**Zeitschrift:** Bulletin de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles = Bulletin der Naturforschenden Gesellschaft Freiburg

**Herausgeber:** Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles

**Band:** 75 (1986)

**Heft:** 1-2

**Artikel:** "Die Wahrscheinlichkeit ist nämlich ein Grad der Gewissheit ..." : Rückblicke auf die Vorgeschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung

**Autor:** Ineichen, Robert

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-308652

# «Die Wahrscheinlichkeit ist nämlich ein Grad der Gewißheit ...»

Rückblicke auf die Vorgeschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung [1]

von ROBERT INEICHEN, Mathematisches Institut der Universität Freiburg

## 1. Einleitung

Man pflegt die Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Regel in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts beginnen zu lassen. In der Tat:

- 1654 diskutieren BLAISE PASCAL (1623–1662) und Pierre de Fermat (1601–1665) in ihrem Briefwechsel die Lösungen von zwei Problemen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, des *«problème des dés»* und des *«problème des points» («problème des partis»).* Diesen Überlegungen folgen weitere Untersuchungen Pascals. Seine berühmte, die Existenz Gottes betreffende Wette – *«le pari de Pascal»* – dürfte eine der ersten Anwendungen probabilistischer Betrachtungen auf ein Problem darstellen, das außerhalb des Bereichs der Glückspiele liegt; modern gesprochen handelt es sich um Entscheidungstheorie. Sie wird in den *Pensées* auseinandergesetzt, die 1670 im Druck erschienen sind; eine Zusammenfassung dieser Ideen ist aber bereits in die Logik von Port Royal eingegangen (ARNAULD et NICOLE, 1662), in welcher übrigens auch Wahrscheinlichkeiten schon zahlenmäßig berechnet werden.

- 1657 publiziert Christian Huygens (1629–1695) eine kleine, streng systematische Abhandlung über Glückspiele: *De ratiociniis in aleae ludo,* als Anhang zu den *Exercitationes mathematicae* von Frans van Schooten (1615–1660). Die erste Fassung dieser Schrift, 1656 holländisch geschrieben, erscheint 1660 in Amsterdam: *Van rekeningh in spelen van geluck.*

- Der englische Kaufmann John Graunt (1620–1674) gibt 1662 die erste uns bekannte Absterbeordnung heraus, die auch zahlreiche andere einschlägige Beobachtungen enthält: *Natural and political observations mentioned in a following index, and made upon the bills of mortality.* Sie werden auch außerhalb Englands stark beachtet, so in Holland, in Frankreich – und in Basel (Jakob Bernoulli!). Allerdings ist er sich wohl des Zusammenhangs seiner Untersuchungen mit Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht bewußt: «Er denkt in einem deterministischen Modell, was sich zum Beispiel darin äußert, daß er durchwegs von Proportionen spricht» (K. KOHLI und B. L. VAN DER WAERDEN, 1975). – Und 30 Jahre später erscheint die Sterbetafel des englischen Mathematikers und Astronomen Edmund Halley (1656–1742), «die sogar bezüglich Aufstellung genau den Anforderungen entspricht, die

[1] «Die Wahrscheinlichkeit ist nämlich ein Grad der Gewißheit ...»: Zitat aus der *Ars conjectandi,* der «Kunst des Mutmaßens» also, von JAKOB BERNOULLI.

Erweiterte Fassung der Antrittsvorlesung an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Freiburg (Schweiz), die im Rahmen der Vorträge der Freiburger Naturforschenden Gesellschaft am 27. Februar 1986 stattgefunden hat.

wir heute – bald 400 Jahre später – immer noch an eine Sterbetafel stellen» (H. BÜHLMANN, 1964).

- 1671 erscheint die erste systematische Theorie der Berechnung von Leibrenten, verfaßt vom holländischen Staatsmann Johan de Witt (1625–1671): *Waerdye van lijfrenten.* De Witt verwendet unter anderm auch den Begriff der Wahrscheinlichkeit; sein Fachausdruck dafür ist «Apparentiie ofte hazardt» (K. KOHLI und B. L. VAN DER WAERDEN, 1975).
- Schließlich hat JAKOB BERNOULLI (1654–1705) um etwa 1690 die Vorarbeiten zu seiner *Ars conjectandi,* der «Kunst des Mutmaßens», im wesentlichen abgeschlossen. Das Buch erscheint allerdings erst 1713, also acht Jahre nach seinem Tode. B. L. VAN DER WAERDEN (1975) würdigt diesen ersten großen Höhepunkt in der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit den Worten: «Jakob Bernoulli hat zuerst die Wichtigkeit des Wahrscheinlichkeitsbegriffes für das gesamte menschliche Leben erkannt. Er hat nicht nur Glückspiele betrachtet, bei denen man Wahrscheinlichkeiten durch Auszählung von möglichen und günstigen Fällen a priori bestimmen kann, sondern er wandte die Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung auch auf Krankheiten und Todesfälle an, bei denen man nicht «gleichmögliche» Fälle auszählen kann. Er hat zuerst die Frage untersucht, wie weit man Wahrscheinlichkeiten empirisch durch Beobachtung von Häufigkeiten bestimmen kann. Er gab in seiner *Ars conjectandi* einen strengen Beweis des *Gesetzes der großen Zahl* und wurde dadurch zum Begründer der mathematischen Statistik.» – Sein Gesetz der großen Zahl heißt heute das «schwache Gesetz der großen Zahl»; es besagt im wesentlichen, daß die relative Häufigkeit eine *konsistente Schätzung der Wahrscheinlichkeit* darstellt.

Der Beginn der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird also mit einem langgezogenen Posaunenstoß von eindrücklicher Stärke angekündigt! Haben nun diese Entwicklungen gewissermaßen auf einer *tabula rasa* begonnen oder gibt es in den Jahrhunderten vorher doch wenigstens einige Hinweise, die auf frühere stochastische Überlegungen schließen lassen? Dieser Frage soll hier etwas nachgegangen werden. Es ist dabei nicht möglich, irgendwelche Vollständigkeit anzustreben. Bei unseren Rückblicken wollen wir deshalb das Hauptaugenmerk nur auf die folgenden beiden Aspekte richten:

(1) Moderne Darstellungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung beginnen sehr oft mit der Feststellung, daß sich in der Natur, in der Technik und in der sozialen Umwelt viele Erscheinungen aufweisen lassen, die wir als *zufällig* bezeichnen, bei denen aber die *relative Häufigkeit* in längeren Serien von Beobachtungen doch eine gewisse Konstanz zeigt: Ihre Werte scheinen um eine – im allgemeinen unbekannte – Konstante zu schwanken. Man spricht von Stabilität der relativen Häufigkeit oder von *statistischer Regelmäßigkeit.* Ist diese statistische Regelmäßigkeit schon früher erkannt worden?

(2) Unter gewissen Voraussetzungen, die meistens bei Glücksspielen erfüllt sind, läßt sich die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bekanntlich in einfacher Weise als *Quotient aus der Anzahl der günstigen und der Anzahl der möglichen Fälle* berechnen. Man

spricht dann meistens von der *«klassischen»* oder der *«Laplaceschen»* Berechnung der Wahrscheinlichkeit: «... la probabilité d'un événement est le rapport du nombre des cas qui lui sont favorables au nombre de tous les cas possibles, lorsque rien ne porte à croire que l'un de ces cas doit arriver plutôt que les autres, ce qui les rend, pour nous, également possibles», schreibt 1812 PIERRE SIMON DE LAPLACE (1749–1827). – Finden wir Spuren, die darauf schließen lassen, daß diese naheliegende Berechnung von Chancen, von Wahrscheinlichkeiten, schon wesentlich früher verwendet worden ist? Hat man gleichmögliche, also *gleichwahrscheinliche* Fälle als solche erkannt?

## 2. Die Würfel erfand Palamedes während des Troianischen Krieges ...

*«Tesseras ... Palamedes invenit Troiano Bello»* schreibt Plinius in seiner Naturalis Historia (N. H. VII,56,202). Damit und mit andern Spielen wollte er den vor Troia in den langen Wartezeiten gelangweilten Achäern die Zeit vertreiben. Nun darf man zwar nicht verschweigen, daß *tessera* in dieser Plinius-Stelle auch noch anders als durch «Würfel» übersetzt werden kann; es scheint aber doch festzustehen, daß man im Altertum die Erfindung der κύβοι, also der auf sechs Seiten bezeichneten Würfel, sehr oft Palamedes zugeschrieben hat, jener großen Erfindergestalt, von deren «erhabenem Ruhme» – *incluta fama* – auch Vergils Aeneis (II,81) kündet. S. KARUSU (1973) meint sogar, daß sich sein Porträt – «das älteste griechische mythische Porträt» – auf einem der ältesten griechischen Würfel findet, gemalt von der Hand «des bedeutendsten Malers vor der Mitte des 7. Jh. v. Chr.» – Der Geschichtsschreiber Herodotos macht ihm allerdings den Ruhm dieser Erfindung streitig. In den *Geschichten* des Herodotos (I,94) ist nämlich zu lesen, daß die Lyder den Würfel nebst anderem Spielgerät während einer großen Hungersnot erfunden hätten, um sich den Hunger zu vertreiben: «den einen Tag spielten sie, damit sie nicht gelüste nach Speise, und den andern aßen sie und ließen das Spiel». – Andere haben die Erfindung der Würfel den Ägyptern zugeschrieben. So kann man etwa im Dialog *Phaidros* von Plato lesen, daß der ägyptische Gott Theuth (Thot) den Menschen Würfel und Brettspiel geschenkt habe.

Wie dem auch sei, es scheint auf alle Fälle festzustehen, daß bereits in der Antike «Würfel» *im Spiel* verwendet worden sind: Einerseits hat man Knöchelchen aus der Fußwurzel des Schafes oder der Ziege verwendet, die sogenannten *Astragali* (ἀστράγαλοι). Es handelt sich beim Astragalus um das Sprungbein von Schaf (Fig. 1) oder Ziege; die Römer bezeichneten dieses Knochenstück durch *talus* oder durch *taxillus.* Andererseits sind aber auch eigentliche *Würfel* benützt worden, also mehr oder weniger reguläre Hexaeder aus Ton, Stein, Knochen, Metall, Holz, Glas, ja selbst aus Elfenbein. Über die mit dem Knöchelchenspiel in der Antike verbundenen Fragen orientiert ausführlich K.-G. HAGSTROEM (1932). Es hat sich übrigens als jeu aux osselets (gioco degli ossetti) an verschiedenen Orten bis in die letzten Jahrzehnte erhalten; die Spielzeugindustrie bietet neuerdings auch «Knöchelchen» aus Plastik an!

Nicht nur die alten Griechen haben gewürfelt. Es gibt auch zahlreiche Zeugnisse über das Würfelspiel bei den *Römern;* darüber berichten zum Beispiel J. VÄTERLEIN (1976) und A. RIECHE (1984). Vor allem die große Zahl von erhaltenen Zeugnissen, die vor dem Würfel warnen, zeigen, daß der Würfel im Rom der Kaiserzeit weiteste

Verbreitung genossen hat und daß sich die Römer der schlimmen Folgen der großen Spielleidenschaft bewußt waren. Mit *alea* bezeichneten die Römer das Würfelspiel und den «Würfel» ganz allgemein, also den *Astragalus (talus, taxillus)* und das mehr oder weniger reguläre Hexaeder, das auch als *tessera* bezeichnet wurde.

*Vier* Astragali bildeten bei den Römern einen vollständigen Satz. Die gerundeten Stirnseiten der Knöchelchen sind beim Spiel nicht in Betracht gezogen worden; von den Längsseiten sind die beiden schmalen oft mit 1 und 6 bezeichnet worden, die

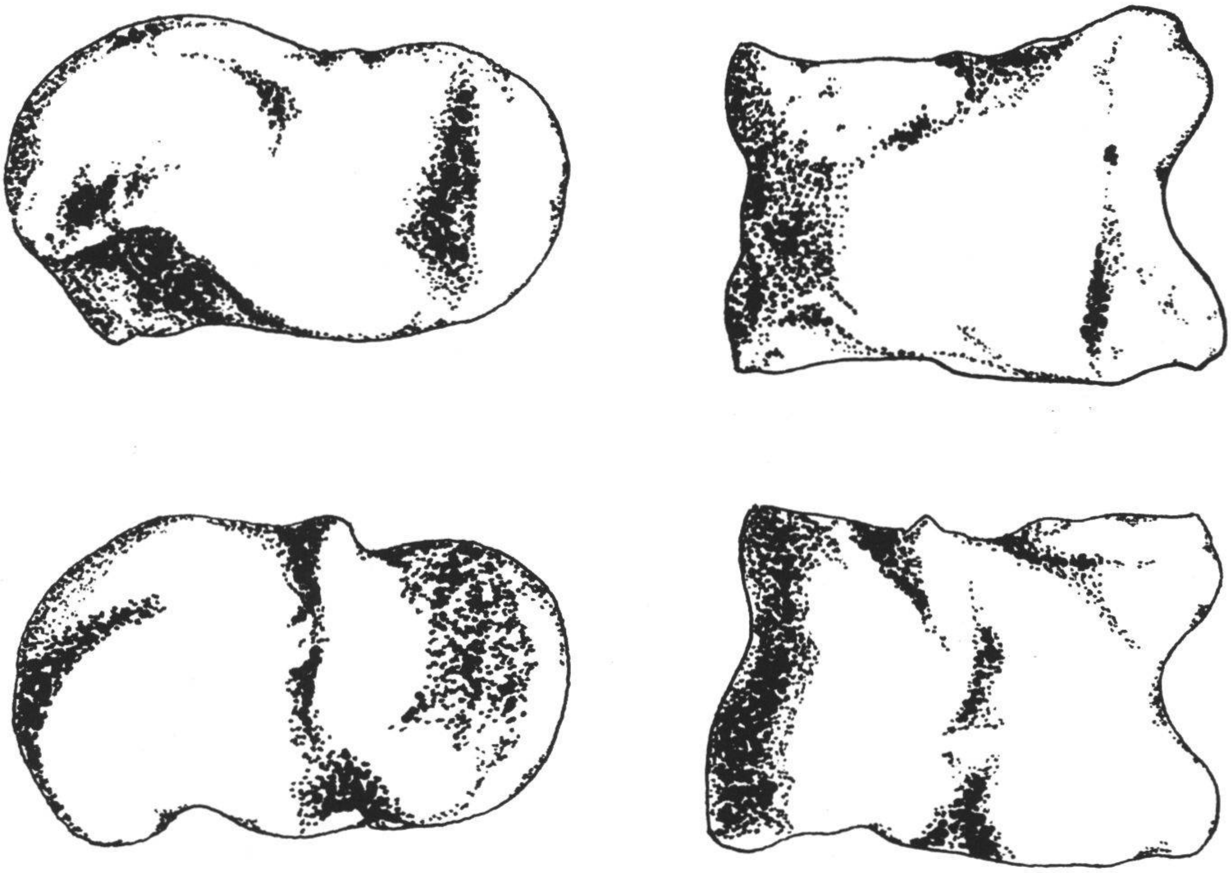


Fig. 1: Astragalus (talus, Sprungbein) des Schafes. Links die beiden schmalen Seiten, rechts die beiden breiten Seiten; die Stirnseiten sind beim Spiel nicht in Betracht gezogen worden. (Die Zeichnung verdanke ich unserer Tochter Barbara.)

beiden breiten Seiten, die häufiger auftreten, mit 3 und 4. Die Zahlenwerte selbst waren wohl auf den Knöchelchen nur selten markiert. Ihre Zuteilung scheint vom üblichen sechsseitigen Würfel übernommen worden zu sein. Beim gewöhnlichen Spiel mit diesen Knöchelchen (ἀστραγαλισμός, *ludus talarius*) spielten diese Werte an sich keine Rolle, was zählte, war die *Kombination* der Seiten, die die Knöchelchen zeigten. Als bester Wurf galt, dies scheint festzustehen, der *Venuswurf:* Jeder der vier tali zeigte eine andere Seite. Als *canis,* als Hundewurf also, wurde ein ungünstiger Wurf bezeichnet; ob dies ein Wurf war, bei dem alle vier Knöchelchen die Seite mit dem niedrigsten Zahlenwert, das heißt die 1, zeigten (J. VÄTERLEIN, 1976) oder einfach ein Wurf, bei welchem die Astragali die gleiche Seite zeigten (K.-G. Hagstroem, 1932), dürfte schwer zu entscheiden sein. Die Redensart «auf den Hund kommen» erinnert noch an diese ungünstigen Würfe (J. Väterlein, 1976): Wer einen *canis* warf, hatte im Spiel verloren, oft sein gesamtes Vermögen.

