

| | |
|---------------------|--|
| Zeitschrift: | Bulletin de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles = Bulletin der Naturforschenden Gesellschaft Freiburg |
| Herausgeber: | Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles |
| Band: | 91 (2002) |
| Artikel: | Die beste aller Welten |
| Autor: | Hungerbühler, Norbert |
| DOI: | https://doi.org/10.5169/seals-308824 |

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 29.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Die beste aller Welten

Norbert HUNGERBÜHLER

Département de Mathématiques, Université de Fribourg,
Pérolles, CH-1700 Fribourg
norbert.hungerbuehler@unifr.ch

Warum sind Seifenblasen rund und Planeten nur fast rund? Was weiss der Schützenfisch von der Snelschen Formel? Sind Bienen nicht nur fleissig, sondern auch sparsam? Wie kommen zwei Lappländerinnen 1737 nach Paris? Wieviel Land lässt sich mit einer Ochsenhaut umspannen, und was haben Vergil und Tolstoi mit dieser Frage zu tun? Bewies Anselm von Canterbury mit der Existenz Gottes auch die Existenz der verlorenen Inseln? Wie segelt man am besten mit der Strömung gegen den Wind, und warum hat die Antwort etwas mit einem Kupfer-Aluminium-Nickel-Kristall zu tun?

Optimalitätsprinzipien regieren nicht nur die unbelebte, sondern auch die belebte Natur. Der vorliegende Text bietet eine Zeitreise durch die faszinierende Geschichte des menschlichen Strebens nach einer Weltformel und nach dem Verständnis des Kosmos.

Von den oben gestellten sieben Fragen werden im Text sechs beantwortet, es wird jedoch dem Leser überlassen herauszufinden welche Frage offen bleibt.

Pourquoi les bulles de savon sont-elles rondes alors que les planètes ne le sont pas tout à fait ? Que sait le poisson archer de la formule de Snel ? Les abeilles sont-elles non seulement travailleuses, mais aussi économies ? Comment vinrent deux femmes lappones à Paris en 1737 ? Combien de pays se laisse entourer avec une peau de boeuf et quel lien a cette question avec Virgile et Tolstoi ? En prouvant l'existence de Dieu, Anselm von Canterbury a-t-il également démontré l'existence de l'île perdue ? Comment navigue-t-on au mieux avec le courant contre le vent, et pourquoi la réponse a-t-elle un lien avec un cristal de cuivre, d'alluminium et de nickel ?

Les principes d'optimalité ne régissent pas seulement les éléments inertes mais également la nature animée. Le texte suivant offre un voyage dans la fascinante histoire de l'effort humain pour trouver une formule universelle et pour comprendre le cosmos.

Six des sept questions posées y trouveront réponse. Cependant, le lecteur devra prendre seul le soin de trouver quelle question reste ouverte.

1 “Mehr Licht!”¹

Einstein nannte zwei Gründe für die Entstehung von Theorien: Erstens, wenn neue Fakten nicht mit bestehenden Theorien erklärt werden können, zweitens das Streben nach Vereinheitlichung und Vereinfachung. Im Folgenden wird vor allem von der zweitgenannten Triebfeder für die Evolution von Theorien die Rede sein.

¹Goethes letzte Worte (nicht belegt)

1.1 Das Heronsche Prinzip

Ein Beispiel eines Prinzips, welches eine Vielzahl von Phänomenen erklärt, ist das Heronsche Prinzip. Betrachten wir zuerst die Auffassung von Licht, die Euklid um 320 v. Chr. in seinem Werk *Optik* formulierte:

- (1) Licht breitet sich geradlinig aus.
- (2) Einfalls- und Ausfallsebene stimmen bei der Reflexion überein.
- (3) Einfalls- und Ausfallswinkel sind gleich gross.

Heron von Alexandria formulierte um 50 n. Chr. in seiner *Katoptrik* das Prinzip, dass Licht immer den Weg nimmt, der kürzer ist als alle andern. Dieses Prinzip vereinheitlicht nun Euklids Gesetze der Optik im Sinne Einsteins: Denn aus diesem *einen* Prinzip lassen sich alle *drei* Gesetze Euklids ableiten. Betrachten wir etwa (1) und (2) als bewiesen, so folgt das Reflexionsgesetz (3) aus Abbildung 1: Seien A und B zwei Punkte auf der selben Seite eines Spiegels s . Dann ist für einen beliebigen Punkt X auf s der kürzeste Weg von A über X nach B gleich der Streckenlänge von A über X zum Spiegelpunkt B' . Diese Strecke ist nach (1) kürzestmöglich falls $X = C$ auf der Verbindungsgeraden von A und B' liegt. Für diesen Lichtweg gilt dann in der Tat $\alpha = \beta$.

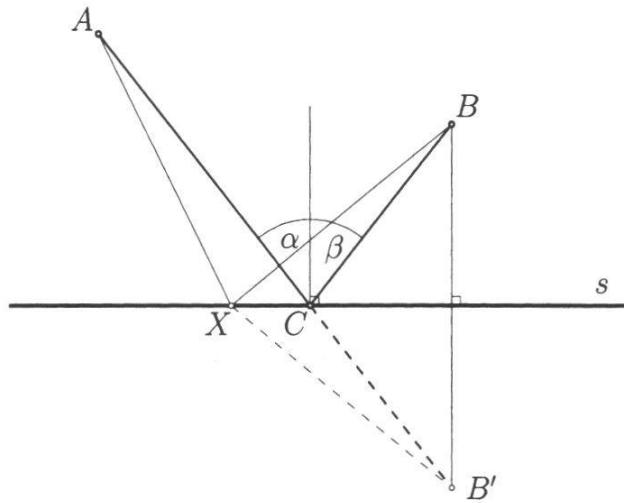


Abbildung 1: Das Reflexionsgesetz

Ein Wort zur Vorsicht: Herons Prinzip ist in der urprünglichen Fassung nicht ganz glücklich formuliert wie das berühmte Problem von Alhazen zeigt (siehe Abbildung 2 und [6], [13], [8]): Hier wählt bei der Reflexion eines Strahls von A über X nach B in einem Hohlspiegel s das Licht nicht den *kürzesten*, sondern den *längsten* Weg: Für alle Punkte auf der gestrichelten Ellipse ist die Summe der Abstände zu ihren Brennpunkten A und B gleich gross, für alle Punkte innerhalb der Ellipse, insbesondere die Punkte auf s , jedoch kleiner!

Leider erklärt das Heronsche Prinzip nicht die Lichtbrechung. An dieser Stelle muss also Einsteins erste Triebfeder für die Evolution von Theorien zum tragen kommen.

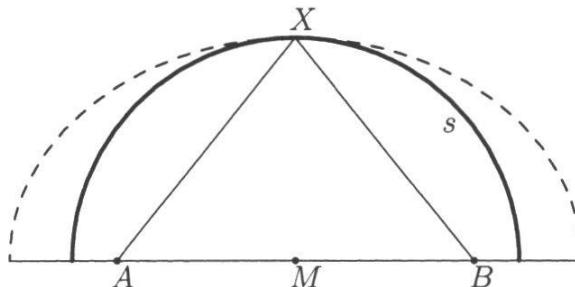


Abbildung 2: Reflexion im Hohlspiegel

1.2 Lichtbrechung

Ptolemäus fertigte für das fünfte Buch seiner *Optik* die erste Tabelle mit Einfalls- und Ausfallswinkel zur Brechung von Licht beim Übergang von Luft in Wasser an. Er zog daraus den leider falschen Schluss, Einfalls- und Ausfallswinkel seien proportional. Kepler ergänzte diese Tabelle um die Grenzwinkel für die Totalreflexion für verschiedene Medien. Auch seine Formel sollte sich als falsch herausstellen. Schon vorher befasste sich der bereits angesprochene Arabische Gelehrte Alhazen in seinem Hauptwerk *Grosse Optik* mit der Lichtbrechung. Er stellte darin als erster die Hypothese auf, Licht besitze eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit. Diese Hypothese ist zentral um vom Heronschen zum Fermatschen Prinzip zu gelangen.

