warum gerade dieses Universum? Warum diese Maxwell-Gleichungen, warum die Lorentz-Transformation, warum dieses Gravitationsgesetz, warum  $E = m.c^2$ ? Leben wir wirklich in der besten aller möglichen Welten?

In unserem mathematischen Modell tritt wie in der Physik auch eine "Formel" auf, nämlich die Autokomplementaritätsfunktion  $AK(x) = 5.x+2$ , welche die K/D-Dichotomie als symmetrische Dichotomie charakterisiert. Könnte man auch andere AK-Symmetrien und andere Intervall-Dichotomien verwenden? In der Physik wäre die analoge Frage: Wie könnte man die Maxwell-Gleichungen variieren, ohne Physik, Chemie und andere Naturwissenschaften nur noch sehr eingeschränkt treiben zu können? Wir wissen ja, dass die Variation der Naturkonstanten der Kohlenstoffchemie den Garaus machen würde. Aber wäre evtl. eine andere Chemie nicht genauso variantenreich?



**Bild 6:** Die sechs starken Dichotomien. Darunter bilden die K/D-Dichotomie der Klasse 82 sowie die Dur-Dichotomie I/J der Klasse 64 aufgrund ihrer Geometrie ein polares Paar.

Im Kontrapunkt müsste man also den Reichtum des Kontrapunktes beschreiben können und entsprechend Varianten der AK-Symmetrie untersuchen. Wir müssen aber vorab wissen, in welchem Raum wir AK überhaupt variieren wollen! Dazu wollen wir den Strukturrahmen nochmals unter die Lupe nehmen, in welchem der Kontrapunkt modelliert wurde. Wir haben für das Kontrapunktmodell eine Dichotomie K/D der Intervallzahlen aus  $\mathbb{Z}_{12}$  in zwei gleich grosse Hälften K und D benutzt, ferner die einzige Symmetrie  $AK:K \rightarrow D$  zwischen den beiden Hälften. Wie viele solche Dichotomien auf  $\mathbb{Z}_{12}$  gibt es unter allen 924 Dichotomien X/Y zu je 6 Intervallen? Man sieht sofort, dass mit jeder solchen Dichotomie X/Y, die wir *stark* nennen wollen, auch jede Transformation  $s(X)/s(Y)$ , wo  $s(x) = a.x+b$ ,  $a$  invertierbar (also  $a = 1,5,7,11$ ), auch stark ist. Es gibt unter den 34 Dichotomieklassen von Dichotomien, welche durch solche Transformationen erzeugt werden, genau 6 Klassen starker Dichotomien, welche durch die in Bild 6 gezeigten Repräsentanten beschrieben sind (die Klassennummern stammen aus der Klassifikationstheorie und spielen hier keine Rolle). Dabei werden jeweils zwei Intervallzahlen durch eine Linie verbunden, falls ihr Abstand eine Terz ist. Während K/D die Autokomplementaritätssymmetrie  $AK(x) = 5.x+2$  besitzt, ist die Dur-Dichotomie I/J mit der Symmetrie  $AK(x) = 11.x+5$  bestückt. Diese Dichotomie tritt auf, wenn man für die eine Hälfte in der C-Dur-Skala die sechs eigentlichen Intervalle von der Tonika aus nimmt: c-d ergibt 2, c-e ergibt 4, etc., d.h.  $I = \{2,4,5,7,9,11\}$ , daher ihr Name.

JENS HICHERT konnte zeigen, dass man in der Tat das Kontrapunktmodell, welches wir für K/D entwickelt hatten, für alle anderen fünf starken Dichotomien auch anwenden kann zur Berechnung erlaubter Schritte, siehe [9] für Details. Dabei muss man also sich einschränken auf Intervalle, deren Intervallzahlen aus der einen Hälfte einer ausgewählten starken Dichotomie stammen. Das bedeutet in unserer Analogie zur Physik, dass man also grundsätzlich auch mit anderen MAXWELL-Gleichungen, welche wichtige Eigenschaften, wie etwa LORENTZ-Invarianz, mit den ursprünglichen Gleichungen teilen, Physik treiben kann. Natürlich stellt sich nun die Frage nach den Unterschieden, welche das Treiben von Kontrapunkt in diesen sechs Universen aufzeigen.