Selbstverständlich interessiert, mit welchen *Wahrscheinlichkeiten* die vier Werte 1, 6, 3, 4 des talus eines «modernen» Schafes auftreten. 207 Würfe mit einem solchen talus lieferten mir die nachstehenden relativen Häufigkeiten als Schätzwerte für die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten:

$$P(1) \approx 8{,}70\%;\ P(6) \approx 9{,}18\%;\ P(3) \approx 43{,}00\% \text{ und } P(4) \approx 39{,}13\%.$$

Man kann also grob etwa $P(1) \approx P(6) \approx 0{,}1$ und $P(3) \approx P(4) \approx 0{,}4$ setzen in Übereinstimmung mit F. N. David (1962) und K.-G. Hagstroem (1932). Aber man darf sich natürlich über die Genauigkeit solcher Schätzwerte keine zu großen Illusionen machen: Berechnet man etwa die *95%-Konfidenzintervalle* so erhält man aus den obigen Zahlen für $P(1)$ das Intervall (4,62%; 12,78%) und für $P(3)$ das Intervall (36,01%; 49,98%); von ungefähr entsprechender Größe sind die Intervalle für $P(6)$ bzw. $P(4)$.

Man bemerkt nun sofort, daß die Wahrscheinlichkeit für einen *Venuswurf* ungefähr angegeben werden kann durch $P(V) \approx 4! \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}4^2 \approx 3{,}8\%$, während die Wahrscheinlichkeit für einen *canis* – falls er durch das viermalige Auftreten der Seite 1 definiert ist – durch $0{,}1^4 = 10^{-4}$ gegeben ist. Der beste und der schlechteste Wurf waren also keineswegs durch eine möglichst kleine, bzw. möglichst große Wahrscheinlichkeit gekennzeichnet, wie wir das von heutigen Gesichtspunkten aus erwarten würden. Vielleicht muß man aber anders überlegen: Der Venuswurf als beste aller $\binom{4+4-1}{4} = 35$ möglichen Kombinationen mit Wiederholung darf als sicher feststehend angenommen werden. Nun kann man versuchen, die andern 34 Kombinationen auf möglichst «natürliche» Weise *in Gruppen aufzuteilen.* Würfe, die in dieselbe Gruppe gehören, repräsentieren denselben Wert. Es gelingt nun tatsächlich, solche Gruppen zu bilden und dabei zu erreichen, daß für jede dieser Gruppen die Wahrscheinlichkeit, daß irgendeine ihr angehörende Kombination realisiert wird, größer ist als die Wahrscheinlichkeit des Venuswurfes; zwei passende Vorschläge gibt K.-G. Hagstroem (1932). Schließen wir diese Betrachtungen mit der Wiedergabe eines Epigramms von Martial (Epigr. Lib. XIV,14; die Übersetzung von R. Helm ist zitiert nach A. Rieche, 1984); gemeint ist offensichtlich der Venuswurf:

«Wenn kein Knöchel der vier sich dir mit dem gleichen Gesicht zeigt,
wirst du sagen, ich gab wirklich ein großes Geschenk.»

«Cum steterit nullus vultu tibi talus eodem
munera me dices magna dedisse tibi.»

Soweit man aus Funden schließen kann, haben sich übrigens auch Menschen prähistorischer Zeiten bereits der Astragali bedient. Sind sie zum Zählen benützt worden, als Kinderspielzeuge, zu irgendwelchen magischen Zwecken oder bereits als Zufallsgeneratoren bei Glücksspielen? Wir wissen es nicht.

Wie ist man wohl zu den *eigentlichen Würfeln,* also zu den mehr oder weniger regelmäßigen Hexaedern gekommen? Hat man vielleicht zunächst die gerundeten Stirnseiten der Knöchelchen abgeschliffen? Entsprechende Funde liegen vor (F. N. DAVID, 1962). Der älteste Fund eines eigentlichen Würfels soll im nördlichen Irak gemacht worden sein (F. N. DAVID, 1962; L. E. MAISTROV, 1974); er stammt aus dem Anfang des 3. Jahrtausends vor Christus und ist aus Ton hergestellt. Auch die ältesten Würfel, die man im Nationalmuseum in Athen findet, sind alle aus Ton gefertigt. Die Anordnung der Punkte auf dem eben erwähnten ältesten Würfel kann der folgenden Abwicklung entnommen werden (Fig. 2):

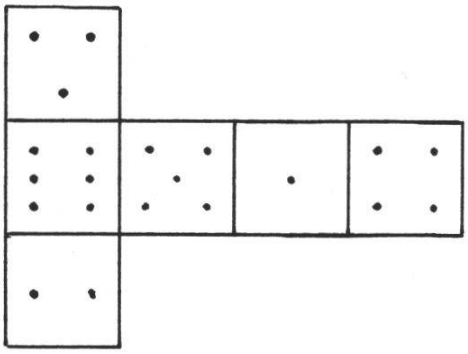


Fig. 2: Abwicklung des ältesten bekannten Würfels (aus Tepe Gawra im nördlichen Irak); Beginn des 3. Jahrtausends v. Chr.

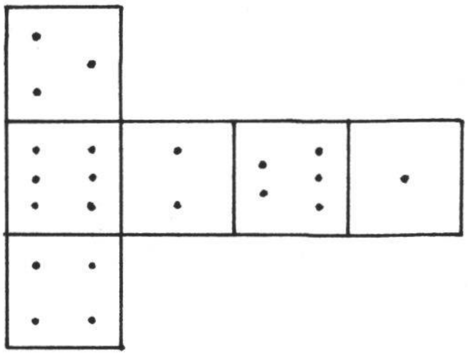


Fig. 3: Abwicklung eines Würfels aus Indien (aus Mohenjo-Daro); 3. Jahrtausend v. Chr.

Somit liegt 2 gegenüber 3, 4 gegenüber 5 und 6 gegenüber 1. – Ein weiterer Würfel aus demselben Zeitraum, den man in Indien gefunden hat, zeigt 1 gegenüber 2, 3 gegenüber 4 und 5 gegenüber 6 (F. N. DAVID, 1962). Die Abwicklung zeigt Fig. 3. Diese Verteilung der Punkte, bei der also aufeinanderfolgende Werte einander gegenüberliegen, scheint noch längere Zeit gemacht worden zu sein. Später, so zum Beispiel bei einem ägyptischen Würfel aus dem 16. Jh. v. Chr. (L. E. MAISTROV, 1974), findet man dann bereits die heutige kanonische Anordnung der Punktezahlen, wie sie uns vertraut ist: 1 gegenüber 6, 2 gegenüber 5, 3 gegenüber 4. Diese Anordnung findet man auch auf Fundstücken, die zu den ältesten bekannten Würfeln Griechenlands gehören (S. KARUSU, 1973); sie hat sich als einzige durchgesetzt. Eigentlich ist dies erstaunlich: Die Werte von 1 bis 6 können ja zunächst auf $6! = 720$ Arten den sechs Seiten eines Würfels zugeordnet werden. Man wird nun Bezifferungen, die durch *Drehung* ineinander übergeführt werden können, nicht unterscheiden wollen. Da indessen die *Drehgruppe des Würfels* $4! = 24$ Elemente besitzt, so sind somit immer noch $6! : 4! = 30$ wesentlich verschiedene Bezifferungen möglich, Bezifferungen also, die sich nicht einfach durch Drehung zur Übereinstimmung bringen lassen.

Waren diese alten Würfel *gute, «ideale» Würfel?* Lieferten sie in größeren Serien die verschiedenen Augenzahlen ungefähr mit derselben relativen Häufigkeit? Bei L. E. MAISTROV (1974) findet man solche Häufigkeiten für einige von ihm untersuchte Würfel aus der Antike: Zum Beispiel erhielt er in 235 Würfen mit einem knöchernen Würfel aus dem alten Ägypten (16. Jh. v. Chr.) die Augenzahlen 1, 2, ..., 6 mit den absoluten Häufigkeiten 37, 17, 49, 59, 28, 45; in 232 Würfen mit einem gläsernen Würfel aus dem Ägypten des 1./2. Jh. n. Chr. treten diese Augenzahlen mit den Häufigkeiten 49, 38, 38, 29, 30, 48 auf. Ideale Würfel? Der $\chi^2$–*Test* ergibt im ersten Falle höchst signifikante Abweichungen von der Gleichverteilung; im zweiten Falle hingegen läßt sich auf dem 5%–Niveau keine signifikante Abweichung von der Gleichverteilung feststellen.

Im *Vindonissa-Museum* in Brugg (Schweiz) liegen zahlreiche aus Knochen hergestellte Würfel. Diese beinernen Würfel sind zweifellos von den römischen Soldaten der Garnison verwendet worden; sie konnten sich keine teuren importierten Würfel – etwa aus Elfenbein – leisten. Einer ausführlichen Untersuchung von E. SCHMID (1980) entnehmen wir:

- Die oben erwähnte kanonische Anordnung der Punkte ist bei allen diesen Würfeln eingehalten. Die Darstellung der Werte durch eine Anzahl Punkte auf einer Seitenfläche geschieht nach einem Grundmuster, das auch heute in der Regel noch verwendet wird: Das Einerauge im Mittelpunkt der Seitenfläche, Zweier- und Dreieraugen in einer Diagonalen, Viereraugen in den Ecken usw.

- Wie dies bei den heutigen Würfeln vorkommt, treten *zwei verschiedene Orientierungen* auf. Die Abwicklungen führen in etwa 1/3 aller Fälle auf das Schema links, in den restlichen auf das Schema rechts:

```
4              3
6 5 1 2        6 5 1 2
3              4
```

- Eine exakte Vermessung der Würfel erbrachte *kein einziges* Exemplar, das – äußerlich gesehen – einen nahezu *idealen* Würfel, also ein nahezu ideales reguläres Hexaeder darstellt.

- Würfel mit *Löchern?* Ein Teil dieser beinernen Würfel ist aus Röhrenknochen des Mittelfußes oder der Mittelhand des Rindes hergestellt: Man hat die gewölbten Außenwände der Knochen abgeschliffen und so einen Vierkantstab hergestellt. Dieser wurde in würfelförmige Stücke zersägt; die vorhandenen Höhlungen wurden mit Knochenzapfen verschlossen. Mit allen diesen Arbeiten waren die römischen Beindrechsler bestens vertraut. Beweise, daß Würfel mit Löchern als manipulierte, «gezinkte» Würfel gedient hätten, liegen übrigens keine vor.

Natürlich stellt sich bei den Vindonissa-Würfeln die Frage, mit welchen *Häufigkeiten* die einzelnen Augenzahlen in längeren Serien auftreten. In verdankenswerter Weise ermöglichte es mir E. Schmid, die Autorin der oben erwähnten Arbeit, mit ihr zusammen eine Anzahl von Würfelexperimenten im Vindonissa-Museum in Brugg durchzuführen. Hier einige Ergebnisse:

- Der Vindonissa-Würfel V 20 (Bezeichnung nach E. SCHMID, 1980), ein recht gut aussehender Würfel (ohne Loch), ergab in 300 Versuchen die in Fig. 4 dargestellten Häufigkeiten. Dies führt zu einem $\chi^2$ von 21, 88, und man kann sogar noch auf dem

Niveau von 0,1 % die Nullhypothese «Gleichverteilung» verwerfen: Die Abweichnungen von der Gleichverteilung sind nicht als zufällig, sondern als höchst signifikant zu betrachten.

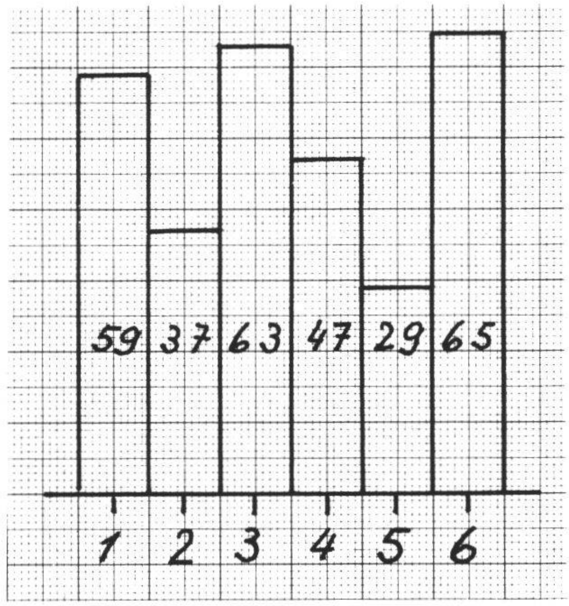



Fig. 4: 300 Würfe mit dem Vindonissa-Würfel V 20.

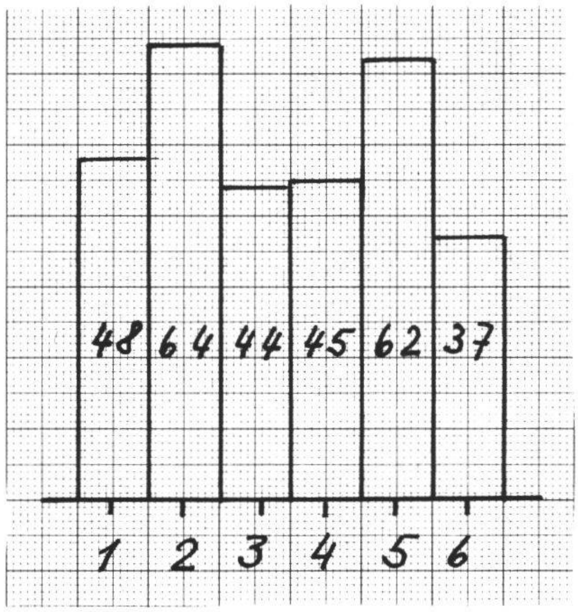



Fig. 5: 300 Würfe mit dem Vindonissa-Würfel 36:711 (mit Loch und Zapfen).

- Der ebenfalls noch recht gut aussehende Vindonissa-Würfel 36:711, ein Würfel mit Loch und Zapfen, lieferte in 300 Versuchen die Ergebnisse der Fig. 5. Diese Verteilung ergibt ein $\chi^2$ von 11,48. Man kann jetzt die Nullhypothese «Gleichverteilung» nur noch auf dem Signifikanzniveau von 5 % verwerfen: Die Abweichungen von der Gleichverteilung werden auch hier noch als signifikant und nicht bloß als zufällig betrachtet.