Der dänische Astronom Ole Rømer mass 1667 die Lichtgeschwindigkeit anhand von Beobachtungen des innersten Jupitermondes Io. Galilei hatte dessen Umlaufzeit mit $42\frac{1}{2}$ Stunden angegeben. Diese ‘astronomische Uhr’ wurde von Seefahrern für die Bestimmung des Längengrades benutzt wobei sich aber Abweichungen bis zu 300 Seemeilen ergaben. Giovanni Domenico Cassini erstellte daher eine Tafel mit den Verfinsterungszeiten von Io. Als Rømer diese Werte kontrollierte stellte er Differenzen von bis zu 1000 Sekunden fest. Dies erklärte er sich so: Sind Jupiter und Erde in ihren entferntesten Positionen zueinander, so muss das Licht den doppelten Erdbahnradius mehr zurücklegen, als in der nächsten Position. Daher braucht das Licht mehr Zeit, um die Information des auf- oder untergehenden Io zur Erde zu übermitteln. Daraus konnte Rømer leicht die Lichtgeschwindigkeit berechnen.

1621 fixierte Willebrord Snel(l) van Rojen, genannt Snellius, experimentell das nach ihm benannte Brechungsgesetz²:

$$\frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \varepsilon_2} = \text{konstant}$$

(siehe Abbildung 3). Snel versäumte es allerdings, seine Entdeckung zu publizieren. Es gibt Hinweise, dass Thomas Harriot³ (1560–1621) das Gesetz schon vor Snel kannte. Es wies experimentell nach, dass die Brechung von der Farbe des Lichtes, also dessen Wellenlänge, abhängt.

Das Brechungsgesetz wurde erstmals von Descartes (1596–1650) in seinem 1637 erschienenen Werk *Dioptrik* publiziert, nämlich im dritten Anhang seines vorerst anonym her-

²Die Schreibweise ist nicht ganz einheitlich. Das zweite ‘l’ ist nach heutigem Kenntnisstand eine Folge einer Delateinisierung späterer Generationen.

³Harriot führte übrigens die Symbole ‘<’ und ‘>’ in der Mathematik ein.

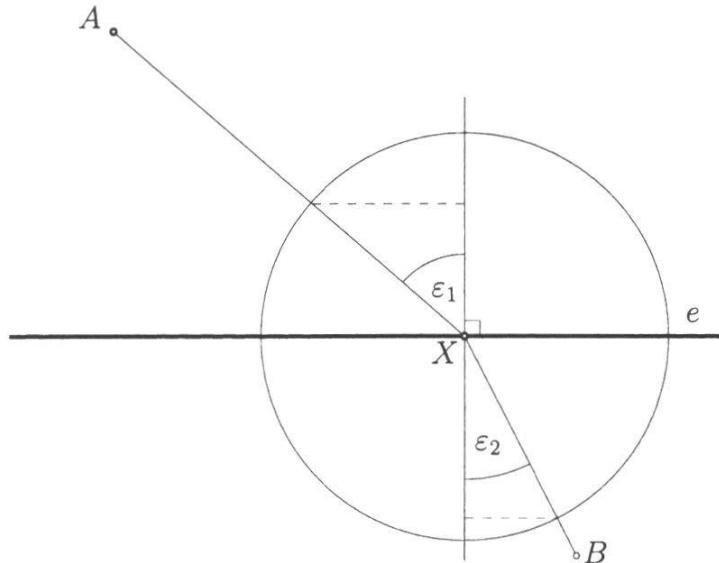


Abbildung 3: Das Brechungsgesetz von Snellius. Zwei Medien unterschiedlicher optischer Dichte grenzen entlang einer Ebene e (hier projizierend dargestellt) aneinander. Der Lichtstrahl von A nach B ist gebrochen. Geometrisch kann $\frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \varepsilon_2}$ als Längenverhältnis der gestrichelten Linien gedeutet werden.

ausgegebenen *Discours de la méthode*. Ähnlich wie eine Druckwelle sollten sich dabei die ‘Lichtteilchen’ in einem optisch dichteren Medium schneller bewegen als in einem weniger dichten.

Newton schloss sich dieser Ansicht an. Er gab in seiner Abhandlung über die Optik eine Herleitung der Snelschen Formel, indem er argumentierte, dass sich beim Übergang in das optisch dichtere Medium aufgrund von kurzreichweiten Anziehungskräften zwischen Atomen und Lichtteilchen die Transversalkomponente der Geschwindigkeit dieser Teilchen erhöht.

1.3 Das Fermatsche Prinzip

1661 formulierte Pierre de Fermat sein Prinzip, wonach Licht stets einen Weg wählt, für den es ein Minimum an Zeit benötigt, den sogenannten *optisch kürzesten Weg*. Insbesondere ergab sich damit aus dem Brechungsgesetz, dass sich Licht in einem dichteren Material *langsamer* fortbewegt als in einem dünneren, und dies stand im Widerspruch zu Descartes und Newton.

1678 legte Huygens (1629–1695) seine Abhandlung *Traité de la lumière* der Pariser Akademie vor und begründete damit die Äther-Wellentheorie des Lichtes. In Übereinstimmung mit Fermats Prinzip sollte Licht in optisch dichteren Medien langsamer sein. Huygens Prinzip der ‘Elementarwellen’ erklärte zwangslässig das Brechungsgesetz und identifizierte, ebenso wie Fermats Prinzip, die Snelsche Konstante als das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeiten in den beiden Medien.

Genaue Messungen der Lichtgeschwindigkeit in Medien von Leon Foucault (1862) führten die Entscheidung zugunsten der Theorie von Huygens herbei. Hierzu trugen auch die In-

terferenzexperimente von Thomas Young und Jean Fresnel (1800 und 1815) bei. In seinem Hauptwerk *Treatise on Electricity and Magnetism* (1873) ersetzte James Clerk Maxwell (1831–1879) das Äthermodell durch elektromagnetische Wellen, welche eine Folgerung aus seinen vier Grundgleichungen der Elektrodynamik waren. Sieben Jahre später gelang Heinrich Hertz der Nachweis dieser Wellen. Die berühmten Interferenzexperimente von Michelson und Morley (1887) bedeutete für die Äthertheorie das endgültige Aus. Im zwanzigsten Jahrhundert versöhnte Einstein, wie wir wissen, die Wellen- und die Teilchentheorie des Lichts.

Wir wollen nun das Brechungsgesetz mit Hilfe des Fermatschen Prinzip verstehen. Tatsächlich kann man es aus Abbildung 4 direkt ablesen. Wir betrachten dazu eine kleine Verschiebung des Punktes X und die beiden dabei auftretenden grauen Dreiecke (rechts vergrössert dargestellt). Im oberen Medium sei die des Lichtgeschwindigkeit v_1 , im unteren