## 5.4 Die Kontrapunkt-Universen zwischen den polaren K/D- und Dur-Dichotomien

Da wir nun wissen, dass man grundsätzlich in allen sechs starken Dichotomien Kontrapunkt treiben kann, stellt sich die Frage nach den Unterschieden und Gemeinsamkeiten dieser Universen. Zunächst zeigt die geometrische Gestalt der starken Klassen, dass K/D eine ausgezeichnete Position unter allen starken Dichotomien einnimmt. Aus Bild 6 entnimmt man, dass der durchschnittliche Abstand unter den sechs Intervallen, also der "Durchmesser" einer Dichotomiehälften für K/D am kleinsten ist, während sie für die Dur-Dichotomie am grössten ist. Das heisst, dass die Konsonanzen am engsten gruppiert sind, während die eigentlichen Dur-Intervalle maximal auf dem Terztorus verteilt sind. Ferner werden die konsonanten Intervalle durch AK auch am weitesten wegtransformiert (maximale Spannweite), während die eigentlichen Dur-Intervalle zu ihren transformierten am nächsten zu liegen kommen. Zusammenfassend: *Für K/D sind die beiden Dichotomiehälften maximal separiert, während I/J polar dazu die beiden Hälften am schwächsten separiert unter allen sechs starken Dichotomien. Die historische Wahl von K/D ist also gleichzeitig eine geometrisch ausgezeichnete. Im Raum aller starken Dichotomien ist K/D geometrisch gesehen die "beste aller möglichen Lösungen".*

Damit ist allerdings noch nicht viel gesagt über das Operieren des Kontrapunktes, über den Reichtum der Regeln in den sechs Kontrapunkt-Universen. Könnte man auch im Kontrapunkt über I/J ein so reiches Werk komponieren wie BACHs Wohltemperiertes Klavier? Oder ergibt dieses Universum ein armseliges kleines Kompositionssrepertoire, weil einfach zu viele Regeln jede Phantasie abwürgen? Auch hier stehen wir vor einer Analogie mit der Kosmologie, wo man sich fragen kann, welche alternativen Universen möglicherweise eine ultrakurze Lebenszeit haben und danach wieder zu Punkten schrumpfen.

Zunächst ist es ein Fakt, dass die K/D-Dichotomie am meisten so genannte kontrapunktische Symmetrien hat, welche erlaubte Intervallfortschreitungen generieren. Ferner gelten für K/D auch am wenigsten Verbote für Intervallfortschreitungen, und auch hier ist I/J wieder polar zu K/D positioniert. Ein gutes Kriterium für die Operabilität einer Kontrapunkttheorie ist ferner die Frage, wie gut man unter der Bedingung Kontrapunkt treiben kann, dass die erlaubten Töne auf bestimmte Skalen

einschränkt werden. Wir hatten oben gesehen, dass man auch ohne cul-de-sacs über K/D Kontrapunkt treiben kann, wenn man nur die Töne einer Dur-Skala zulässt. Wie verhalten sich die starken Dichotomien, wenn man sie testet für beliebige siebentonige Skalen, wie sie ja die Dur-Skala eine ist?