Hier muß man nun ehrlicherweise einblenden, daß auch moderne Spielwürfel nicht immer über jeden Zweifel erhaben sind: 600 Würfe mit einem modernen Spielwürfel – zufällig aus der Spielkiste meiner Kinder herausgegriffen – führten auf das Histogramm der Fig. 6. Das $\chi^2$ ist hier 14, 98. Die Abweichungen von der Gleichverteilung sind als signifikant zu betrachten; die Nullhypothese «Gleichverteilung» kann sogar noch auf dem Niveau von 2,5 % verworfen werden! Wesentlich besser kann es allerdings herauskommen, wenn man mit einem guten Zufallsgenerator *elektronisch «würfelt»,* also 1, 2, ..., 6 als gleichverteilte Zufallszahlen zu erzeugen versucht: 600 derartige «Würfe» führten auf ein $\chi^2$, das nur noch 5, 78 beträgt; 50 000 solche Würfe – mit demselben soliden Basic-Programm auf einem Tischrechner von einem hilfsbereiten Kollegen durchgeführt – lieferten für die einzelnen Augenzahlen die Prozentsätze

16,9 %; 16,5 %;16,3 %; 16,9 %; 16,6 %; 16,8 %;

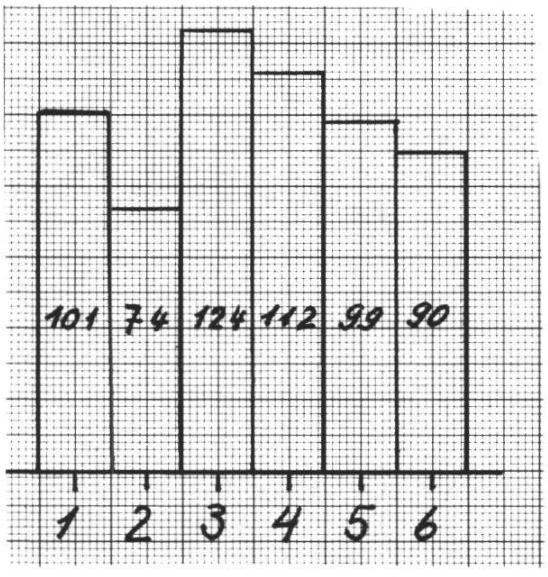



Fig. 6: 600 Würfe mit einem zufällig herausgegriffenen modernen Spielwürfel.

also eine Verteilung, bei der man höchstens noch von ganz kleinen zufälligen Abweichungen sprechen kann.

Würfel und Knöchelchen hat man oft aus dem Würfelbecher, dem *fritillus* oder φιμός geworfen. Dieser wies auf der Innenseite kleine Stufen auf, die die Würfel zum Springen oder Kollern brachten (Fig. 7).

Manchmal ist auch ein kleiner Turm *(turriculum,* πύργος) (Fig. 8) benützt worden: Man warf den Würfel oben hinein, dann kollerte er über verschiedene Stufen dem unten angebrachten Tor entgegen, aus dem er heraussprang. Ein besonders schönes Exemplar eines solchen *Spielturmes* aus Bronze ist übrigens 1983 auf dem Gelände einer römischen Villa in der Nordeifel gefunden worden, der erste derartige Fund! Er wird in die erste Hälfte des 4. Jh. nach Chr. eingeordnet. Seine Höhe mißt etwa 23 cm;

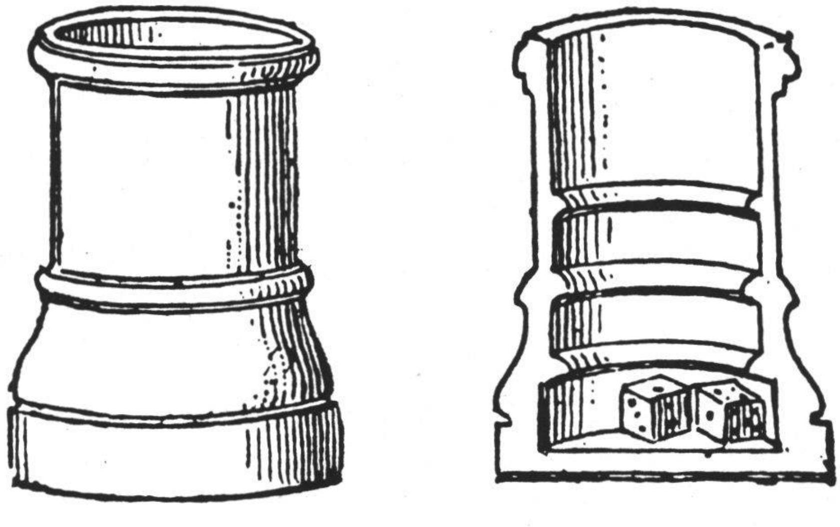


Fig. 7: Römischer Würfelbecher (aus J. Väterlein, 1976).

die Seitenflächen sind durchbrochen und etwa 9,5 cm breit (H. G. HORN, 1985). An seinem oberen Rand sind die Worte *«Utere felix vivas»* zu lesen, also «Genieße und lebe glücklich». Auf der Vorderseite steht

PICTOS VICTOS HOSTIS DELETA LUDITE SECURI,

von Horn frei übersetzt:

«Das Spielbrett ist von den gezinkten und geschlagenen Spielsteinen des Gegners frei; spielt unbekümmert!»

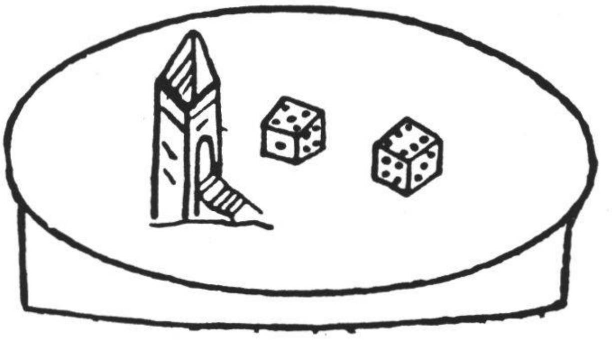


Fig. 8: Würfeltürmchen auf einem Kalenderblatt für den Monat Dezember, den Monat der Saturnalien, des Jahres 354 (aus J. VÄTERLEIN, 1976).

Soviel zu dem Funden. Wurde viel gewürfelt? Im alten Rom sicher, und zwar von Leuten aller Stände, die Caesaren nicht ausgenommen. Eine Zeitlang waren zwar solche Spiele gemäß einer *lex alearia* nur an den *Saturnalien* erlaubt; ja, das Klappern der «launischen Würfelbecher» – der *«incerti fritilli»* – war nach Martial geradezu charakteristisch für den Monat der Saturnalien, also für den Dezember (J. VÄTERLEIN, 1976). – Suetonius schreibt in seinem *Leben der Caesaren* über Augustus, daß er auch außerhalb der Saturnalien an Werk- und Feiertagen mit großem Vergnügen würfelte (Suet. Aug. 71), und über Claudius finden wir bei ihm (Claud. 32, 2): *«Aleam studiosissime lusit de cuius arte librum quoque misit.»* Claudius hat also sehr gerne gewürfelt und ein Buch über diese Kunst geschrieben. Leider ist dieses Buch nicht erhalten geblieben. Die Spiele der Antike sind ausführlich beschrieben bei L. BECQ DE FOUQUIÈRES (1873).

Abschließend sei noch bemerkt, daß auch die *Germanen* dem Würfelspiel frönten; dies ist durch Funde und durch Tacitus (Germania, 24) bezeugt:

«Das Würfelspiel betrieben sie erstaunlicherweise nüchtern wie ein ernsthaftes Geschäft und in so unbeschwertem Leichtsinn im Gewinnen und Verlieren, daß sie in einem allerletzten Wurf um ihre Freiheit und ihr Leben kämpfen, wenn sie alles andere verloren haben.»

## 3. Und trotzdem keine Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Antike?

In der alten Welt ist also wahrhaft genügend gewürfelt worden. Würfelspiele aber erzeugen zufällige Ereignisse, und das Phänomen des Zufälligen versucht man heute durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu erfassen. Liegt es nun nicht nahe, zu vermuten, man müsse schon in jener Zeit gewisse Überlegungen gemacht haben, die in etwa nach Wahrscheinlichkeitsrechnung aussehen? Schließlich haben ja einige mathematische Disziplinen ihre Wurzeln in der Antike. Solche Hinweise auf eine wenigstens «implizite» Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Antike hat man gesucht. Das Ergebnis ist mehr als bescheiden:

Man findet *keine* Hinweise auf beobachtete *statistische Regelmäßigkeit* und schon gar nichts, was nach einem intuitiven Erfassen des Gesetzes der großen Zahl aussieht. Dabei wäre ja die Feststellung einer gewissen Stabilität der relativen Häufigkeit nicht unbedingt an das Vorhandensein von möglichst idealen Würfeln geknüpft: Auch *nicht* ideale Würfel zeigen bei zunehmender Zahl der Versuche die uns wohl bekannte statistische Regelmäßigkeit. Wir illustrieren dies durch 300 Würfe mit dem Vindonissa-Würfel V 6. Er präsentiert sich schon vom Aussehen her als schlechter Würfel (Fig. 9).

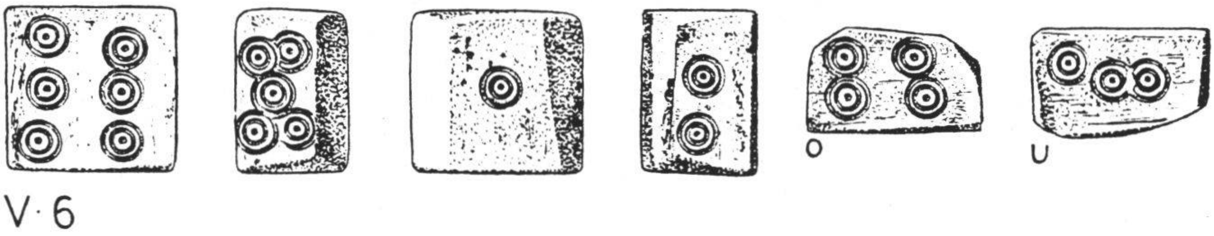



Fig. 9: Die Seiten des Vindonissa-Würfels V 6, hergestellt aus Knochen; 6–5–1–2 Mantel; O Deckfläche (4), U Grundfläche (3); aus E. SCHMID (1980).

Das Histogramm (Fig. 10) bestätigt unsere Befürchtungen:

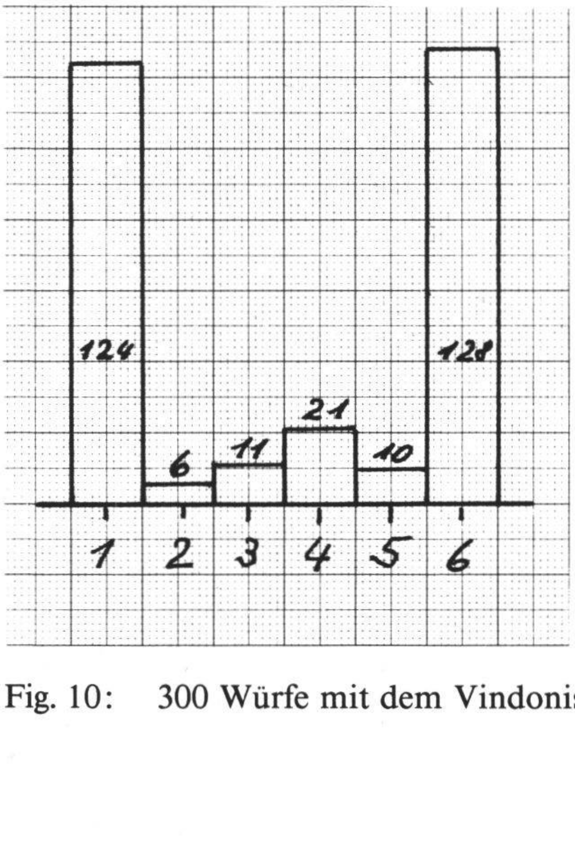



Fig. 10: 300 Würfe mit dem Vindonissa-Würfel V 6.

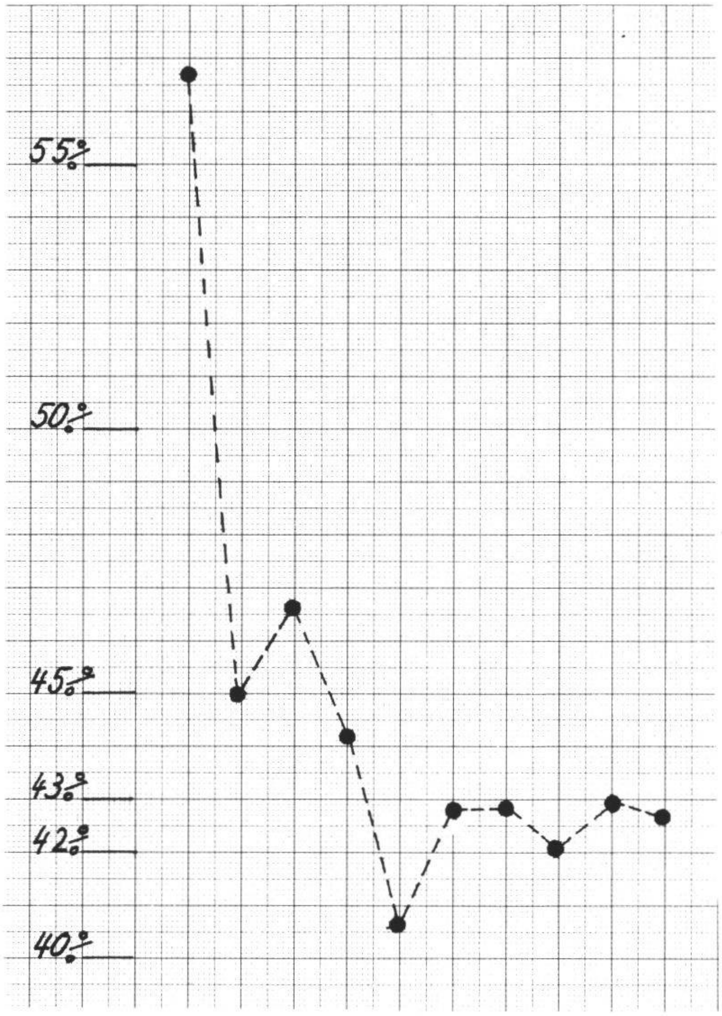



Fig. 11: Das Einpendeln der relativen Häufigkeit des Sechsers mit zunehmender Anzahl der Versuche (linker Punkt = 30, rechter Punkt = 300 Würfe) beim Vindonissa-Würfel V 6.

Betrachten wir aber etwa die Entwicklung der relativen Häufigkeit des Sechsers in 30, 60, 90, ..., 300 Würfen, so erhält man ein Bild, das einem das Phänomen der statistischen Regelmäßigkeit geradezu suggeriert: Die relative Häufigkeit scheint sich auf Werte zwischen 42% und 43% einzupendeln (Fig. 11).