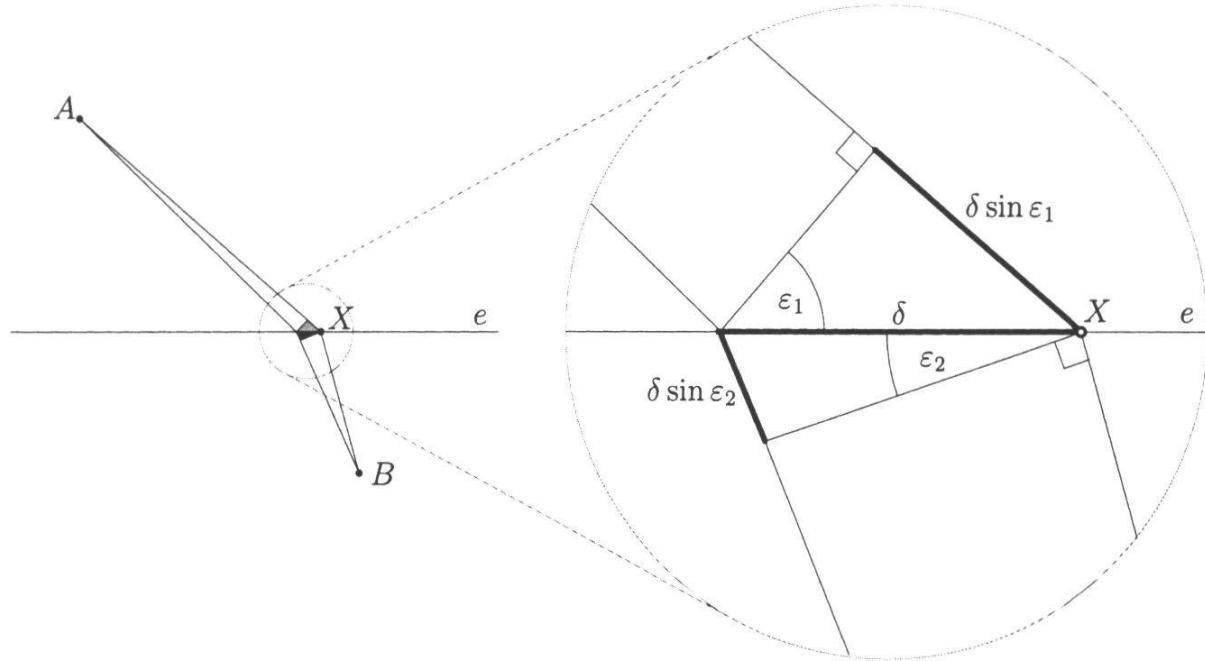


Abbildung 4: Das Brechungsgesetz von Snellius

v_2 . Hat der Pfad von A über X nach B optisch minimale Länge, so sind benachbarte Wege, bis auf einen Fehler zweiter Ordnung, optisch gleich lang. Die Zeit $\Delta t = \frac{\delta \sin \varepsilon_1}{v_1}$ die man im oberen Medium durch Verschiebung des Brechungspunktes X nach links gewinnt, verliert man im unteren Medium durch die Zeiteinbusse $\Delta t = \frac{\delta \sin \varepsilon_2}{v_2}$. Gleichsetzen ergibt sofort das Brechungsgesetz!

Heute leitet man das Brechungsgesetz entweder ganz innerhalb der elektromagnetischen Wellentheorie her, womit auch Polarisationseffekte, wie der Brewster-Winkel, greifbar werden, oder man arbeitet mit der strahlenoptischen Näherung: Wir betrachten dazu eine skalare Wellenoptik, in der monochromatisches Licht der Kreisfrequenz ω beschrieben wird durch die Schwingungsgleichung

$$(\Delta + k^2)u(x) = 0.$$

Dabei ist $k(x)$ im wesentlichen die inverse Lichtgeschwindigkeit. Zerlegt man u in reelle

Amplitude und Phase $u(x) = A(x)e^{iS(x)}$ so wird daraus

$$\begin{aligned}\Delta A - A(\text{grad } S)^2 + k^2 A &= 0 \\ A\Delta S + 2\langle \text{grad } A, \text{grad } S \rangle &= 0\end{aligned}$$

Vernachlässigt man $|\frac{\Delta A}{A}|$ gegen die anderen Terme in der ersten Gleichung oben, wird diese zu einer Gleichung für S allein:

$$(\text{grad } S)^2 = k^2 \quad (\text{Eikonalgleichung})$$

Die Lichtstrahlen sind dann definiert als Orthogonaltrajektorien der Flächen konstanter Phase: Eine Lösung $S(x)$ beschreibt somit ein Bündel von Lichtstrahlen durch die Differentialgleichung erster Ordnung

$$k \frac{dx}{ds} = \text{grad } S.$$

Daraus folgt mit einer kurzen Zwischenrechnung die Strahlengleichung

$$\frac{d}{ds} \left(k \frac{dx}{ds} \right) = \text{grad } k.$$

Für ein eben geschichtetes Medium $k = k(z)$ ist das just das Gesetz von Snel

$$\frac{d}{ds} (k \sin \alpha) = 0,$$

wobei α der Winkel zur z -Achse ist. Die Strahlengleichung ist nun nichts anderes als die Euler-Lagrange-Gleichung zum Funktional

$$T = \int k \, ds,$$

welches (bis auf einen Faktor) die Durchlaufungszeit darstellt. Damit ist (innerhalb dieses Formalismus) das Fermatsche Prinzip nachgewiesen.

1.4 “... ein gewaltiger Jäger vor dem Herrn!”³

Überraschenderweise kannte jemand das Brechungsgesetz bereits lange vor dessen Entdeckung, nähmlich ein südostasiatischer Brackwasserbewohner. Es ist ein Vertreter der aus sechs Unterarten bestehenden Familie der Schützenfische (siehe Abbildung 5). Diese Fische besitzen die Fähigkeit, Beuteinsekten ausserhalb des Wassers mit einem gezielten Wasserstrahl zu treffen. Bei diesem Kunststück muss der Schützenfisch natürlich die Brechung des Lichtes an der Wasseroberfläche kompensieren (siehe Abbildung 6).

2 Der grosse Weltenplan

Kommen wir jetzt zu Pierre Louis Moreau de Maupertuis, Philosoph, Biologe, Geograph und Mathematiker (1698–1759). Maupertuis leitete 1736/37 die Lapplandexpedition der

³Genesis 10, 8–12, über Nimrod

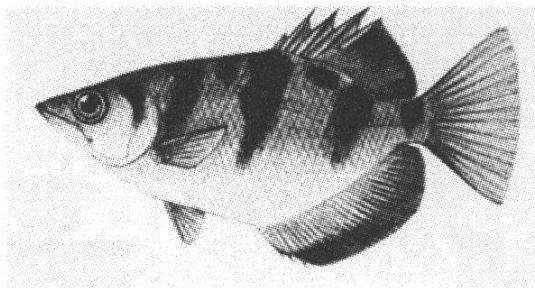


Abbildung 5: *Toxotes jaculator*

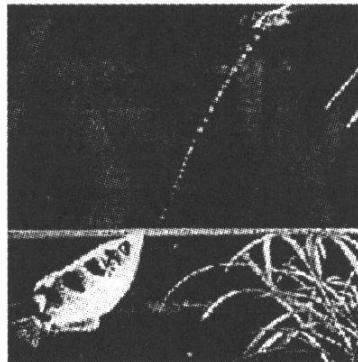


Abbildung 6: Kompensation der Lichtbrechung

Académie des sciences, deren Mitglied er seit 1723 war. Diese Expedition wurde ausgeschickt, um Gradmessungen längs eines Erdmeridians vorzunehmen (siehe Abbildung 7). Damit sollte der Nachweis der von Newton vorausgesagten Abplattung der Erde an den Polen erbracht werden. Das Unternehmen gelang. Damit war die Theorie von Descartes, welche auch von Cassini vertreten wurde und die besagte die Erde sei in Richtung der Pole auseinandergezogen, widerlegt⁴. Maupertuis formulierte 1744 sein Prinzip der kleinsten Wirkung, das er als eine Art Weltformel ansah: Es besagt, dass die Natur stets mit grösstmöglicher Sparsamkeit vorgeht.

Um dieses Prinzip anwenden zu können war eine neue mathematische Disziplin nötig, die Variationsrechnung. Sie befasst sich mit der Frage, wie sich Optimierungsprobleme mathematisch fassen und lösen lassen. Dieser Frage wollen wir im Folgenden nachgehen.

2.1 Das Problem der Dido

Eine bereits in der Antike bekannte Maximumseigenschaft des Kreises ist mit dem Namen der Königin Dido verbunden, deren Lebensgeschichte Vergil in seine *Aeneis* eingeflochten hat (siehe Abbildung 8). Dido, eine phönizische Prinzessin aus Tyros, war zu Schiff aus ihrer Heimat entflohen, nachdem ihr Bruder, König Pygmalion, ihren Ehemann ermordet hatte. Als Dido 900 vor Christus die afrikanische Küste an der Stelle des späteren Karthago erreichte, wollte sie König Jarbas von Numidien dort Land abkaufen. Es wurde

⁴Dieser grosse Erfolg trug Maupertuis beträchtlichen Ruhm ein, den noch zwei junge Lappländerinnen vermehrten, die er von seiner Reise nach Paris mitgebracht hatte und die dort ähnlich bestaunt wurden, wie später die Feuerländer, die Darwin von seiner Reise um die Welt nach London brachte.