Zunächst ist es die Dur-Skala, welche für die K/D-Dichotomie unter allen siebentonigen Skalen am meisten Wahlfreiheit garantiert. Wenn man nun die Dur-Dichotomie festhält und die Skalen variiert, dann produzieren die klassischen europäischen diatonischen Skalen: die Dur-Skala, die melodische Mollskala und die Ganztonskala, der ein Ton hinzugefügt wurde, alle cul-de-sacs. Wenn man umgekehrt für die Dur-Skala die Dichotomien variiert, zeigt sich, dass nur die Dur-Dichotomie cul-de-sacs provoziert. Interessant ist, dass für die Dur-Dichotomie ein Maximum an Wahlfreiheit für eine Skala  $K^* = \{0,3,4,7,8,9,11\}$  gilt, welche offensichtlich sehr nahe an der Menge  $K$  der Konsonanzen ist, i.e.,  $K^* = K \cup \{11\}$ . Es scheint also, dass hier eine noch nicht verstandene Polarität zwischen Skalen und Dichotomien herrscht, und dass optimale Verträglichkeit entsteht, wenn entweder die Dur-Skala und die K/D-Dichotomie, oder aber polar dazu die  $K^*$ -Skala und die Dur-Dichotomie betrachtet werden. Wir bemerken abschliessend, dass  $K^*$  sehr nahe steht zum Mela Nr. 15 =  $\{0,3,4,7,8,9,1\}$  aus der indischen Raga-Tradition. Ob diese Beobachtung tiefergehende Beziehungen zwischen europäischem Kontrapunkt und der Raga-Musik eröffnen kann, ist eine ebenso schwierige wie faszinierende Frage der Mathematischen Musikethnologie, wie sie etwa von MARC CHEMILLIER (siehe dazu etwa seinen Beitrag in [epOs]) betrieben wird.

## 6. Computational musicology: Experimente in der Musikwissenschaft

Diese Modellierungen bestehender und virtueller Musikwelten sind so explizit, dass sie sich eignen für experimentelle Forschung in der Musikwissenschaft. Die Modelle lassen sich nicht nur mathematisch beschreiben, sondern auch zu Algorithmen herunterbrechen, welche sich zur Implementierung in Musiksoftware eignen. Solche Programme sind vom Autor und seinen Mitarbeitern in der Vergangenheit entwickelt worden, sei es für die Komposition, sei es für die Interpretation oder Analyse von Musik. Gegenwärtig werden beide hier diskutierten Modellierungen im Rahmen der RUBATO-Software am Institut für Informatik der Universität Zürich implementiert. Im Kontrapunkt wird es insbesondere darum gehen, das bestehende Repertoire an Kompositionen im Umfeld der klassischen FUXSchen Theorie (etwa bei BACH) in virtuelle Kompositionen über anderen starken Dichotomien zu deformieren oder zu "morphen", um den

Strukturreichtum dieser klassischen Schöpfungen möglichst in andere Universen der Musik hinüber zu retten. Wir können durch diese Forschung in der Musikinformatik viel über Musik lernen, wenn wir sie mit ihrer eigenen Variation in fiktivem Kontext konfrontieren. Es scheint aber auch wissenschaftstheoretisch interessant zu sein, diese Forschung als Prototyp für entsprechende Forschung in anderen Gebieten, etwa der Kosmologie, der Biochemie oder der Linguistik zu nutzen.

## 7. Referenzen

1. BOULEZ, P.: *Jalons (pour une décennie)*. Bourgeois, Paris 1989.
2. DAHLHAUS, C. et al. (Hrsg.): *Neues Handbuch der Musikwissenschaft*, Bd. 10. Athenaion und Laaber 1980-1993.
3. GOLDBLATT, R.: *Topoi*. North Holland, Amsterdam et al. 1984.
4. GÖTZE, H., und WILLE, R.: *Musik und Mathematik*. Springer, Heidelberg 1985.
5. JOURDAIN, R.: *Das wohltemperierte Gehirn*. Spektrum, Heidelberg 1998
6. KANT, I.: *Kritik der reinen Vernunft*.
7. MAZZOLA, G.: *Gruppen und Kategorien in der Musik*. HELDERMANN, BERLIN 1985.
8. MAZZOLA, G.: *L'essence du bleu*, mit CD (Einspielung: PATRIZIO MAZZOLA) Acanthus, Bern 2002;
9. MAZZOLA, G., et al.: *The Topos of Music—Geometric Logic of Concepts, Theory, and Performance*. Birkhäuser, Basel-Boston 2002.
10. MAZZOLA, G., et al.: *Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory*. epOs, Osnabrück 2004.
11. NOLL, TH.: *Morphologie der abendländischen Harmonik*. PhD Thesis, TU Berlin 1995.
12. SLOTERDIJK, P.: *Selbstversuch*. Hanser, München 1996.
13. WALTERS, R.F.C.: *Categories and Computer Science*. Cambridge University Press, Cambridge 1991.
14. WEYL, H.: *Symmetry*. Princeton University Press 1952.