Andererseits darf man aber die *Schwierigkeiten* nicht übersehen, die sich uns stellen, wenn wir diese uns heute «selbstverständliche» statistische Regelmäßigkeit experimentell erfassen oder gar demonstrieren wollen – Schwierigkeiten, die jeder kennt, der je solche Experimente vorführen wollte! Man braucht *umfangreiche* Serien, und eine gewisse Unsicherheit bleibt. Dazu ein Beispiel: Wenn wir einen guten Würfel 600-mal werfen, so werden wir «ungefähr» 100 Sechser erwarten. Doch, was heißt hier *«ungefähr»?* Damit können wir z. B. die Tatsache ausdrücken, daß die Anzahl der Sechser mit einer *Wahrscheinlichkeit von 95% zwischen 82 und 118* liegt. Machen wir uns in diesem Zusammenhang nicht doch gelegentlich Illusionen?

Und man findet *nichts* über gleichmögliche, also *gleichwahrscheinliche Fälle* und damit auch nichts über eine Beurteilung von Chancen durch Auszählen der günstigen Fälle. Natürlich laden die beim Spiel verwendeten Knöchelchen und oft recht unsymmetrischen Würfel nicht dazu ein, den Begriff der gleichwahrscheinlichen Fälle zu entwickeln. Doch ist eine Zeit, deren Bauwerke und Skulpturen uns ob ihrer Harmonie und Vollkommenheit auch heute noch beglücken können, wohl in der Lage gewesen, auch möglichst ideale Würfel herzustellen. Den Begriff des regulären Körpers hatten die Griechen übrigens schon einige Jahrhunderte vor Christus.

Verschiedene Autoren haben *Gründe für diese Situation* gesucht, so F. N. DAVID (1962), I. HACKING (1974), K.-G. HAGSTROEM (1932), M. G. KENDALL (1956), L. E. MAISTROV (1974), S. SAMBURSKY (1956, 1965), O. B. SHEYNIN (1974). Wir führen einige dieser Gründe an; keiner vermag wohl für sich allein zu überzeugen.

(1) Astragali, Würfel und Lose sind im Altertum nicht nur in Glückspielen verwendet worden. Nein, sie waren *auch Mittel zur Divination,* zur Erforschung des göttlichen Willens, allenfalls zur Erforschung der Zukunft, in den Händen der Tempelpriester in Griechenland und in Rom. Was hätte man da nach statistischer Regelmäßigkeit suchen wollen? Astragali sind übrigens auch bearbeitet und als Idole verwendet worden; man hat sie vermutlich als Amulette getragen (V. NIKOLOV, 1986). Man hat auch in Gold gearbeitete Nachbildungen von Astragalen gefunden (vgl. z. B. G. BIEGEL, Hrsg., 1986). Übersehen wir nicht, daß auch das *Alte Testament* von der Verwendung von Losen zur Divination berichtet. Im Buch der Sprichwörter (Spr 16, 33) ist zu lesen: «Im Bausche des Gewandes schüttelt man das Los, doch jede Entscheidung kommt allein vom Herrn.» Und bei Jos 18, 10 steht: «Und Josua warf in Schilo vor den Augen des Herrn das Los für die Israeliten. So verteilte Josua das Land an sie ...». Andererseits war es den Israeliten wiederum streng verboten, Losorakel so zu befragen, wie es die nichtjüdischen Völker ihrer Umgebung praktizierten: «Es soll bei Dir keinen geben, ..., der Losorakel befragt» (Dtn 18, 10). Man findet sogar im *Neuen Testament* eine Stelle, wo das Ziehen von Losen zur Erforschung des Willens des Allerhöchsten eingesetzt worden ist. Es handelt sich um die Stelle, die die Bestimmung von Matthias zum Apostel beschreibt, wobei neben ihm noch ein zweiter Kandidat vorhanden war (Apg 1, 24–26): «Dann beteten sie... Dann gaben sie ihnen Lose und das Los fiel auf Matthias.»

(2) *Systematisches Experimentieren* und damit wohl auch die systematische Durchführung von Zufallsexperimenten etwa zur Ergründung des Phänomens der statistischen Regelmäßigkeit *lag den Griechen noch weitgehend fern,* in vielen Fällen auch die Verbindung von empirischen Fakten mit ihren theoretischen mathematischen Begriffsbildungen. Liegt es daran? Doch, wieso lag ihnen systematisches Experimentieren fern? «Dieses Unvermögen, die Gesetze der großen Zahl in dem anscheinenden Chaos zufälliger Ereignis-Serien des Würfelspiels zu entdecken, erklärt sich daraus, daß den Griechen die Idee einer wie auch immer gearteten *Regelmäßigkeit* in einer *von Menschen* erzeugten Sequenz *absurd* vorkam», schreibt S. SAMBURSKY (1965). Er führt das Nichterkennen statistischer Regelmäßigkeiten und das Fehlen des systematischen Experimentes bei den Griechen auf dieselbe weltanschauliche Wurzel zurück, auf ihre Vorstellung über die «essentielle Verschiedenheit von Himmel und Erde», also «weil die Mentalität der Griechen die *präzise Wiederholung auf den Himmel beschränkt* sah und in den irdischen Fluktuationen keine Gesetzmäßigkeit erkennen

konnte.» Am Himmel hingegen haben sie in der Tat die Vollkommenheit und Regelmäßigkeit der Bewegungen der Gestirne erfaßt; hier stellten sie Prognosen (Finsternisse!) – im Bereich der Glückspiele machten sie keine.

(3) Kombinatorische Überlegungen lagen zwar nicht völlig außerhalb der griechischen Mathematik, doch eine eigentliche *Kombinatorik* hat den Griechen *gefehlt.* Deshalb verfügten sie auch nicht über das Instrumentarium, um gleichmögliche Fälle in komplizierteren Situationen – etwa beim Spiel mit drei Würfeln – herauszuarbeiten, selbst dann, wenn sie mit mehr oder weniger idealen Würfeln gespielt hätten.

(4) Oder war es einfach der *Aberglaube,* der den Spielern oft eigen war – und manchmal immer noch ist (man denke etwa an die Bevorzugung von ausgesprochenen «Glückszahlen» durch die Teilnehmer am Zahlenlotto!) – der die Spieler davon abgehalten hat, Beobachtungen systematisch zusammenzutragen und sie zu bearbeiten?

(5) Der russische Mathematiker L. E. Maistrov (1974) vertritt die These, daß eben die *wirtschaftlichen Bedürfnisse* gefehlt hätten, die den Anlaß zur Entwicklung einer Wahrscheinlichkeitsrechnung hätten bieten können. Tatsächlich, im 17. Jahrhundert lagen solche Bedürfnisse vor: «Die Planungs- und Sicherungsbestrebungen im Handel waren es also, die zu Ansätzen einer zahlenmäßigen Bewertung des Ausgangs künftiger Ereignisse führten» (I. Schneider, 1979).

(6) Schliesslich sollte man auf der Suche nach Gründen für die vorliegende Situation auch auf einschlägige Äußerungen der *Philosophen* jener Zeit eingehen können. Wir müssen uns hier mit einigen Andeutungen begnügen. Aristoteles schreibt in der Metaphysik (11, 8, 1065 a, hier zit. nach der Ausgabe von H. Seidl, 1980): «Die Ursachen aber, durch welche das Zufällige geschehen kann, sind unbestimmt; daher ist er (der Zufall) *für menschliche Überlegung unerkennbar...*». So ist es dem Menschen also unmöglich, das zufällige Geschehen rechnerisch zu erfassen. Und es ist weiter bekannt, daß auch der Begriff des Wahrscheinlichen, der sich zum Beispiel noch bei Aristoteles findet, nicht zu einer Graduierung, zu einer Unterscheidung verschiedener Grade und gar einer numerischen Charakterisierung dieser Grade führen konnte: Als εἰκός – das griechische Äquivalent für wahrscheinlich, für *probabilis* – wird eine Aussage betrachtet, der im allgemeinen zugestimmt wird, die aber in keiner Art bewiesen ist (S. Sambursky, 1956).

In einem gewissen Gegensatz dazu haben dann die *Stoiker* das Mögliche als logische Folge der menschlichen Unkenntnis der Zukunft aufgefaßt und potentielle Geschehnisse, von denen nur eines verwirklicht werden könnte, nebeneinander betrachtet. Jetzt würde man doch meinen, wäre der Weg für die ersten Schritte in die Wahrscheinlichkeitsrechnung frei gewesen: Man hätte – so empfinden wir heutige Menschen – «nur» noch eine zahlenmäßige Bewertung der Verwirklichungsmöglichkeiten benötigt. Sie sind nicht getan worden, diese ersten Schritte. Und auch die *Skeptiker* der mittleren Akademie haben diese ersten Schritte noch nicht getan, obwohl sie bereits *Gradunterschiede* der Wahrscheinlichkeit gekannt haben. Als Ergebnis ihrer Kritik und ihrer Skepsis empfehlen sie, in gewissen Situationen Zurückhaltung zu üben: «Man hat eben noch nicht die Wahrheit, sondern erst die Wahrscheinlichkeit, und hier gibt es auch noch Gradunterschiede: Wahrscheinlichkeiten, die nur glaubhaft, andere die glaubhaft und unwidersprochen und schließlich solche, die glaubhaft und unwidersprochen und allseitig geprüft sind», so stellt J. HIRSCHBERGER (1949) ihre Auffassung dar.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat sich also im Altertum nicht entfaltet und *nicht einmal die ersten Schritte* getan. Und doch finden wir in der Literatur der Antike gelegentlich Stellen, die erstaunlich modern klingen, die geradezu einer zeitgenössischen Darstellung der Wahrscheinlichkeitsrechnung entstammen könnten, wenn sie nicht bloß als einzelne, nur qualitative Äußerungen auftreten würden, auf denen nicht weitergebaut wird. So findet man zum Beispiel bei M.T. Cicero (De divinatione 1, 23): «Vier geworfene Astragali mögen durch Zufall einen Venuswurf bewirken. Glaubst du etwa, daß auch hundert Venuswürfe durch Zufall entstehen, wenn du vierhundert Astragali wirfst?» Eine solche Formulierung könnte doch durchaus in einer Darstellung des Testens von Hypothesen auftreten, zur Illustration einer Situation, in welcher die Nullhypothese zu verwerfen wäre!

Schließlich sei doch noch erwähnt, daß wir bei antiken Schriftstellern immerhin *Ratschläge* für unser ganz *«praktisches» Verhalten* beim Würfelspiel finden können, wenn sie uns schon keine Theorie liefern. Da rät Ovid in der *Ars amatoria* (II, 203–204) dem Liebhaber, auf alle Fälle die Geliebte gewinnen zu lassen:

«Schwingt im Spiel mit der Hand sie die elfenbeinernen Würfel,
wirf so schlecht, wie du kannst; willig bezahle den Wurf.»

«Seu ludet numerosque manu iactabit eburnos
tu male iactato. Tu male iacta dato.»

Den Damen aber empfiehlt Ovid *(Ars amatoria* II, 367–370):

«... Es ist schlimm, wenn ein Mädchen
nicht zu spielen versteht; spielend erobert sie oft.
Aber das wenigste ist, sich klug zu bedienen der Würfel;
schwieriger ist's, sich beim Spiel gut zu betragen verstehn.»

«... turpe est nescire puellam
ludere; ludendo saepe paretur amor.
Sed minimum labor est sapienter iactibus uti;
maius opes mores composuisse suos.»

Horaz aber zeigt uns gar, wie wir auch noch im hohen Alter würfeln können. Er erzählt (Satiren II, 7,15–17) von einem gewissen Volanerius; dieser beauftragte

«... als gerecht ihm die Gicht die Gelenke
hatte zermürbt seiner Hand um Tageslohn einen Helfer,
der ihm statt seiner aufhob die Würfel und warf in den Trichter.»

«... postquam illi iusta charagra
contudit articulos, qui pro se tolleret atque
mitteret in phimum talos...»

Die hübschen Übersetzungen dieser Zitate gehen auf verschiedene Bearbeiter zurück; sie sind der Schrift von A. Rieche (1984) entnommen.

## 4. Wenn auseinandergehn die Würfelspieler...

Zu Beginn des Canto sesto des Purgatorio zeichnet Dante (1265–1321) in seiner *Divina Commedia* in lebhafter Manier eine damals wohl alltägliche Szene:

«Quando si parte il gioco della zara,
colui che perde si riman dolente,
ripetendo le volte, e tristo impara;
con l'altro se ne va tutta la gente...»

In der deutschen Übertragung von Ida und Walther von Wartburg (Zürich 1963):

«Wenn auseinandergehn die Würfelspieler,
bleibt, der verliert, schmerzvoll allein zurück;
und wiederholt die Würfe, lernt verdrießlich.
Doch mit dem andern ziehet alles Volk...»

Entnehmen wir dem phantasievoll gestalteten Bild von Dante zunächst einmal die Tatsache, daß offenbar in jenen Jahren gewürfelt worden ist – sehr eifrig wohl, wie die zahlreichen und offenbar nutzlosen Verbote aus jener Zeit dartun. Der Hauptgrund aber, weshalb der Anfang des sechsten Gesanges aus dem Purgatorio hier erwähnt werden muß, ist der folgende: Bereits die frühen Kommentatoren Dantes beschreiben in der Regel nicht nur detailliert den «gioco della zara», sondern sie versuchen sich auch bereits in *ganz elementarer Wahrscheinlichkeitsrechnung.*

G. Libri (1838) hat wohl als erster auf einen solchen Kommentar hingewiesen und daraus auch die entscheidenden Stellen zitiert. Da er den Autor nicht mit Bestimmtheit nennen kann und ferner erwähnt, dieser Kommentar sei 1477 in Venedig publiziert worden, wird in späteren Darstellungen der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Regel einfach von einem Kommentar aus dem Jahre 1477 gesprochen [2]. Dies ist irreführend: Vergleicht man nämlich das ausführliche Zitat von Libri

[2] So von I. Todhunter (1865), M. Cantor (1899), M. G. Kendall (1956), F. N. David (1962) und L. E. Maistrov (1974). – L. E. Maistrov (1974) und K.-G. Hagstroem (1932) nennen dabei Benevenutus de Ramboldis de Imola als Verfasser des 1477 publizierten Kommentars. Dies ist falsch: Benevenutus weist in seinem Kommentar (der 1887 in Florenz erstmals publiziert worden ist) ausdrücklich jede Interpretation des zara-Spiels zurück, denn *«nulla pestis est perniciosor»* als eben

mit dem Kommentar von JACOPO DI GIOVANNI DELLA LANA (1865), so zeigt sich, daß LIBRIS Zitat aus dem Kommentar von DELLA LANA stammen muß. Dieser Kommentar ist aber zwischen 1324 und 1328 entstanden. Deshalb scheinen uns diese Feststellungen bemerkenswert, zeigen sie doch, daß die darin mitgeteilten Überlegungen gute 150 Jahre vor 1477 entstanden sind!

Das *zara-Spiel* – offenbar das bevorzugte Würfelspiel im mittelalterlichen Italien – wurde mit *drei* Würfeln gespielt und bestand darin, die *Summe* der Punkte, die die drei Würfel zeigen werden, vorauszusagen. dabei sind die Summen 3 und 4 und ebenso 17 und 18 in der Regel nicht beachtet worden, weil sie selten auftreten. Andere, spätere Kommentatoren berichten übrigens, daß die Summen von 7 an abwärts und von 14 an aufwärts aus demselben Grunde nicht berücksichtigt worden sind; diese Unterschiede tun hier nichts zur Sache. Das Wort «zara» stammt aus dem Arabischen: arabisch «zehar» bedeutet Würfel.