Abbildung 7: Maupertuis und sein Freund und Weggefährte Charles Marie de La Condamine auf einer französischen Sondermarke. Während Maupertuis am Polarkreis unterwegs war, leitetet La Condamine 1745 die entsprechende Expedition nach Südamerika für die Messungen am Äquator.

ausgehandelt, dass Dido nicht mehr Land bekommen sollte, als sie mit einem Ochsenfell umspannen konnte. Dido machte aus diesen Vertragsbedingungen das Beste, indem sie die Ochsenhaut in dünne Streifen schneiden liess, die zusammengeknüpft eine geschlossene Schnur ergaben. Danach breitetet Dido die Schnur auf dem Boden so aus, dass sie eine möglichst grosse Fläche umschloss. Sie musste also das *isoperimetrische Problem* lösen, diejenige geschlossene Kurve gegebener Länge mit grösstmöglichen Flächeninhalt zu finden. Dido dürfte die Lösung gefunden haben: es ist ein Kreis. Natürlich gab es für die Städtebauer noch andere Gründe, Städte kreisrund zu bauen, so etwa um eine möglichst kurze Verteidigungsleitung zu haben. Abbildung 9 zeigt eine Karte von Paris von François de Belleforest, ein Jahr nach dem Regierungsantritt von Heinrich III, dem letzten Valois. Ein näherliegendes Beispiel ist das alte Zürich (siehe Abbildung 10), wo aus militärischen Erwägungen die runde Stadtform zugunsten von zackigen Schanzen angepasst wurde. Strapaziert man das Beispiel ein bisschen, sieht hier ausserdem, dass der 'freie Rand' am See senkrecht ans Ufer stösst. Vor der gleichen Aufgabe wie Dido stand der Bauer Pachom in Tolstois Erzählung *Wieviel Erde braucht der Mensch?*, als der Baschkirenälteste ihm zurief: "Soviel Land, wie Du an einem Tag umschreiten kannst, ist Dein".

Unter der Annahme, das isoperimetrische Problem besitze eine Lösung zeigte Jakob Steiner 1836 mit Hilfe einer eleganten Überlegung dass der Kreis optimal ist: Zunächst muss die Lösungskurve k konvex sein, da sonst bei gleichem Umfang eine Kurve mit grössemem Inhalt existiert. In der Tat, ist k nicht konvex, so findet man zwei Punkte P und Q auf k deren Verbindungsstrecke auf s nicht zur von k umschlossenen Fläche gehört (siehe Abbildung 11). Durch Spiegelung eines Teils von k an s erhält man eine Kurve gleicher Länge, welche eine grösere Fläche umschliesst. In der Abbildung 11 ist der Flächengewinn grau markiert. Auf der nun als konvex erkannten Kurve markiert man nun zwei Punkte R und S welche die Kurve in zwei Teile gleicher Länge zerlegen. Die Verbindungsstrecke l von R und S zerlegt dann das Innere in zwei Flächenstücke F und F' (siehe Abbildung 12). Steiner argumentierte nun, dass F und F' die gleiche Fläche haben müssen. Andernfalls könnte man das grösste Stück, sagen wir F an l spiegeln und auf diese Weise eine Kurve gleicher Gesamtlänge, jedoch mit grössemem Infalt (nämlich zweimal die Fläche von F) erhalten. Somit müssen also die Flächen von F und F' gleich gross sein und es genügt im

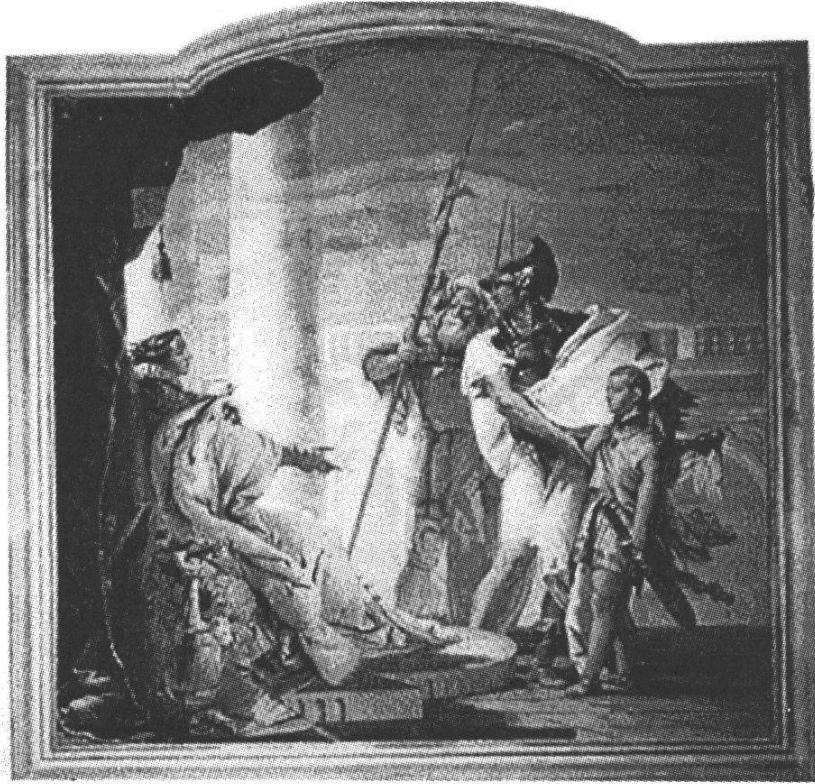


Abbildung 8: Aeneas stellt Dido seinen Sohn Ascanius vor, der allerdings von Juno und Venus heimlich durch Cupido ersetzt worden war. Gemälde von Tiepolo (1757).

Folgenden, die eine Hälfte der Kurve zu betrachten, von der nachzuweisen ist, dass sie ein Halbkreis ist.

Betrachten wir nun in Abbildung 13 ein Dreieck über RS mit dritter Ecke T auf der Kurve, und denken uns in T ein bewegliches Gelenk. Bewegen wir dieses Gelenk so behalten die grau markierten ‘Möndchen’ ihren Flächeninhalt, während sich der Flächeninhalt des Dreieckes RST ändert. Offenbar ist dieser Flächeninhalt maximal, wenn der Winkel τ bei T ein rechter ist. Nach dem Satz von Apollonius charakterisiert nun aber diese Winkel-eigenschaft gerade den Halbkreis! Karl Weierstrass (1815–1897) wies allerdings darauf hin, dass Steiners Argumentation bereits die Existenz einer Lösung des isoperimetrischen Problems voraussetzte, diese also nicht bewies. Die Kritik war berechtigt: Setzt man etwa die Existenz einer grössten natürlichen Zahl n voraus, so folgt daraus leicht dass $n = 1$ ist (wäre es eine Zahl echt grösser als eins, so wäre deren Quadrat echt grösser als die Zahl selber, und letztere könnte also nicht die grösste gewesen sein). Weierstrass entwickelte daraufhin eine Theorie der Extremalfelder, welche die Formulierung von hinreichenden Bedingungen für die Existenz von Extremen erlaubte. Inbesondere erbrachte er für das isoperimetrische Problem den Existenznachweis.

2.2 Das Brachystochronenproblem

1696 stellte Johann Bernoulli folgende Aufgabe in “Acta Eruditorum” die ursprünglich von Galilei stammte [3]:



Abbildung 9: Paris 1575

Gegeben sind zwei Punkte A und B im Raum. Ein Massenpunkt gleitet reibungsfrei unter dem Einfluss der Schwerkraft auf einer Rutschbahn von A nach B . Welche Form muss man der Rutschbahn geben, damit der Massenpunkt ein Minimum an Zeit braucht, wenn er in A aus der Ruheposition losgelassen wird? Die Lösungskurve (die sogenannte Brachystochrone) ist nicht etwa die Verbindungsgerade der beiden Punkte (siehe Abbildung 14). Neben Johann Bernoulli konnten nur sein Bruder Jacob, Leibniz, und de l'Hôpital die Aufgabe lösen. Es zeigte sich, dass die gesuchte Kurve eine Zykloide ist, also die Kurve, die ein fester Punkt auf der Peripherie eines abrollenden Rades beschreibt.

Beim Brachystochronenproblem handelte es sich um einen neuen Typ von Optimierungsaufgabe, nämlich um ein Extremalproblem in einem unendlichdimensionalen Funktionenraum. Die ersten Lösungen des Problems beruhten daher auf speziellen Ideen. So war etwa Johann Bernoullis Lösungsidee die folgende: Statt einen Massenpunkt von A nach B gleiten zu lassen, schickt man einen Lichtstrahl auf den Weg. Damit die Situation genau der mechanischen entspricht, wird als Ausbreitungsmedium des Lichtes ein (gedachtes) Material so gewählt, dass der Brechungsindex in jedem Punkt gerade diejenige Lichtgeschwindigkeit erzwingt, die der Geschwindigkeit des Massenpunktes entspricht, und die mit dem Energiesatz leicht berechnet werden kann. Dann muss man nur noch die in Abschnitt 1.3 hergeleitet Strahlengleichung lösen. Damit gelang es Johann Bernoulli erstmals Optik und Mechanik zu verbinden - mehr als hundert Jahre bevor dies der irische Mathematiker William Hamilton (1805–1865) systematisch tat.

Im Wettstreit den Bernoullis Aufgabe ausgelöst hatte, ging unter anderem eine anonyme Lösung ein, die durch besondere Brillanz bestach. Als Bernoulli diese Lösung sah, tat er den Ausspruch "Man erkennt den Löwen an seinen Krallen" - die anonyme Lösung stammte von Newton.

Euler löste das Brachystochronenproblem später indem er es mit Hilfe seiner Variationsmethode auf eine Differentialgleichung zurückführte. Die Bezeichnung "Variation" geht auf Lagrange zurück, der mit seiner Methode der Multiplikatoren auch Extremalpro-



Abbildung 10: Zürich

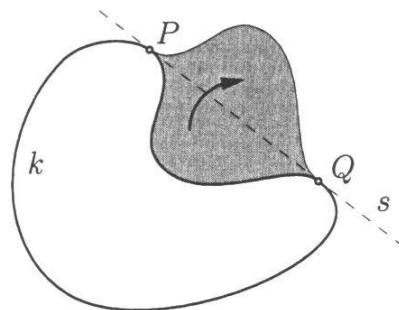


Abbildung 11: Steiners Beweis I

bleme mit Nebenbedingungen lösen konnte. Die Gleichung wird deshalb heute Euler-Lagrange-Gleichung, oder in höheren Dimensionen Ostrogradski-Gleichung, des Funktionalen genannt. Damit war ein allgemeines Werkzeug gefunden um eine grosse Klasse von Funktionalen zu extremieren. Vorerst blieb diese Technik allerdings auf einer formalen Stufe.

2.3 Das Prinzip der kleinsten Wirkung

Kommen wir nun zurück zu Maupertuis und seinem allumfassenden Weltenplan, dem Prinzip der kleinsten Wirkung. Es besagt: *Wenn die Natur sich ändert, so ist die für die Änderung erforderliche Wirkung⁵ kleinstmöglich.*

Was ist diese Wirkung, mit der die Natur so sparsam wirtschaftet? Die Tätigkeit eines Postboten mag dies erklären: Je weiter und je schneller er läuft, desto grösser ist seine

⁵In der deutschsprachigen Literatur hat sich für das von Maupertuis benutzte französische Wort *action* unglücklicherweise die Übersetzung *Wirkung* durchgesetzt, die eigentlich etwas anderes bedeutet: eine Aktion hat eine Wirkung, ist aber keine Wirkung. Maupertuis Prinzip könnte man aus dem französischen vielleicht so übersetzen: "Wenn die Natur sich ändert, so ist die für die Änderung erforderliche Aktionsmenge (oder Aufwand an Handlung) kleinstmöglich".

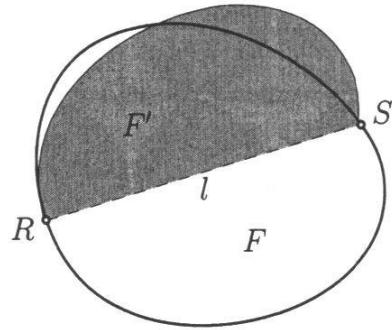


Abbildung 12: Steiners Beweis II

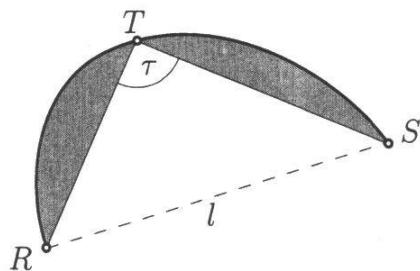


Abbildung 13: Steiners Beweis III

Wirkung. Vernünftigerweise sollte auch die Tasche, die der Postbote trägt, berücksichtigt werden. Demnach ergibt sich:

$$\text{Wirkung} = \text{Masse} \times \text{Entfernung} \times \text{Geschwindigkeit}.$$

Folglich hätte die Wirkung dieselbe physikalische Dimension, wie die von Leibniz definierte kinetische Energie multipliziert mit der Zeit. Tatsächlich findet sich bereits in den Schriften von Leibniz diese Definition von Wirkung. Maupertuis fand sich daher rasch in einem Urheberschaftsstreit mit dem Leibnizianer Samuel König, der die Formulierung des Prinzips zu Recht als unvollständig kritisierte und behauptete, dass sich eine richtige Fassung in einem Leibnizbrief von 1707 finde. Zum andern erschien 1753 die *Maupertuisiana* eine Sammlung von Entgegnungen, darunter Voltaires Spottgeschichte *Diatribe du Docteur Akakia*, übersetzt ins Deutsche übrigens von Gottsched, worauf Voltaire durch Friedrich II aus Preussen ausgewiesen wurde. Maupertuis war ja seit 1746 Präsident der Preussischen Akademie der Wissenschaft in Berlin.

Schon 1743, also vor Maupertuis, hatte Euler bewiesen, dass das Prinzip der kleinsten Wirkung geeignet war, die Bewegung eines Massepunktes in einem konservativen Kraftfeld zu beschreiben. Er war überzeugt, dass hinter jedem Phänomen unseres Universums eine Maximum- oder Minimumregel stecken müsse: "Da sämtliche Verrichtungen der Natur gewisse Gesetze des Maximums oder Minimums befolgen, ist es nicht zweifelhaft, dass auch bei den Bahnern, welche die Körper unter Einwirkung bestimmter Kräfte beschreiben, irgendeine Extremumseigenschaft vorhanden sein muss". Maupertuis beanspruchte die Priorität der Theorie jedoch für sich. Immerhin verweist er im erweiterten Vorwort seiner *Œvres* von 1756 für Begründung und Anwendungen des Prinzips auf Euler. Letzterer

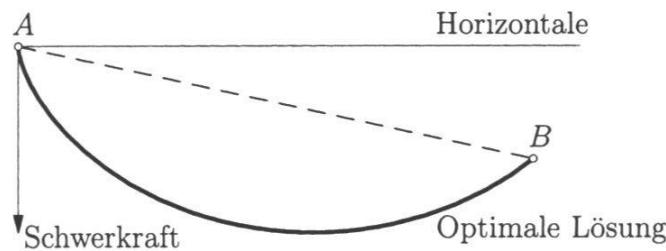


Abbildung 14: Brachystochrone: Der optimale Weg erspart in diesem Beispiel rund 42% Zeit gegenüber dem geometrisch kürzesten Weg.

bestand überraschenderweise nicht auf seiner Entdeckung. Möglicherweise wollte er als Direktor der mathematisch-physikalischen Klasse der Preussischen Akademie mit seiner bescheidenen Haltung seine Loyalität gegenüber seinem Präsidenten Maupertuis unter Beweis stellen. Fest steht, dass die Arbeit Maupertuis bedenkliche Schwächen aufwies, wie wir am Beispiel der Reflexion im Hohlspiegel gesehen haben. Euler formulierte das Prinzip passender, indem er den Begriff der stationären Wirkung prägte. Der Urheberschaftsstreit zwischen Maupertuis und Euler ging unter dem Begriff 'Berliner Affäre' in die Geschichte ein.