Es ist nun interessant, daß im Kommentar von DELLA LANA klar gesagt wird (vgl. DELLA LANA, 1865),

- daß die Summen, die zwischen 4 und 17 liegen, auf mehr Arten realisiert werden können als 3, 4, 17, 18;
- daß jene Summe, die auf die meisten Arten realisiert werden kann, als beste Summe *(miglior volta)* bezeichnet wird;
- daß oftmals auch gerade jene Summe kommen kann, die eigentlich weniger oft kommen sollte: *«ma molto fiate viene piuttosto quella che in meno volte può venire».*

Weiter stellt DELLA LANA in seinem Kommentar, der übrigens der erste vollständige Kommentar zur Divina Commedia ist, fest, daß 3 (und ebenso 18) nur auf eine Art realisiert werden kann: *«non può venire se non in uno modo, cioè quando ciascuno dado viene in asso»;* also $3 = 1 + 1 + 1$. Er fährt dann allerdings weiter, daß dasselbe auch für 4 (und ebenso 17) gelte: *«quattro non può venire in tre dadi se non in uno modo, cioè per l'uno dado in due, e due dadi in asso»*: also $4 = 2 + 1 + 1$. Wir würden hier ziemlich sicher noch die Permutationsmöglichkeiten berücksichtigen und «selbstverständlich» (?) sagen, daß 4 und ebenso 17 auf je drei Arten realisiert werden können. Liegt hier einfach ein Versehen vor oder zeigt diese Überlegung von DELLA LANA ein noch ungenügend entwickeltes Verständnis für gleichmögliche, also für gleichwahrscheinliche Fälle?

Dazu sind einige Bemerkungen notwendig. Es ist zunächst festzustellen, daß es oft gar nicht so selbstverständlich ist, welche Fälle als gleichwahrscheinlich zu betrachten sind. Auf solche Schwierigkeiten hat der Mathematiker und Philosoph HENRI POINCARÉ vor bald einem Jahrhundert schon in seinem Werk *«Sciences et Hypothèses»* hingewiesen (zit. nach einer späteren Auflage von 1935): *«Comment saurons nous que deux cas possibles sont également probables? Sera-ce par convention? ... mais*

---

dieses Spiel! Das Mißverständnis ist indessen erklärlich: Nach der Enciclopedia Dantesca (III, Roma 1971) ist der Kommentar von della Lana tatsächlich erstmals 1477 in Venedig publiziert und dabei Benevenutus zugeschrieben worden. – Ich verdanke an dieser Stelle die intensive Hilfe von M. T. Bise-Casella bei der Beschaffung und der Durchsicht der erwähnten und weiterer Dante-Kommentare.

*dès que nous en voudrons faire la moindre application, il faudra démontrer que notre convention était légitime, et nous nous retrouverons en face de la difficulté que nous avions cru éluder.»*

Weiter ist darauf hinzuweisen, daß oft erst die Erfahrung zeigt, welche Fälle als gleichwahrscheinlich betrachtet werden müssen. Ein auch erkenntnistheoretisch sehr eindrückliches Beispiel für diese Tatsache liefert die *Bose-Einstein-Statistik der Quantentheorie:* Die gleichwahrscheinlichen Fälle, die hier unterschieden werden müssen, sind zunächst einmal durch die empirischen Resultate aus durchgeführten Experimenten gerechtfertigt – und nicht etwa einfach durch den «gesunden Menschenverstand». War es vielleicht so, daß im Kreise der zara-Spieler zu wenig systematisch beobachtet worden ist, um feststellen zu können, daß man die Permutationen hätte berücksichtigen sollen, mit anderen Worten, daß man die drei Würfel hätte als *unterscheidbar* betrachten sollen? Betrachtet man sie nämlich als *nicht unterscheidbar,* dann ist auch 4 nur *«in uno modo»* darstellbar! Die moderne Kombinatorik nennt solche ununterscheidbare Elemente *Bosonen,* natürlich in Anlehnung an die Quantentheorie.

Doch selbst wenn man die Überlegung von DELLA LANA schlicht als *Fehler* charakterisieren will, darf ihm ein postumer Trost nicht versagt bleiben: Rund 400 Jahre später schreibt G. W. Leibniz, dessen mathematische Kompetenz sicher nicht bezweifelt werden kann – und der sich auch eingehend mit verschiedenen kombinatorischen Problemen auseinandergesetzt hat (vgl. z. B. K.-R. BIERMANN, 1954, 1956) –, in einem Brief an Bourguet vom 22. März 1714 unter anderm : *«... par exemple avec deux dés, il est aussi faisable de jetter douze points, que d'en jetter onze, car l'un et l'autre ne se peut faire que d'une seule manière ...»* Wir würden doch heute sagen: $12 = 6 + 6$, aber $11 = 5 + 6 = 6 + 5$. Leibniz macht also denselben Fehler wie unser Dante-Kommentator! (Der erwähnte Brief ist abgedruckt in K. KOHLI, 1975.)

Ähnliche Erörterungen, wie sie von DELLA LANA angestellt werden, finden sich auch bei anderen mittelalterlichen Dante-Kommentatoren, so zum Beispiel im «Ottimo Commento», der auf DELLA LANA zurückgreift, oder etwa bei Giovanni da Serravalle in seinem 1416/17 entstandenen Kommentar (vgl. N. SAPEGNO, 1957).

Interessant ist nun, daß wir aus demselben Zeitraum ein dichterisches Werk besitzen, in welchem dieses Problem mit den drei Würfeln ganz nach unserer heutigen Auffassung gelöst wird, und zwar *in aller Ausführlichkeit und mit sämtlichen notwendigen Begründungen.* Es handelt sich um das zwischen 1250 und 1300 erschienene Werk *De Vetula,* «dem zwischen dem 13. und 15. Jahrhundert eine außerordentliche Verbreitung und Wirkung zu teil wurde» (P. KLOPSCH, 1967). Diese Dichtung, welche drei Bücher mit insgesamt 2400 Hexametern umfaßt, stellt eine Lebensbeschreibung Ovids dar, die Ovid selbst in den Mund gelegt wird; man spricht aus diesem Grunde vom *Pseudoovidius De Vetula.* An die wirkliche Autorschaft Ovids hat man kaum je geglaubt; nach P. KLOPSCH (1967) scheint es auch recht unwahrscheiblich, daß Richard de Fournival, dem man das Werk oft zugeschrieben hat, als Autor in Frage kommt. In dieser Lebensbeschreibung wird nun unter anderem die Nutzlosigkeit und Verderblichkeit des Würfelspiels angeprangert und demonstriert (im ersten Buch, Verse 358–576). Es werden dabei kombinatorische Überlegungen gemacht, die man zum mindesten als *Vorstufe* einer eigentlichen Wahrscheinlichkeitsrechnung deuten kann. Wir übertragen einige Stellen aus dem von P. KLOPSCH (1967) herausgegebenen Text[3].

In den Versen 410–415 wird vom Wurf mit drei Würfeln gesagt: «Sie können auf verschiedene Weisen variieren und 16 Summen *(«compositi numeri»)* erzeugen: 3, 4, ..., 17, 18. Aber diese Summen sind nicht vom gleichen Gewicht *(«non tamen eque virtutis»)*. Die großen und die kleinen Summen treten selten auf und die dazwischen häufig. Diese kommen umso häufiger vor, je mehr sie sich der mittleren annähern.»

Anschließend werden aus den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 alle $\binom{8}{3} = 56$ Kombinationen mit Wiederholung – hier *punctaturae* genannt – korrekt gebildet und *begründet*, zum Beispiel (Verse 430–440): «Aber, wenn eine Ziffer verschieden von den andern ist und zwei gleich sind, so ergeben sich 30 *punctaturae:* Wenn du irgendeine der sechs Ziffern verdoppelst und eine beliebige der übrigen hinzufügst, so erzeugst du 30, nämlich sechsmal fünf. Wenn aber alle Ziffern verschieden sind, so zählst du 20 *punctaturae:* 4 Fälle, in denen nur aufeinanderfolgende Ziffern auftreten, ebenso viele, wenn keine aufeinanderfolgenden auftreten. Wenn aber zwei aufeinanderfolgende auftreten und die dritte nicht, so findest du zweimal drei und dann dreimal zwei.»

Schließlich wird ganz klar herausgearbeitet, daß gewisse dieser Auswahlen von drei Ziffern *mehrfach* auftreten können, so etwa (V. 449–452): «Wenn aber alle drei Ziffern verschieden sind, findest du *sechs* Anordnungen *(«scemata»)*: Hast du nämlich einen Platz zugeteilt, so permutieren die andern zwei ihre Plätze...» *(«reliqui duo permutant loca»)*. Und am Ende dieser Betrachtungen folgt eine vollständige Tabelle der auftretenden Summen, also der *punctaturae* (der Kombinationen mit Wiederholungen) und der jedesmal zugehörigen Anzahl Permutationen, der *«cadentiae»*, mit denen diese Summen auftreten:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 18 | punctatura | 1 | cadentia | 1 |
| 4 | 17 | punctatura | 1 | cadentiae | 3 |
| 5 | 16 | punctaturae | 2 | cadentiae | 6 |
| 6 | 15 | punctaturae | 3 | cadentiae | 10 |
| 7 | 14 | punctaturae | 4 | cadentiae | 15 |
| 8 | 13 | punctaturae | 5 | cadentiae | 21 |
| 9 | 12 | punctaturae | 6 | cadentiae | 25 |
| 10 | 11 | punctaturae | 6 | cadentiae | 27 |

Nach Auflistung dieser 216 *«cadendi scemata»* kennt nun der Leser die «Stärken» und die «Schwächen» der einzelnen Summen vollständig (V. 458–459):

«plene cognosces, quante virtutis eorum
quilibet esse potest seu quante debilitatis.»

[3] Es scheint keine Übersetzung des Textes ins Deutsche oder in modernes Französisch vorhanden zu sein. Ich verdanke M. T. Bise-Casella eine extra für diese Arbeit angefertigte Übersetzung der interesssierenden Verse in die italienische Sprache. Mit Hilfe dieser Übersetzung sind die im folgenden zitierten Verse aus dem Lateinischen frei in die deutsche Sprache übertragen worden.

Man darf jetzt nicht übersehen, daß uns hier zum ersten Mal in einem einigermaßen komplizierten Fall eine *vollständige* Liste von lauter *gleichwahrscheinlichen Elementarereignissen* begegnet. Allerdings werden diesen gleichwahrscheinlichen Elementarereignissen noch keine Zahlenwerte explizit zugeordnet, die als Wahrscheinlichkeiten im heutigen Sinne angesprochen werden können. Doch ist uns in den *«cadentiae»* immerhin jeweils die Anzahl der *«günstigen Fälle»* – wie man später sagen wird – gegeben. Daß der Quotient aus den günstigen und den möglichen Fällen noch nicht berechnet worden ist, darf uns nicht stören: Die Chancen können ja auch beurteilt werden, indem man die Anzahl der günstigen Fälle für die eine Vorhersage – etwa beim zara-Spiel – der Anzahl der günstigen Fälle für eine andere Vorhersage gegenüberstellt. Den Quotienten aus der Anzahl der günstigen Fälle und der Anzahl aller gleichwahrscheinlicher (gleichmöglicher) Fälle hat übrigens als erster Girolamo Cardano berechnet. Er hat in seinem 1526 geschriebenen, aber erst 1663 gedruckten *Liber de ludo aleae* das Problem von den drei Würfeln wieder aufgenommen, die Anzahlen der verschiedenen Augensummen richtig berechnet und zur Beurteilung der Chancen auch den eben genannten Quotienten berechnet. Wir kommen unten darauf zurück.

In einer kurzen Abhandlung, deren Entstehungszeit nicht genau festzustehen scheint, in *Sopra le scoperte de i dadi,* beschäftigt sich auch Galileo Galilei (1564–1642) wieder mit diesem Problem; nicht nur völlig korrekt, sondern auch in vollkommener Klarheit. Liest man diese Arbeit, so fällt einem der Satz auf (G. GALILEI, 1936): «... *si vede non di meno che la lunga osservazione ha fatto da i giocatori stimarsi più vantaggioso il 10 e l'11 che 'l 9 e 'l 12.*» Hier scheint doch *statistische Regelmäßigkeit* in einem Spezialfall erkannt worden zu sein.

Hatten einsichtige Spieler den kleinen Unterschied in den Wahrscheinlichkeiten wirklich bemerkt: $54/216 - 50/216 \approx 0{,}02$? Uns scheint dies zweifelhaft. I. HACKING (1974) meint indessen, dies wäre doch möglich und verweist auf belegte, empirisch festgestellte Unterschiede von durchaus vergleichbarer Kleinheit in einem andern, von M. G. Kendall bereits bemerkten Falle. Doch kann man die Situation vielleicht noch etwas anders betrachten, und dann wird die Bemerkung von Galilei doch viel plausibler: Wir vergleichen geeignete *bedingte* Wahrscheinlichkeiten.

Es bezeichne E das Ereignis «10 oder 11» und F das Ereignis «9 oder 12». Und nun beschränken wir uns auf den Vergleich der Wahrscheinlichkeiten von E bzw. F, wenn $(E \cup F)$ eingetreten ist:

$$P(E \,/\, E \cup F) = 27/52, \quad P(F \,/\, E \cup F) = 25/52.$$

Der Unterschied ist $2/52 = 0{,}0385$; ein solcher Unterschied von rund 0,04 also dürfte bei wirklich großen Serien doch eher feststellbar sein.

Mit welchem Wahrscheinlichkeitsbegriff haben die *Philosophen* aus der Zeit der ersten Dante-Kommentare und der Entstehung von De Vetula gearbeitet? Wir müssen uns hier wiederum auf einige wenige Hinweise beschränken. *«Probabilia sunt versimilia»* (zit. nach A. GARDEIL, 1911) schreibt Albertus Magnus (1193–1280): Wahrscheinlich ist also das, was dem Wahren ähnlich ist. Auf diesem Wahrscheinlichkeitsbegriff läßt sich zunächst keine Wahrscheinlichkeitsrechnung im heutigen Sinne aufbauen. Aber darum ging es Albertus Magnus natürlich nicht: «Il a voulu marquer, dans une brève définition, le fondement du droit qu'a le probable à se présenter comme un objet digne d'intéresser l'esprit humain, digne, par conséquent, de posséder ses règles et l'ensemble logique qui permettront de l'atteindre avec toute la rigueur désirable», schreibt A. GARDEIL (1911). Ähnlich ist es bei Thomas von Aquin, wenn er – hier die Aristotelische Logik zusammenfassend – verschiedene Wege beschreibt, auf denen die Vernunft vorwärtsschreiten kann und dabei dem ersten Weg, der die Vernunft notwendigerweise zur Wahrheit führt, einen zweiten Weg an die Seite stellt, wo die *Wahrheit in der Mehrzahl der Fälle* gefunden wird, ohne daß sie notwendigerweise eintritt: *«Circa contingentia et variabilia ... sufficit probabilis certitudo, quae ut in pluribus veritatem attingat, etsi paucoribus a veritate deficiat.»* Hier wird also von der *probabilis certitudo,* der «wahrscheinlichen Gewißheit» gesprochen: «Sie genügt im Bereiche des Kontingenten» – des Nicht-Notwendigen, das geschehen oder nicht geschehen kann – «und trifft in der Mehrzahl der Fälle die Wahrheit, jedoch in wenigen Fällen nicht.» Das *probabile,* das Wahrscheinliche, wird dem *Probatum,* dem Bewiesenen, gegenübergestellt (nach A. GARDEIL, 1911). Und *«probabilis»,* also wahrscheinlich, ist bei ihm synonym zu *«opinabilis»,* zu «meinbar» (cf. L. SCHÜTZ, 1895).

## 5. «Für beide Böcke soll er Lose kennzeichnen» (Lev 16,8)

Gibt es stochastisches Denken in der frühen und in der mittelalterlichen *jüdischen* Literatur? Wir haben bereits darauf hingewiesen, daß bei ARISTOTELES und bei maßgebenden christlichen Denkern des Mittelalters in der Regel keine Abstufung des Wahrscheinlichen zu finden ist. Demgegenüber weist N. L. RABINOVITCH (1973) darauf hin, daß das mittelalterliche Hebräisch bereits zahlreiche Abstufungen zwischen «wahrscheinlich» und «unwahrscheinlich» gekannt hat: *«überaus nahe – nahe – etwas entfernt – sehr entfernt»,* so etwa könnte die Übersetzung einer derartigen Skala lauten. Weiter berichtet er zum Beispiel, daß im *Talmud,* der ja im 5./6. Jahrhundert abgeschlossen worden ist, «Zweifel ohne klare Erkenntnis einer Mehrheit» als «½ zu ½» betrachtet wird; ist dies ein früher Hinweis darauf, den verschiedenen Graden der Wahrscheinlichkeit Werte aus dem Intervall (0; 1) zuzuordnen?

Solche Feststellungen könnten Anzeichen dafür sein, daß sich in der mittelalterlichen und in der früheren jüdischen Literatur vielleicht *Vorstufen* unserer heutigen Wahrscheinlichkeitsrechnung finden lassen. Dies ist in der Tat der Fall. Aus dem reichen Material, das N. L. RABINOVITCH (1969, 1970, 1973) und A. M. HASOFER (1967) publiziert und kommentiert haben, sollen einige Beispiele herausgegriffen werden.

Zunächst ist darauf hinzuweisen, daß die Haltung der Juden gegenüber dem Würfelspiel eine ganz andere war als jene ihrer Nachbarn in der alten Welt: *Glücksspieler wurden als Diebe betrachtet,* da sie Gewinne machten, ohne faire Kompensation zu leisten; im Talmud ist geregelt, daß das Zeugnis von Würfelspielern vor Gericht nicht gilt. Wir haben auch bereits oben kurz erwähnt, daß es den Juden verboten war, Losorakel so zu befragen, wie dies ihre nichtjüdischen Nachbarn taten (Dtn 18,10).

Trotzdem sind *Zufallsmechanismen* in gewissen Situationen ausdrücklich erlaubt gewesen und offensichtlich auch verwendet worden. Darüber orientieren zahlreiche Stellen des Alten Testamentes und des Talmud. So wird etwa im Ritual für den Versöhnungstag festgelegt, daß Aaron zwei Böcke vor dem Herrn aufstellen soll. Dann: «Für beide Böcke soll er *Lose* kennzeichnen, ein Los für den Herrn und ein Los für Asasel» (Lev 16,8). Der für den Wüstendämon Asasel ausgeloste Bock wurde dann in die Wüste gejagt und damit aus Israel verbannt. Dazu präzisiert nun der *Talmud:* «Es war dort eine Urne und in ihr zwei Lose ... Die Lose mußten gleich sein ... es durfte nicht das eine aus Gold und das andere aus Silber, oder das eine groß und das andere klein sein» (Übertragung aus N. L. Rabinovitch, 1973). Weiter ist im Talmud ausdrücklich verlangt, daß die Urne geschüttelt wurde, damit der Hohe Priester nicht absichtlich ein bestimmtes Los ziehen konnte.

Ein interessanter Zufallsmechanismus spielte bei der *Zuteilung der täglichen Aufgaben* an die Priester (A. M. Hasofer, 1967; N. L. Rabinovitch, 1973): Die Priester standen im Kreis um ihren Vorsteher. Der Vorsteher bezeichnete einen, bei dem das Abzählen beginnen sollte. Jeder hatte einen Finger hochzuhalten und der Vorsteher nannte eine Zahl, «eine *viel größere* als die Zahl der anwesenden Priester». Dann begann er im Kreise herum abzuzählen und jener Priester, auf den die genannte Zahl fiel, erhielt die Aufgabe zugewiesen. Das mathematische Modell für dieses Vorgehen könnte so gewählt werden: m sei die Anzahl der im Kreise stehenden Priester; X eine gleichverteilte Zufallsvariable auf $\{1, 2, 3, ..., m\}$. Bezeichnen wir mit i jenen Wert von X, der den Priester charakterisiert, bei dem die Zählung beginnt, so ist $P(X=i) = 1/m$, wenn wir voraussetzen, daß jeder Priester *dieselbe* Chance hat, als Startperson gewählt zu werden. Weiter sei Y eine Zufallsvariable, die auf einer Teilmenge von $\mathbb{N}$ definiert ist; sie muß nicht notwendigerweise gleichverteilt sein. Von ihren Werten wird einer als jene Zahl genommen, mit der die Abzählung durchgeführt wird. Dann ist X+Y, *modulo m genommen,* gleichverteilt auf $\{1, 2, 3, ..., m\}$, wenn X und Y unabhängig sind:

$$P(X+Y\equiv j) = \sum_{k=1}^{m} P(Y\equiv k)\cdot P(X\equiv j-k) = \sum_{k=1}^{m} P(Y\equiv k)\cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{m}\cdot \sum_{k=1}^{m} P(Y\equiv k) = \frac{1}{m} ;$$

jeder Priester hat also die *gleiche Chance,* die Aufgabe zugewiesen zu erhalten – falls die gemachten Voraussetzungen zutreffen.

Dieses Verfahren der Zuteilung wurde täglich viermal vorgenommen. Es scheint die allgemeine Zustimmung der Priesterschaft gefunden zu haben – einer Priesterschaft, die eifersüchtig auf ihre Privilegien bedacht war. Offenbar hat sich also eine ziemlich *faire* Verteilung der Aufgaben auf die einzelnen Priester ergeben: Die Aufgaben sind – auf lange Sicht – einigermaßen *gleichmäßig* verteilt worden. Im 15. Jahrhundert sprach der spanische Rabbi, Philosoph und Prediger Arama Isaac ben Moses (ca. 1420–1494) ausdrücklich davon, daß sich eine solche angenäherte Gleichverteilung nur bei einer großen Zahl von Versuchen erwarten lasse. Könnte dies nicht wiederum ein Hinweis sein auf klar erkannte *statistische Regelmäßigkeit?* Oder gar auf ein wenigstens experimentell und intuitiv erahntes Gesetz der großen Zahl? In diesen Zusammenhang gehört auch die Feststellung, daß bereits ein Jahrhundert früher Isaac bar Sheshet (1326–1408) klar unterscheidet zwischen wirklich beobachteten relativen Häufigkeiten (z. B. Anteil der Knabengeburten) und «Wahrscheinlichkeiten» – wie wir heute sagen würden –, die einfach zugeordnet werden, weil wir nichts Genaueres wissen und so zum Beispiel einem zweifelhaft erscheinenden Sachverhalt den Wert ½ zuordnen (N. L. RABINOVITCH, 1970).

Bei Maimonides (1135–1204) finden wir in den *«Gesetzen über die Erstlingsfrüchte»* ein Beispiel, das nicht nur eine korrekte Auflistung der *gleichwahrscheinlichen Fälle* in einem nicht ganz so einfachen Zusammenhang voraussetzt, sondern auch zeigt, wie man auf Grund errechneter Wahrscheinlichkeiten Schlüsse ziehen kann. Das Beispiel bezieht sich auf Num 18,15: «Du mußt aber den Erstgeborenen bei den Menschen auslösen ...». Maimonides schreibt (nach N. L. RABINOVITCH, 1970): «Wenn zwei Frauen verschiedener Männer, die eine Erstgebärende, die andere nicht, einen Knaben und ein Mädchen gebären, und man weiß nun nicht, welche die Mutter des Knaben ist, so hat der Mann der Erstgebärenden keine Abgabe zu bezahlen. Werden aber von den beiden Müttern zwei Knaben und ein Mädchen geboren, und man weiß nun nicht, welche Mutter einen (oder beide) Knaben geboren hat, so muß der Mann der Erstgebärenden die Abgabe von fünf Silberlingen bezahlen, denn er wäre abgabefrei nur in zwei Fällen, während er zur Abgabe verpflichtet wäre, wenn seine Frau einen oder zwei Knaben oder einen Knaben und ein Mädchen – und das Mädchen nicht zuerst – geboren hätte. Weil sich seine *Chance verkleinert,* muß er zahlen.»

Tatsächlich: In der zuerst geschilderten Situation verhalten sich für den Mann der Erstgebärenden die Chancen, zahlen zu müssen oder abgabefrei zu sein, wie 1:1, nachdem man nicht mehr weiß, welche der Mütter den Knaben geboren hat. Die zweite Situation ist komplizierter. Bezeichnen wir mit $K_1$ die Geburt des einen Knaben, mit $K_2$ die Geburt des andern und mit M jene des Mädchens, und deuten wir durch einen Strichpunkt die Verteilung der Geburten auf die beiden Frauen an, so gilt:
Abgabefrei ist der Mann der Erstgebärenden in den zwei Fällen $M; K_1K_2$ (bzw. $M; K_2K_1$) und $MK_1; K_2$ (bzw. $MK_2; K_1$); zu zahlen verpflichtet ist er hingegen in den vier Fällen $K_1; K_2M$ (bzw. $K_1; MK_2$), $K_2; K_1M$ (bzw. $K_2; MK_1$), $K_1K_2; M$ (bzw. $K_2K_1; M$) und $K_1M; K_2$ (bzw. $K_2M; K_1$). Damit sind offensichtlich alle $2 \cdot 3! = 12$ Fälle aufgelistet, und die Anzahl der Fälle, in denen der Mann der Erstgebärenden abgabefrei ist, verhält sich zur Zahl der Fälle, in denen er zu zahlen hat, wie 4:8, also wie 2:4.

Mit einigen guten Gründen kann man bei den alten Juden zwei Arten der Verwendung von Losen und andern Zufallsmechanismen unterscheiden: Einerseits sind sie eingesetzt worden, um *Rechte oder Pflichten* in fairer Art zuzuteilen, auf eine Art, über die man sich vorher geeinigt hatte. Das gegenseitige Einverständnis genügte, um das Ergebnis zu akzeptieren. Andererseits wurde in gewissen Fällen der Losentscheid ausdrücklich als *Äußerung des Willens des Allerhöchsten* betrachtet; allerdings nur dann, wenn das Los auf spezielle Anordnung und nach einem bestimmten, ausdrücklich vorgeschriebenen Verfahren gezogen worden ist. Über dieses Heranziehen der Lose zur Divination haben wir auch schon im dritten Abschnitt einige Ausführungen gemacht.

N. L. Rabinovitch (1973) geht in seinen Untersuchungen wesentlich weiter. Er stellt eine sehr große Zahl von Talmud-Stellen zusammen, die seines Erachtens nur auf der Grundlage von Überlegungen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung vernünftig begründet werden können. Bei vielen Vorschriften glaubt er, eine implizite Anwendung des *Additions-* und des *Multiplikationssatzes* erkennen zu können, ja in einem Falle – doch wird ihm hier nicht jeder Leser folgen – eine Anwendung der Regel von Bayes.

Diese interessante Seitenlinie der Entwicklung kann hier nicht näher verfolgt werden. Es sei indessen aber noch angemerkt, daß in der mittelalterlichen jüdischen Literatur auch beachtenswerte Resultate der *Kombinatorik* vorweggenommen sind: Zum Beispiel gibt R. Shabbatai Donnolo (930–970) eine vollständige Begründung dafür, daß n Buchstaben auf n! Arten angeordnet werden können, und der 1167 verstorbene R. Abraham Ibn Ezra kannte bereits die Formel für die Anzahl der Kombinationen, sowie die Relation $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ (N. L. Rabinovitch, 1970). Noch andere derartige Seitenlinien der Entwicklung wären zu verfolgen: P. C. Mahalanobis (1957) zeigt eine solche für das frühe und das mittelalterliche Indien auf. Für die Kombinatorik wäre sicher auch das mittelalterliche China einzubeziehen; auch die mathematischen Leistungen der Araber müßten vielleicht einmal unter diesen Gesichtspunkten untersucht werden.

## 6. Der Liber de Ludo aleae – das erste Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Das erste eigentliche Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung stammt von Girolamo Cardano (1501–1576), einem äußerst vielseitigen Renaissance-Gelehrten. Sein sehr bewegtes Leben beschreibt er in seiner Autobiographie *De propria vita;* neben seiner Haupttätigkeit als Arzt fand er immer wieder Zeit zu Untersuchungen und Veröffentlichungen aus den verschiedensten Gebieten: Medizin, Mathematik, Physik, Astronomie, Astrologie, Musik und Theologie. Seinen *Liber de Ludo aleae* schrieb er 1526; er ist indessen erst 1663 im Rahmen einer Gesamtausgabe seiner Werke in Lyon gedruckt worden (G. Cardano, 1663). Dieses lateinisch geschriebene Buch ist nicht leicht zu lesen; es ist jedoch von Oystein Ore sorgfältig analysiert und kommentiert worden und zusammen mit einer von S. H. Gould erarbeiteten Übersetzung des gesamten Textes herausgegeben worden (O. Ore, 1953). Für eine kurze Beschreibung von Leben und mathematischem Werk sei auf H. Loeffel (1976) verwiesen; eine ausführliche Darstellung seines Lebens und seines Werkes als Universalgelehrter gibt M. Fierz (1975).

Nach seinem eigenen Geständnis muß Cardano ein ganz leidenschaftlicher Spieler gewesen sein. Sein inhaltsreiches Buch enthält denn neben den theoretischen Ausführungen auch recht praktische Bemerkungen für den Spieler, und selbst moralische und philosophische Betrachtungen über Zufall, Glück und Unglück im Spiel fehlen nicht.

Wir heben einige Einzelheiten aus dem *Liber de Ludo aleae* heraus, die im Zusammenhang mit unseren Überlegungen wichtig sind: Wie bereits bemerkt, berechnet

Cardano die Anzahl der gleichmöglichen Würfe mit einem, zwei und mit drei Würfeln richtig. Er geht aber weiter: Im 9. Kapitel nennt er ausdrücklich den Begriff des *«guten Würfels» («alea iusta»)* und idealisiert damit gleichmögliche Fälle. Und er zählt nicht nur die günstigen Fälle, sondern er dividiert auch durch die Anzahl der möglichen Fälle. So führt er also den *klassischen,* den sogenannten Laplace'schen Wahrscheinlichkeitsbegriff (P. S. LAPLACE, 1812 [!]) ein. Beispielsweise schreibt er bei der Behandlung des Ausspielens von zwei Würfeln über das Auftreten der Summe 10: *«Decem autem ex bis quinque, et sex, et quatuor, hoc autem variatur dupliciter, erit igitur duodecima pars circuitus...»* Dies kann man etwa so übertragen: «Die Summe besteht aus (5,5) und (6,4), aber letzteres kann auf zwei Arten entstehen, so daß die Gesamtzahl der Wege, die zehn ergeben, $1/12$ der gesamten Möglichkeiten (des *«circuitus»*) ist.» Mit diesem Bruch $1/12$ hat er nun eine Wahrscheinlichkeit nach dem klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff berechnet: $3/36 = 1/12$. Ganz analog rechnet er in den andern Fällen. Da sich die Betrachtung auf Würfelprobleme bezieht, ist ein ausdrücklicher Hinweis auf die Gleichmöglichkeit der betrachteten Fälle nicht nötig.