Maupertuis' Gedanken waren mitgeprägt von der Philosophie von Leibniz. Dessen philo-



Abbildung 15: Gottfried Wilhelm von Leibniz auf der von der Deutschen Bundespost aus Anlass seines 350. Geburtstages herausgegebenen Briefmarke

sophische Hauptgedanken finden sich in seinen *Essais de Théodicée sur la bonté de Dieu, la liberté de l'homme et l'origine du mal*. Darin geht Leibniz vom scheinbaren Widerspruch zwischen der Annahme eines allmächtigen, gütigen und allwissenden Schöpfergottes und der Unvollkommenheit der Welt aus. Zum Beweis für das Dasein Gottes zog Leibniz den ontologischen Schluss von Anselm von Canterbury heran: Der Begriff eines vollkommenen Wesens impliziert dessen Existenz, weil sonst ein noch vollkommeneres (weil existentes) Wesen denkbar sei. Gaunilo von Marmoutiers wies allerdings darauf hin, dass man mit demselben Argument auch die Existenz einer besten aller Inseln nachweisen könnte (die "verlorenen Inseln", wie er sie nannte).

Leibniz 'bewies' (in diesem Punkt ganz Mathematiker) auch die Eindeutigkeit Gottes, indem er Argumente des Xenophanes benutzte.

Gott sei also das Wesen, das alle Eigenschaften im höchsten Grade in sich vereinige, aller-

dings nur insofern diese Eigenschaften miteinander verträglich seien. Diese Einschränkung sei nötig, denn es gebe Eigenschaften wie Allmacht und Güte, die nicht im höchsten Grade nebeneinander bestehen könnten. Gottes Güte beschränke seine Allmacht, denn sie hindere ihn daran, Böses zu tun, was ihm wegen seiner Allmacht durchaus möglich sei. Daraus folge, dass Gott zwar alle möglichen Welten gedacht, aber nur die beste aller möglichen Welten gewollt und demnach auch geschaffen habe.

Leibniz' Gedanken blieben unter seinen Zeitgenossen nicht unwidersprochen. Die schärfste Antwort kam von Voltaire: Unter dem Titel *Candide, ou l'Optimisme* schrieb er unter dem Pseudonym 'Doktor Ralph' 1758 eine boshafte Satire, die in zwanzig Jahren in 42 Auflagen erschienen, obwohl sie ab 1762 auf den päpstlichen Index stand.

2.4 Minimalprinzipien in der theoretischen Physik

Übersetzt man das Prinzip der kleinsten Wirkung direkt in eine Formel, so sagt es man habe das Zeitintegral über die kinetische Energie zu minimieren, bei festgehaltener Gesamtenergie (und bei freier Anfangs- und Endzeit). Wie wir gesehen haben, besteht eine erste Verbesserung darin, nicht nach Minima, sondern nach stationären Punkten suchen.

Aufbauend auf Eulers Arbeiten formulierten Lagrange, Gauss, Hamilton und Jacobi flexible Variationsprinzipien für die Mechanik: Wird ein mechanisches System durch Lagekoordinaten q beschreiben (q kann also beispielsweise der Auslenkungswinkel bei einem Pendel sein), so definiert man als Lagrange-Funktion

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, t)$$

als Differenz von kinetischer und potentieller Energie des Systems. Das Prinzip von Hamilton besagt dann, dass entlang der mechanischen Bahn die Variation $\delta \int_A^B L dt = 0$, bei festen Endpunkten A, B in der (q, t) -Ebene, verschwindet, die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0$$

sind also gerade die Bewegungsgleichungen des Systems.

Die geometrische Form der physikalischen Bahn wird durch folgende Variante beschrieben: Die Bahnkurve im Konfigurationsraum zwischen den Punkten P und Q ist ein stationärer Punkt des Integrals

$$\delta \int_P^Q \sqrt{E - V(q)} ds = 0 \quad (*)$$

falls E der Wert der (erhaltenen) Gesamtenergie ist (Anfangs- und Endzeit variieren aber) bezüglich der Metrik

$$ds^2 = \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}(q) dq_\alpha dq_\beta$$

im Konfigurationsraum die via $T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta$ gegeben ist.

Betrachtet man einen einzelnen Massenpunkt, so erhält man (bis auf einen Faktor), die gewöhnliche Euklidische Metrik. Fassen wir dann $\sqrt{E - V(x)}$ in (*) als Brechungsindex $k(x)$ auf, so erhalten wir wieder das Fermatsche Prinzip für Lichtstrahlen.

Mit Hilfe der Hamilton-Jacobi-Gleichungen lässt sich ganz allgemein eine formale Verbindung von der Mechanik zur Strahlenoptik herstellen. Da die Strahlenoptik (wie wir gesehen haben) eine Näherung der Wellenoptik darstellt, kann man sich fragen, ob im gleichen Sinne die Mechanik eine Näherung einer allgemeineren Mechanik ist. In der Tat "löste" Schrödinger die symbolische Gelchung

$$\ll \frac{\text{Wellenoptik}}{\text{Strahlenoptik}} = \frac{\text{Wellenmechanik}}{\text{klassische Mechanik}} \gg$$

und gelangte so zu seiner Quantentheorie.

2.5 Was die Bienen wissen, und was sie nicht wissen

Bereits Pappus bemerkte, dass Bienenwaben ein interessantes Beispiel für die Ökonomie der Mittel in der Natur sind. Bienenwaben sind, von der Front betrachtet, als Sechseckparkettierung der Ebene angeordnet (siehe Abbildung 16 links). Diese hat für sich bereits gewisse Optimalitätseigenschaften.

Beim Bienenstock sind nun zwei solche Schichten von Waben gewissermassen Rücken an Rücken aneinandergebaut (siehe Abbildung 16 rechts). Es fragt sich nun, wie die zwei

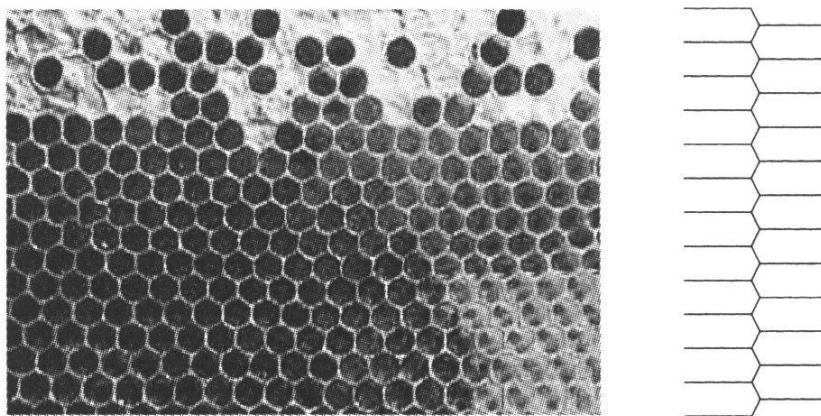


Abbildung 16: Bienenwaben

Lagen gegenseitig angeordnet sind. Eine einzelne Zelle sieht etwa aus, wie in Abbildung 17 dargestellt. Jedes Sechseckprisma wird oben zeltartig von drei Romben abgeschlossen. Dieser Bau ermöglicht, dass die zwei Schichten, geeignet gegeneinander verschoben, lückenlos aneinanderpassen (siehe Abbildung 18). Das Verhältnis von Volumen zu Oberfläche, also der Materialverbrauch beim Bau der Zelle, soll nun optimiert werden. Einigt man sich zuerst auf den beschriebenen Bauplan, so ist die einzige Variable die Neigung des Zeltdaches. Die Lösung ergibt, dass die Diagonalen der Romben das Verhältnis $\sqrt{2}$ aufweisen. Dies entspricht in der Tat dem Bauplan im Bienenstock. Erstaunlicherweise beschrieb Fejes Tóth 1964 eine Wabenkonstruktion, die *optimaler* ist als der Bauplan der Bienen (siehe Abbildung 19). Die Ersparnis der Tóthschen Zelle macht weniger als 0.35% des Flächeninhalts der Öffnung aus. Dass die Bienen nicht das Optimum gefunden haben, lässt verschiedene Schlüsse zu: Entweder sind die Bienen schlecht im Rechnen, oder die Bienen haben nach anderen Kriterien optimiert, oder die Bienen sind zwar fleissig aber nicht unbedingt sparsam.