Zu diesem klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff noch einige Bemerkungen: Christian Huygens (1629–1695) arbeitet in seiner eingangs erwähnten Schrift *De ratiociniis in aleae ludo* nicht mit diesem Quotienten direkt, sondern mit dem Erwartungswert, mit *«sors sive aestimatio expectationis».*

In einer Studie von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) mit dem vielsagenden Titel *De incerti aestimatione* (1678), die bis 1957 nur handschriftlich vorhanden war und erst von K. R. BIERMANN und M. FAAK (1957) herausgegeben worden ist, wird ebenfalls mit dem Erwartungswert (mit *«spes»,* also mit der «Hoffnung») gearbeitet. Aber zur Berechnung dieser Hoffnung wird ausdrücklich die Zahl der *günstigen* Fälle – *«numerus eventuum qui favere possunt»* – zur Zahl der möglichen Fälle – *«numerus omnium eventuum»* – ins Verhältnis gesetzt. Nach K. R. BIERMANN (1965) ist Leibniz auch der erste, der die Bezeichnung *«probabilitas»* in diesem Kontext eingeführt hat [4]: *«Probabilitas est gradus possibilitatis»* – «Die Wahrscheinlichkeit ist ein Grad der Möglichkeit», so schreibt er in der erwähnten Studie; im Anschluß daran werden «Hoffnung» (spes) und «Furcht» (metus) definiert: *«Spes est probabilitas habendi. Metus est probabilitas amittendi.»* Heute würde man in beiden Fällen einfach mit dem Ausdruck «Erwartungswert» arbeiten.

JAKOB BERNOULLI endlich umschreibt in seiner *Ars conjectandi* die Wahrscheinlichkeit zwar als Grad der Gewißheit, die sich von ihr unterscheidet, wie der Teil vom Ganzen: *«Probabilitas est enim gradus certitudinis et ab hac differt ut pars a toto.»* Er nennt die günstigen Fälle *«casus fertiles»* und berechnet an verschiedenen Stellen seines Werkes ausdrücklich den Quotienten aus der Anzahl der günstigen Fälle und

[4] Nach K. R. BIERMANN (1965) dürfte der Ausdruck *«Wahrscheinlichkeitsrechnung»* erst nach 1750 in die deutsche Sprache Eingang gefunden haben, vermutlich durch Übersetzung aus dem Französischen. Der früheste Beleg, der im Deutschen Wörterbuch der Gebrüder Grimm (Bd. 13, S. 1002) dem Bereich der mathematischen Wahrscheinlichkeit entnommen wird, ist *«Wahrscheinlichkeitslehre»* aus einem Brief an Johann Gottfried Herder vom Jahre 1787.

der Gesamtzahl der Fälle. Den Quotienten selbst bezeichnet er aber in der Regel wieder als *«expectatio»:* Es ist jener Erwartungswert, den schon Huygens verwendet; doch wird für den Wert der Zufallsvariablen – wie wir heute sagen würden – die Zahl 1 eingesetzt: «... Er stellte sich also ein Spiel vor, in dem man p Möglichkeiten hat, um a zu gewinnen und q Möglichkeiten, nichts zu gewinnen. Der Erwartungswert des Gewinnes ist dann natürlich $pa/(p+q)$; $p/(p+q)$ ist die Wahrscheinlichkeit im klassischen Sinne. Diesen Wahrscheinlichkeitsbegriff legt Jakob seinen Untersuchungen über Glückspiele zugrunde.» (B. L. VAN DER WAERDEN, 1975). – Im Zusammenhang mit diesen Ausführungen über Leibniz und Jakob Bernoulli ist die folgende Feststellung von K. KOHLI (1975) bemerkenswert: «Leibniz und Jakob Bernoulli haben sich in ihrem Briefwechsel auch über die Wahrscheinlichkeitstheorie unterhalten. Den Anstoß dazu gab Leibniz im April 1703, zu einer Zeit, als Jakobs *Ars conjectandi,* soweit sie uns überliefert wurde, wohl schon fertig war ...»

Nun zurück zu Cardano: Der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff führt fast von selbst zum Additionssatz für Wahrscheinlichkeiten. Cardano hat aber auch bereits den *Multiplikationssatz* gekannt und diesen im 15. Kapitel seines Buches begründet. In diesem Zusammenhang hat er auch eine *«Potenzregel»* für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit $p_n$ bei n unabhängigen Wiederholungen desselben Experimentes richtig erkannt: Ist p die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des betrachteten Ereignisses im einzelnen Experiment, so ist $p_n = p^n$. O. ORE (1953) hält den Schritt zu dieser Erkenntnis für so bedeutsam, daß er für das Resultat den Namen «Cardanische Formel» vorschlägt.

Interessanterweise findet man bei Cardano auch einige wenige Stellen, die uns die Vermutung nahelegen können, er habe das Phänomen der statistischen Regelmäßigkeit erkannt oder gar eine erste, allerdings noch ganz intuitive Vorstellung vom «Gesetz der Großen Zahl» gehabt. Von einer irgendwie exakten Formulierung dieser Sachverhalte oder gar einem Beweis des Gesetzes der Großen Zahl bei Cardano kann allerdings keine Rede sein. Dies alles findet man erst viel später bei Jakob Bernoulli, der auch bereits um die große Bedeutung dieses Gesetzes weiß. Aber man findet doch bei Cardano im 11. Kapitel die Sätze: *«Haec igitur cognitio est secundum coniecturam et proximiorem, et non est ratio recta in his. Attamen contingit quod in multis circuitibus res succedit proxima coniecturae.»* Eine deutsche Übersetzung mit Hilfe von O. ORE (1953), bzw. S. H. Gould, könnte ungefähr so lauten: «Zugegebenermaßen beruht diese Kenntnis auf einer Vermutung, die nur eine Näherung bringt, und die Überlegung ist in den Einzelheiten nicht exakt. Dennoch trifft es im Falle von vielen Durchläufen zu, daß die Sache sehr nahe bei der Vermutung liegt.» Die *coniectura,* die Vermutung also, betrifft hier das Eintreffen eines Ereignisses in einer großen Serie. Und im 15. Kapitel findet man nochmals eine Stelle, die eigentlich noch deutlicher auf diesen Sachverhalt hinweist: *«... in infinto tamen numero iactuum id contingere proxime necesse est, magnitudo enim circuitus est temporis longitudo, quae omnes formas ostendit.»* Also, wiederum auf O. ORE (1953) bzw. S. H. Gould basierend: «Doch in einer *unendlichen Zahl* von Würfen ist es *fast notwendig,* daß es sich ereignet, denn die Größe der Serie ist die Länge der Zeit, die alle Resultate zeigt.»

Auf Grund solcher Formulierungen kommen O. ORE (1953), L. E. MAISTROV (1974) und andere zum Schluß, daß Cardano Einsicht in die Erscheinung der statistischen

Regelmäßigkeit gehabt hat und bereits *«a fairly good idea of the rule which is now called the law of large numbers»* – so O. ORE – ausweist. B. L. VAN DER WAERDEN ist von der Argumentation von O. ORE nicht überzeugt; in seiner historischen Einleitung zu Jakob Bernouillis wahrscheinlichkeitstheoretischen Werken legt er seine Gründe dar (B. L. VAN DER WAERDEN, 1975).

Im übrigen ist zu sagen, daß Cardanos Buch lange Zeit ein unbekanntes Manuskript geblieben ist: Es wurde erst beim Tode von Cardano, 1576, aufgefunden und ist, wie bereits erwähnt, erst 1663 gedruckt worden, zu einer Zeit also, da Pascal, Fermat und Huygens bereits die ersten gewichtigen und sicheren Schritte in die eigentliche Wahrscheinlichkeitsrechnung getan hatten. So dürfte sein Buch kaum einen großen Einfluß auf die spätere Entwicklung gehabt haben. Es vermittelt aber doch den Stand der stochastischen Kenntnisse von Cardano in den Jahren um 1520.

## 7. Eine außergewöhnliche Aufgabe und ihre außergewöhnliche Wirkung

Im Jahre 1494 publizierte der Franziskaner Fra Luca Pacioli in Venedig seine *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita;* ein Buch, das sehr rasch zu einem der bekanntesten Lehrbücher der Algebra und der kaufmännischen Arithmetik seiner Zeit geworden ist. Der zehnte Traktat dieser Summa trägt den Titel *«De straordinariis»,* von den «außergwöhnlichen Aufgaben». Hier erscheint nun unter zahlreichen Textgleichungen, die meistens auf Gleichungen ersten oder zweiten Grades, oft auch Proportionen führen, eine Aufgabe, die für die Wahrscheinlichkeitsrechnung von großer Bedeutung geworden ist:

A und B spielen ein Spiel, das aus mehreren Partien besteht. Bei jeder Partie gewinnt entweder A oder B einen Punkt; Sieger ist, wer zuerst 10 Punkte gewonnen hat. Das Spiel muß nun vorzeitig abgebrochen werden. Bei Spielabbruch hat A 7 Punkte, B 9 Punkte. Wie haben sie ihren Einsatz zu teilen?

Die Aufgabe mit dieser Problemstellung, bei der natürlich auch andere Zahlen auftreten können, wird als *«Teilungsproblem»,* als *problème des partis»* oder als *«problème des points»* bezeichnet. [5]

Pacioli gibt auch seine Lösung der Aufgabe: Er meint, der Einsatz sei im Verhältnis der bis zum Spielabbruch erzielten Punktezahlen zu teilen; in unserem Falle müßte also im Verhältnis 7:9 geteilt werden. Er hat wohl kaum geahnt, daß es hier eigentlich um eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung geht: Man müßte doch wissen, welche Wahrscheinlichkeit für jeden der Spieler im Zeitpunkte des vorzeitigen Spielabbruches besteht, das Spiel noch zu gewinnen, wenn es weitergeführt werden könnte. Dann hätte man im Verhältnis dieser Wahrscheinlichkeiten zu teilen; dies würde hier auf eine Teilung im Verhältnis 1:7 hinauslaufen. Wir kommen unten darauf zurück.

[5] Pacioli hat andere Zahlen (6; 5 und 2). Wir stellen hier die Lösungen der verschiedenen Autoren alle mit denselben Zahlen dar.

Dieses Teilungsproblem ist nun für die Wahrscheinlichkeitsrechnung deshalb von außergwöhnlicher Bedeutung geworden, weil der in der Einleitung genannte Briefwechsel von Pascal und Fermat im Jahre 1654 sich mit eben diesem Problem befaßt. Und dabei sind Überlegungen gemacht worden, die in den Sechziger Jahren des 17. Jahrhunderts zum Beginn einer großartigen Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung geführt haben. O. ORE (1960) weist darauf hin, daß sich ein solches Teilungsproblem bereits in einem italienischen Manuskript aus dem Jahre 1380 findet; er vermutet, das Problem sei arabischen Ursprungs. Wie dem auch sei, die weiteren Überlegungen sind offenbar von der Aufgabenstellung in Paciolis *Summa* ausgegangen. Ähnlich wie wir es beim Problem mit den drei Würfeln gesehen haben, ist die Aufgabe immer wieder vorgenommen worden.

Zunächst hat sich Cardano der Aufgabe angenommen, nicht etwa in seinem *Liber de ludo aleae,* sondern in der 1539 in Mailand erschienenen *Practica arithemticae generalis et mensurandi singularis.* Er bemängelt an Paciolis Lösungsvorschlag richtig, daß die Anzahl der Punkte, die jedem der Spieler noch zum Gewinn fehlen, nicht berücksichtigt werde. Aber auch seine Lösung (Teilung im Verhältnis 1:6) ist falsch; er scheint ebenfalls nicht zu sehen, daß es sich hier eigentlich um ein stochastisches Problem handelt. (Eine Darstellung seiner Lösung und seiner Überlegungen findet man z.B. bei M. CANTOR, 1899/1900.)

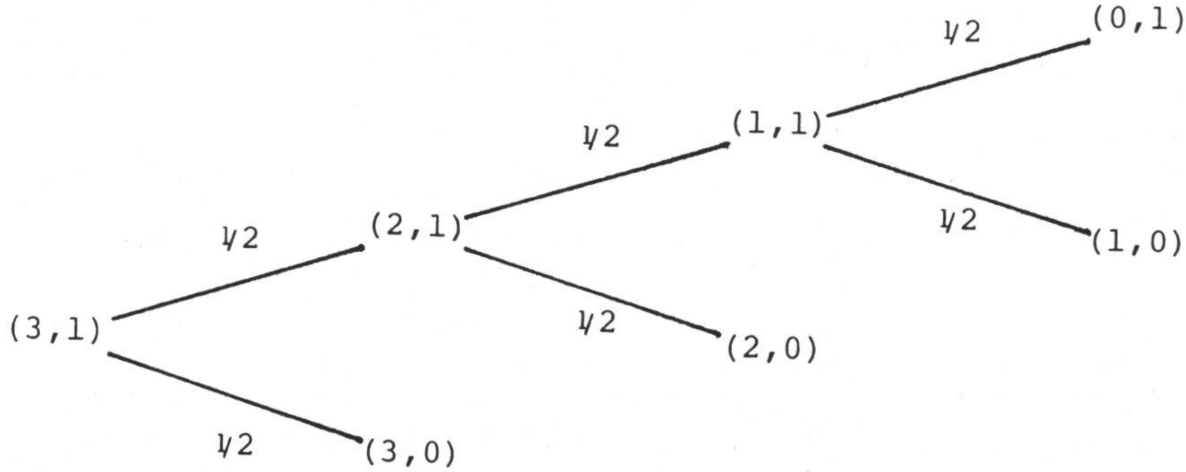
Auch Nicolò Tartaglia (1500?–1557) – Cardanos Erzfeind im Streit um jene Formel zur Auflösung der kubischen Gleichung, die heute immer noch als Cardanische Formel bezeichnet wird, obwohl sie richtiger nach Tartaglia oder noch besser nach Scipione del Ferro benannt würde – beschäftigt sich in seinem *Trattato generale di numeri e misure* (Venedig 1556/60) mit der Lösung dieser Aufgabe. Auch er findet die Lösung von Pacioli «unannehmbar und nicht gut»: Wenn nämlich ein Spieler zufällig beim vorzeitigen Abbruch noch keinen Punkt hätte, so würde ja einfach der andere alles erhalten. Und «das ist offensichtlich nicht vernünftig» meint er. Aber, so fährt er weiter, eine beweisbare Lösung gebe es nicht: Die Frage sei mehr nach rechtlichen Überlegungen als nach Vernunftgründen (!) zu beurteilen, *«la risoluzione di una tal questione e piu presto giudicale che per ragione».* Auch sein Lösungsvorschlag (8:12) befriedigt nicht, und auch er findet offensichtlich keine stochastische Komponente in diesem Problem (cf. M. CANTOR, 1899/1900).