Abbildung 17: Einzelne Zelle (Öffnung von unten)

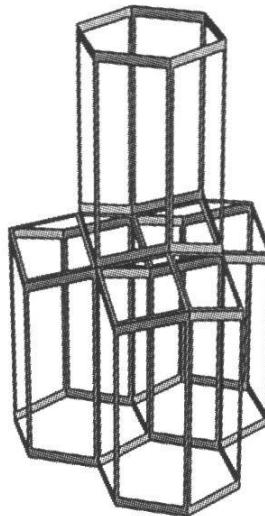


Abbildung 18: Lückenlose Schichtung der Zellen

2.6 Seifenhäute

Seifenhäute werden in der Mathematik seit über 200 Jahren untersucht. Für Seifenhäute führt man eine Oberflächenenergie ein, welche proportional zur Fläche ist. Da nach dem Prinzip von Maupertuis die Natur für eine Seifenhaut immer eine Realisierung minimaler Energie wählt, sind Seifenhäute *Minimalflächen*. So fand 1762 Lagrange die Gleichung von Flächen (lokal) kleinsten Inhalts. Meusnier erkannte 1776 die geometrische Deutung der von Lagrange angegebenen Gleichung, nämlich dass sich Minimalflächen durch verschwinden der mittleren Krümmung auszeichnen⁶. 1873 beschrieb der Physiker Plateau seine umfangreichen Experimente mit Seifenhäuten [10]. Er gelangte insbesondere zur Erkenntnis (etwas salop formuliert) : “In jede geschlossene Raumkurve lässt sich eine Mi-

⁶Herrscht auf den zwei Seiten einer Seifenhaut ein unterschiedlicher Luftdruck, so bildet sich eine Fläche aus, bei welcher die mittlere Krümmung proportional zur Druckdifferenz, also normalerweise konstant, ist. Daher sind Seifenblasen rund. Es gibt jedoch auch eine geschlossene Fläche vom Geschlecht eins, den Wente-Torus, mit konstanter mittlerer Krümmung! Die Bedingung der konstanten mittleren Krümmung erhält man auch bei Minimierung des Flächenfunktionalen bei gegebenem eingeschlossenem Volumen als Nebenbedingung.

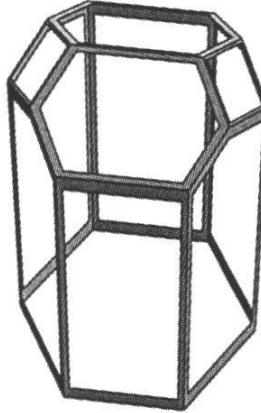


Abbildung 19: Tóths Zelle

nimalfläche einspannen”. Plateau betrachtete diese Tatsache als durch seine Experimente hinreichend bewiesen. Natürlich genügte eine derartige Argumentation, insbesondere nach der von Weierstrass 1870 vorgebrachten Kritik an den Grundlagen des Dirichletschen Prinzips nicht den Ansprüchen der Mathematik. Weierstrass gelangte bei seinen eigenen Untersuchungen zu seiner Darstellungsformel für Minimalflächen, ein Beweis für die Plateausche Vermutung liess jedoch bis 1930/31 auf sich warten. Dann nämlich bewiesen Douglas und Radó unabhängig voneinander einen entsprechenden Satz ([2], [11]):

Satz (Douglas, Radó) *Jede hinreichend glatte Jordan-Kurve in \mathbb{R}^3 berandet mindestens eine parametrische Minimalfläche vom Typ der Kreisscheibe, welche das Dirichlet-Integral unter allen derartigen Flächen minimiert.*

Die von Douglas und Radó gefundene Minimalfläche ist allerdings nur eine “schwache Lösung”. Die Regularität der Parameterdarstellung wurde erst 1969 von Hildebrand [4] und Nitsche [9] nachgewiesen. Tomi-Tromba [12], Almgren-Simon [1] und Meeks-Yau [7] zeigten zudem, dass die Douglas-Radó Lösung eingebettet ist, falls die gegebene Randkurve “extrem” ist, d. h. auf dem Rand eines konvexen Körpers liegt. Eindeutigkeit der Lösung gilt unter anderem, falls eine überschneidungsfreie Projektion der Randkurve existiert. Es ist nicht bekannt, ob es eine geschlossene Kurve gibt, die unendlich viele Minimalflächen vom Typ der Kreisscheibe berandet. Auch weiss man für keine einzige Kurve, die mehr als eine Minimalfläche berandet, wieviele sie tatsächlich berandet.

Minimalflächen finden in der Leichtbautechnik gelegentlich Anwendung, so beim Olympiastadion von 1972 in München von Frei Otto (siehe Abbildung 20). Durch Weierstrass’ Kritik geriet die Variationsrechnung gegen Ende des 19. Jahrhunderts in eine Grundlagenkrise. Dank dem Einsatz von Weierstrass selber [14], sowie von Arzéla, Fréchet, Hilbert und Lebesgue wurden dann die eigentlichen Grundlagen der Variationsrechnung geschaffen und so erhob sie sich nach bewältigter Krise wie Phönix aus der Asche. Im 20. Jahrhundert setzte für die Variationsrechnung eine rasante Entwicklung ein, die weiter anhält.



Abbildung 20: Das Olympiastadion in München, aufgenommen vom Fernsehturm.

3 Youngsche Masse

Betrachten wir ein Funktional, welches auf Bolza zurückgeht:

$$I(u) := \int_0^1 (\phi(u'(x)) + u^2(x)) dx$$

wobei ϕ die nicht-konvexe Funktion $\phi(\xi) := (\xi^2 - 1)^2$ ist. Wir möchten nun I (in einem geeigneten Funktionenraum) minimieren unter der Randbedingung

$$u(0) = u(1) = 0$$

Dazu bemerken wir, dass $\inf I(u) = 0$, denn $I(u) \geq 0$ und $I(u_n) \rightarrow 0$ für die Funktionenfolge

$$u_k(x) := \frac{1}{2k} - |x - \frac{1}{2k} - \frac{\lfloor kx \rfloor}{k}|$$

Nehmen wir an, es gäbe eine Funktion u derart, dass $I(u) = 0$. Dann müsste u identisch null sein, damit der zweite Term des Funktionals verschwindet. Dann wäre aber $u' = 0$, und somit $I(u) = 1$, was im Widerspruch zur Annahme steht. Das Funktional nimmt also das Minimum nicht an. Beispiele wie dieses kommen z. B. in den Materialwissenschaften vor (siehe Abbildung 21). Man kann sich auch vorstellen, man möchte in einer Flussströmung gegen den Wind mit einem Segelschiff kreuzen (siehe Abbildung 22): Dabei möchte man einerseits immer den optimalen Winkel zum Wind einhalten, andererseits möglichst in der Flussmitte bleiben, um die dort höhere Strömungsgeschwindigkeit auszunutzen. Beide Forderungen lassen sich aber nicht gleichzeitig realisieren. In der Realität verhindern üblicherweise Energieterme höherer Ordnung (die man vernachlässigt hat, so etwa das Wenden beim Beispiel mit dem Segelschiff) dass die Natur sich ohne Ende immer weiter verfeinert. Dadurch bleibt man auf einer möglicherweise sehr feinen Skala

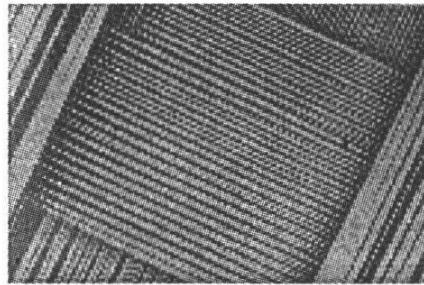


Abbildung 21: Mikrostruktur in einem Cu-Al-Ni Kristall (C. Chu and R. D. James, Department of Aerospace Engineering and Mechanics, Minneapolis). Diese filigranen Erscheinungen lassen sich mit ähnlichen Funktionalen, wie dem gesehenen beschreiben. Eine detaillierte Analyse der Struktur ist möglich (siehe zum Beispiel die Arbeiten von Stefan Müller et al.).

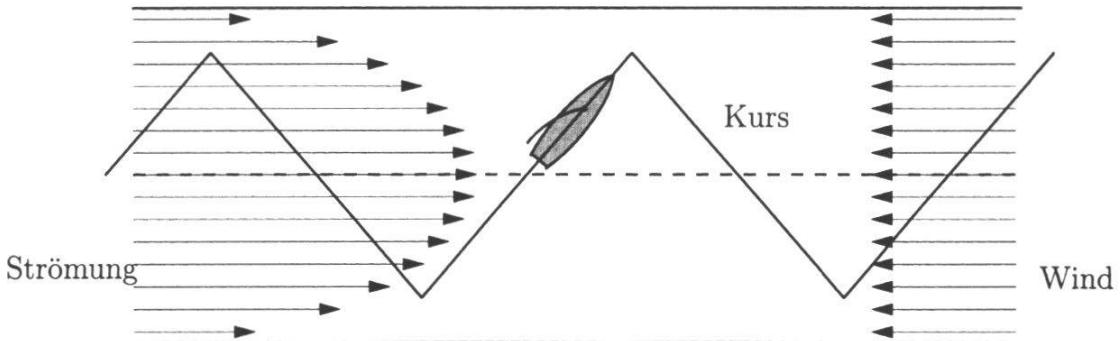


Abbildung 22: Kreuzen

stehen, es entstehen Mikrostrukturen. Kennt man die minimierenden Sequenzen genügend genau, lassen sich Rückschlüsse auf diese Mikrostruktur ziehen.

Wenn Probleme, wie etwa die Gleichung $x^2 = -1$ in einer zur Verfügung stehenden Menge, (bei dieser Gleichung, den reellen Zahlen) keine Lösung besitzen, so ist die Mathematik seit jeher erfängerisch gewesen und sucht die Lösung in einem grösseren Raum, der notfalls erst konstruiert wird (hier die komplexen Zahlen). Ein ähnliches Program lässt sich für unser Variationsproblem durchführen. So kann man sich etwa fragen, ob den minimierenden Sequenzen des Funktionalen irgendeine Eigenschaft gemeinsam ist. Diese liesse sich vielleicht als Lösung in einem verallgemeinerten Sinne interpretieren.

Dies ist in der Tat der Fall. Wir betten dazu I ein in ein verallgemeinertes Variationsproblem:

$$\tilde{I}(u, \nu) = \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(\lambda) d\nu_x(\lambda) + u(x)^2 \right) dx$$

wobei $\nu = (\nu_x)_{x \in [0,1]}$ ein Youngsches Mass mit

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \lambda d\nu_y(\lambda) dy = 0$$

und

$$u(x) = \int_0^x \int_{\mathbb{R}} \lambda d\nu_y(\lambda) dy$$

Eine Folge v_k von Funktionen auf $[0, 1]$ erzeugt ein Youngsches Mass $\nu = (\nu_x)_{x \in [0, 1]}$ in dem Sinne, dass für jedes $x \in [0, 1]$ ν_x ein Wahrscheinlichkeitsmass auf \mathbb{R} ist, welches, grob gesprochen, die Verteilung der Werte von v_k nahe bei x beschreibt. Insbesondere ist, für $v_k = u'$,

$$\tilde{I}(u, \delta_{u'}) = I(u).$$

Dieses verallgemeinerte Problem nimmt das Minimum an, nämlich für $u \equiv 0$, $\nu_x = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$. Es zeigt sich, dass die Ableitungen minimierender Folgen alle das Youngsche Mass $\frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$ erzeugen. Dies ist plausibel, denn die Ableitungen einer Minimalfolge müssen im Schnitt etwa gleich oft die Werte 1 und -1 haben. Insofern ist das Youngsche Mass der Träger der Information über die minimierenden Folgen des ursprünglichen Problems.

So wie die Zahl i , nachdem sie einmal in der Welt war, nicht nur dazu diente, die Gleichung $x^2 = -1$ zu lösen, sondern einen Nutzen an zum Teil unerwarteten Stellen mit sich brachte, so zeigte es sich auch bei den Youngschen Massen, dass sie nicht nur für Variationsprobleme ein nützliches Werkzeug liefern, sondern dass man mit ihnen ganz allgemein schwache Limites von Folgen berechnen kann, auf die eine nichtlineare Funktion angewendet wurde. So ist eben beispielsweise

$$\sin(nx) \rightharpoonup 0 \quad \text{in } L^2[0, \pi]$$

aber

$$\sin^2(nx) \rightharpoonup \frac{1}{2} \neq 0^2 \quad \text{in } L^2[0, \pi]$$

Dies macht die Youngschen Massen zu einem hervorragenden Werkzeug in der Theorie nichtlinearer partieller Differentialgleichungen, aber das ist wieder eine andere Geschichte.

Literatur

- [1] F. J. Almgren Jr., L. Simon: Existence of embedded solutions of Plateau's problem. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **6** (1979), no. 3, 447–495.
- [2] J. Douglas: Solution of the problem of Plateau. Trans. Amer. Math. Soc. **33** (1931), no. 1, 263–321.
- [3] G. Galilei: Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend: erster bis sechster Tag Arcetri, 6. März 1638. Hrsg. von Arthur von Oettingen, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1985. Originaltitel: Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno a due nuove scienze, attenenti alla meccanica et i movimenti locali
- [4] S. Hildebrandt: Boundary behavior of minimal surfaces. Arch. Rational Mech. Anal. **35** 1969 47–82.
- [5] S. Hildebrandt, A. Tromba: Mathematics and optimal form. Scientific American Books, Inc., New York 1985.

- [6] N. Hungerbühler: Geometrical aspects of the circular billiard problem. *Elem. Math.* **47** (1992), no. 3, 114–117.
- [7] W. H. Meeks III, S. T. Yau: The classical Plateau problem and the topology of three-dimensional manifolds. The embedding of the solution given by Douglas–Morrey and an analytic proof of Dehn’s lemma. *Topology* **21** (1982), no. 4, 409–442.
- [8] P. M. Neumann: Reflections on reflection in a spherical mirror. *Amer. Math. Monthly* **105** (1998), no. 6, 523–528.
- [9] J. C. C. Nitsche: The boundary behavior of minimal surfaces. Kellogg’s theorem and Branch points on the boundary. *Invent. Math.* **8** 1969 313–333.
- [10] J. Plateau: *Statique expérimentale et théorie des liquides soumis aux seules forces moléculaires I*. Paris: Gauthiers-Villars 1873.
- [11] T. Radó: On Plateau’s problem. *Ann. of. Math.* **31** (1930), 457–469.
- [12] F. Tomi, A. J. Tromba: Extreme curves bound embedded minimal surfaces of the type of the disc. *Math. Z.* **158** (1978), no. 2, 137–145.
- [13] J. Waldvogel: The problem of the circular billiard. *Elem. Math.* **47** (1992), no. 3, 108–113.
- [14] K. Weierstrass: *Mathematische Werke II. Über das sogenannte Dirischlet’sche Prinzip*, 49–54. Berlin: Mayer & Müller 1895.