Zwei Jahre nach dem *Trattato* von Tartaglia, also 1558, publizierte GIOBATTISTA FRANCESCO PEVERONE seine *Due brevi e facili trattati, il primo d'Arithmetica, l'altro di Geometria* [6]. Und im *libro terzo* des ersten Traktates stellt er gleich zweimal hintereinander unser Teilungsproblem. Beide Male handelt es sich um dieselbe Aufgabe, nur die Formulierungen sind verschieden; er verwendet dabei jene Zahlen, mit denen wir das Teilungsproblem oben skizziert haben. Die erste Aufgabe löst er falsch (1:6). Er

[6] In der Schweiz ist kein Exemplar des Werkes von PEVERONE vorhanden. Ich verdanke J. Laub (Wien) und E. Seidel (Graz) die Mitteilung, daß sich ein Exemplar in der Österreichischen Nationalbibliothek Wien und eines in der Bibliothek der Cornell University, Ithaca, New York, befinden, sowie die Beschaffung der entsprechenden Kopien.

gibt dabei auch keine Begründungen – solche finden sich im ganzen Traktat überhaupt fast keine –, sondern teilt einfach mit, wie im vorliegenden konkreten Fall gerechnet werden muß. Für die Vorgeschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist hier noch nichts zu holen; der libro terzo, der die Aufgabe enthält, trägt übrigens den Titel *«De compagnie»* und bringt zum Teil Aufgaben, die man in ähnlicher Form noch vor wenigen Jahrzehnten unter der Überschrift «Teilungs- und Gesellschaftsrechnungen» in Darstellungen des «bürgerlichen Rechnens» finden konnte.

Das an diese Aufgabe anschließende Beispiel ist jedoch für unsere Zwecke um einiges ergiebiger: PEVERONE betrachtet zuerst den Fall, da jedem Spieler noch ein Punkt zum Gewinn fehlt. Dann geht er zurück zum Fall, da dem einen Spieler 2 Punkte und dem andern noch 1 Punkt fehlt. Er berechnet *richtig* die Verteilung des Einsatzes, wenn jetzt abgebrochen werden müsste (1 : 3). Nun geht er auf den Fall zurück, da dem einen 3 Punkte fehlen, dem andern wie bisher 1 Punkt. In moderner Ausdrucksweise könnten wir also sagen, daß PEVERONE ein Stück weit einen *stochastischen Prozeß* betrachtet; man würde ihn heute etwa durch das folgende Schema darstellen (beide Spieler seien gleich stark):




Unser Schema zeigt sofort, daß der «Zustand» (3,1), da dem A noch 3 Punkte fehlen, dem B aber nur 1 Punkt, mit der Wahrscheinlichkeit $(1/2)^3$ in den Zustand (0,1) übergeht, in welchem A gewinnen würde. Und mit der Wahrscheinlichkeit $1/2 + (1/2)^2 + (1/2)^3 = 7/8$ geht er in einen der Zustände (X, 0) – wobei X = 3, 2, 1 – über, da B gewinnen würde. Also muß der Einsatz *im Verhältnis der Gewinnwahrscheinlichkeiten,* 1 : 7, geteilt werden. An dieser Stelle ist PEVERONE leider ein Fehler unterlaufen: Sein Resultat ist 1 : 6, PEVERONE stolpert über seine eigene richtige Regel! *«I think this must be one of the nearest misses in mathematics»,* meint M. G. KENDALL (1956) dazu.

Aus PEVERONES Anweisungen für die Berechnung des Teilungsverhältnisses – richtig also bei der Behandlung des Zustandes (2,1), «beinahe richtig» bei der Behandlung des Zustandes (3,1) – *könnte* (!) man folgende Regel für die Behandlung des Zustandes (n, 1) herauslesen: Wenn dem Spieler A noch n Punkte zum Sieg fehlen, dem Spieler B nur noch ein Punkt zum Sieg fehlt, so ist der Einsatz im Verhältnis $1 : t_n$ zu teilen, wobei $t_n$ durch die folgende Rekursionsformel gegeben ist: $t_n = 1 + 2 \cdot t_{n-1}$; $n \geqq 1$, $t_0 = 0$. Der Faktor 2 könnte weiter nach PEVERONE erklärt werden *«per che si indopia la* *difficulta, & pericolo»,* sobald man eben von einem einen Schritt weiter zurückliegenden Zustand ausgeht.

Diese Rekursionsformel führt sofort auf das Teilungsverhältnis $1:(2^n-1)$ beim Spielabbruch im Zustand (n, 1); auf dasselbe Teilungsverhältnis führt die Teilung im Verhältnis der Gewinnwahrscheinlichkeiten. M.G. KENDALL (1956) liest aus den Anweisungen von PEVERONE die Verwendung von geometrischen Reihen heraus: Diese werden im gleichen Traktat kurz behandelt, und in der falsch gelösten ersten Teilungsaufgabe von PEVERONE ist ausdrücklich von einer «progressione» die Rede.

Schließlich ist hervorzuheben, daß bei PEVERONES Lösung wohl zum ersten Mal beim Teilungsproblem der *stochastische* Charakter dieses Problems leise angedeutet wird: *«ma questo sta con pericolo di perdere il secondo vinto il primo...»,* steht unter anderem in seiner Darlegung des Falles, da dem Spieler A noch 2 Punkte fehlen; bei der Behandlung des nächsten Falles ist nochmals ausdrücklich vom *«pericolo»* die Rede. Das Risiko, der Zufall, sind also nun explizit in die Betrachtung einbezogen worden.

Es sei noch angemerkt, daß in der auf die beiden Teilungsprobleme folgenden Aufgabe zwei Spiele verglichen werden: Einer setzt *«4, contra 5»,* der andere *«13, contra 16»,* und es wird untersucht, welcher die besseren Bedingungen habe (mit Hilfe einer Proportion, bzw. des Dreisatzes, der «regola del tre»). Von Ungewißheit, Zufall oder auch nur von *«pericolo»* ist dabei noch nicht die Rede, auch nicht in den leisesten Andeutungen. Aber es wird immerhin etwas getan, was später auch in der eigentlichen Wahrscheinlichkeitsrechnung wieder getan und und dann natürlich weitergeführt wird: Man vergleicht den erwarteten Gewinn mit dem erwarteten Verlust.

Hätte Peverone richtig gerechnet, so hätte er rund 100 Jahre vor Pascal und Fermat das Teilungsproblem in diesem einfachen Spezialfall richtig gelöst. In seinem berühmt gewordenen, bereits erwähnten Briefwechsel mit Fermat hat Pascal das Teilungsproblem zunächst – im Prinzip – ebenfalls in Form eines stochastischen Prozesses gelöst (Brief von Pascal an Fermat vom 29. Juli 1654; B. PASCAL, Œuvres complètes 1954; vgl. dazu auch H. LOEFFEL, 1974). Fermat hingegen hat sich überlegt, wie viele Partien notwendig wären, um das Spiel sicher zum Abschluß zu bringen; wir kennen sein Vorgehen aus dem Brief von Pascal an Fermat vom 24. August 1654: «... voici comment vous procédez quand il y a deux joueurs...», so beginnt Pascal seine diesbezüglichen Ausführungen. Wenn wir etwa vom Zustand ausgehen, da A noch 3 Punkte, dem B aber nur noch 1 Punkt zum Gewinn fehlen, also vom Zustand (3,1), so sieht man sofort, daß *drei* weitere Partien auf alle Fälle genügen, um das Spiel zum Abschluß zu bringen [7]. Fermat denkt sich deshalb das Spiel mit drei weiteren Partien fortgesetzt. Bezeichnen wir den Gewinn einer Partie durch A mit a, den Gewinn einer Partie durch B mit b, so ergeben sich für diese *fiktive* Fortsetzung des Spieles die folgenden acht Möglichkeiten:

aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb.

[7] Wir bleiben bei den bisher verwendeten Punktzahlen; Fermat arbeitete nicht mit (3; 1), sondern mit (2; 3).

A würde also in einem Falle gewinnen (aaa), B in allen andern sieben Fällen. Bei Abbruch des Spieles im Zustand (3,1) ist der Einsatz also im Verhältnis 1 : 7 zu teilen – genau wie bei der Lösung nach den Überlegungen von Pascal. *«Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris»,* stellt Pascal im genannten Brief mit sichtlicher Befriedigung fest.

In seiner Arbeit *Divers usages du triangle arithmétique dont le générateur est l'unité* (1654, gedruckt 1665; B. PASCAL, Œuvres complètes, 1954) gibt Pascal eine besonders elegante Lösung des Teilungsproblems mit Hilfe des *triangle arithmétique,* eben des «Pascalschen Dreiecks». Es soll hier darauf nicht weiter eingegangen werden. Hingegen soll doch erwähnt werden, daß Pascal dabei den *«Schluß von n auf (n+1)»* anwendet, jenes Beweisverfahren also, das – wohl seit Dedekind – als *«vollständige Induktion»* bezeichnet wird. Pascal darf als Erfinder dieses Schlußverfahrens bezeichnet werden, wie H. FREUDENTHAL (1953) gezeigt hat.

Wir sind damit wieder bei der Einleitung zu unseren Betrachtungen angelangt. Pascal war sich wohl bewußt, mit Fermat zusammen die Grundlagen zu einer neuen mathematischen Disziplin gelegt zu haben. Voll freudigen Stolzes schreibt er in seiner Eingabe an die *Celeberrima Matheseos Academia Parisiensis,* welcher er 1654 einige seiner mathematischen Arbeiten aus verschiedenen Gebieten, darunter auch aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, einreicht:

«Die Sache [8] irrte bis zur Stunde im Ungewissen; nun aber hat sie, die sich dem Experiment nicht fügen wollte, der Herrschaft des Verstandes nicht entgehen können ... Und indem sie so die Beweiskraft der Mathematik mit der Ungewißheit des Würfels verbindet und versöhnt, was gegensätzlich schien, empfängt sie von beiden ihre Benennung und nimmt mit Recht den staunenerregenden Titel in Anspruch: MATHEMATIK DES WÜRFELS.»

IDEO RES HACTENUS ERRAVIT INCERTA; NUNC AUTEM QUAE EXPERIMENTO REBELLIS FUIT RATIONIS DOMINIUM EFFUGERE NON POTUIT ... ET SIC MATHESEOS DEMONSTRATIONES CUM ALEAE INCERTITUDINE JUNGENDO, ET QUAE CONTRARIA VIDENTUR CONCILIANDO, AB UTRAQUE NOMINATIONEM SUAM ACCIPIENS, STUPENDUM HUNC TITULUM JURE SIBI ARROGAT: ALEAE GEOMETRIA.

**Dank**

Für die Mithilfe bei der Beschaffung der Literatur, für Beratung in sprachlichen Fragen bei den Übersetzungen, für die Ermöglichung von Versuchen mit Würfeln aus der Antike und mit Astragali, für Auskünfte und klärende Diskussionen möchte ich an dieser Stelle bestens danken: G. Biegel (Freiburg i. Br.), K. R. Biermann, (Berlin-Buch), Maria Teresa Bise-Casella (Villars-sur-Glâne FR), Ivana Bosoppi (Fribourg), W. Dietrich (Courtaman FR), J. P. Gabriel (Fribourg), H. G. Horn (Bonn), R. Imbach

[8] Damit ist das Problem des Glückspiels, die Wahrscheinlichkeit, gemeint.

(Fribourg), B. Kaup (Fribourg), J. Laub (Wien), D. Meyer (Fribourg), Gisela Reinhardt (Königswinter), Beatrice Rima (Fribourg), G. Schelbert (Fribourg), Elisabeth Schmid (Basel) und E. Seidel (Graz).


## Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird die Frage untersucht, wo sich allenfalls schon vor dem Beginn der eigentlichen Wahrscheinlichkeitsrechnung (der in die zweite Hälfte des 17. Jh. fällt) Hinweise auf stochastische Überlegungen finden lassen; das Hauptaugenmerk wird dabei auf Feststellungen über die statistische Regelmäßgkeit und auf die Beurteilung von Chancen durch Auszählen der günstigen Fälle gelegt. Inhalt: Astragali und Würfel in der Antike – Gründe für das Fehlen einer Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Antike – Beurteilung der Chancen beim zara-Spiel (Spiel mit drei Würfeln) durch die frühen Dante-Kommentatoren und im «Pseudoovidius De Vetula» – Stochastisches Denken in der frühen und in der mittelalterlichen jüdischen Litaratur – Leistungen von Cardano im Liber de ludo aleae, dem ersten Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung – das Teilungsproblem von Fra Luca Pacioli und die «beinahe» richtige Lösung durch Peverone; die vollständige Lösung dieses Problems durch Pascal und Fermat.

## Résumé

Il est habituel de faire remonter l'origine de la théorie des probabilités au XVII$^{e}$ siècle. Il nous paraît légitime de se demander si certaines notions liées à la stochastique ne sont pas antérieures à cette période. Ce travail se propose de préciser cette question à propos des notions de régularité statistique et d'évaluation des chances par dénombrement des cas favorables.

## Summary

The roots of probability theory are usually attributed to the 17$^{th}$ century. However one can wonder if some of the notions related to stochastics were not developed before. Our paper is a tentative answer to this question. It intends to shed some light on the notions of statistical regularity and the chance evaluation by counting the number of favorable cases.


## Literaturverzeichnis


ARISTOTELES: Metaphysik. Zweiter Halbband *VII(Z)–XIV(N)*. Übersetzung von H. BONITZ, hrsg. von H. SEIDL. Hamburg 1980.

ARNAULD, A., et NICOLE, P.: La logique ou l'art de penser (1662). Ed. critique présentée par P. CLAIR et F. GIRBAL. Paris 1965.

BECQ DE FOUQUIÈRES, L.: Les jeux des anciens. Paris 1873.
BERNOULLI, J.: Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi). Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften *107* und *108*. Leipzig 1899.
– – : Die Werke von Jakob Bernoulli. Hrsg. von der Naturforsch. Ges. Basel; Band *3,* bearbeitet von B.L. VAN DER WAERDEN. Basel 1975.
BIEGEL, G.: (Hrsg.): Das erste Gold der Menschheit. Freiburg i.Br. 1986.
BIERMANN, K.-R.: Über die Untersuchung einer speziellen Frage der Kombinatorik durch G.W. Leibniz. Forsch. u. Fortschr. *28,* 357–361 (1954).
– – : Spezielle Untersuchungen zur Kombinatorik durch G.W. Leibniz. Forsch. u. Fortschr. *30,* 169–172 (1956).
– – : Aus der Entstehung der Fachsprache der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Forsch. u. Fortschr. *39,* 142–144 (1965).
– – , und FAAK, M.: G.W. Leibniz' «De incerti aestimatione». Forsch. u. Fortschr. *31,* 45–50 (1957).
BÜHLMANN, H.: Die «Geburtstunde» der mathematischen Statistik. Vierteljahresschr. d. Naturforsch. Ges. Zürich *109,* 163–170 (1964).
CANTOR, M.: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik *II.* Leipzig 1899/1900.
DAVID, F.N.: Games, gods and gambling. London 1962.
FIERZ, M.: Girolamo Cardano, Arzt, Naturphilosoph, Mathematiker, Astronom und Traumdeuter. Basel 1975.
FREUDENTHAL, H.: Zur Geschichte der vollständigen Induktion. Arch. Intern. Hist. Sci. *6,* 2–37 (1953).
GALILEI, G.: Opere. A c. di S. TIMPANARO, *I.* Milano 1936.
GARDEIL, A.: La «certitude probable». Rev. Sc. Philos. et Théol. *5,* 237–266 (1911).
HACKING, I.: The emergence of probability. London 1974.
HAGSTROEM, K.G.: Les préludes antiques de la théorie des probabilités. Stockholm 1932.
HASOFER, A.M.: Studies in the history of probability and statistics XVI. – Random mechanics in talmudic literature. Biometrika *54,* 316–321 (1967).
HIRSCHBERGER, J.: Geschichte der Philosophie *I.* Freiburg i.Br. 1949.
HORN, H.G.: Ein römischer Spielturm aus Vettweiß-Froitzheim, Kr. Düren. Ausgrabungen im Rheinland *1983/84,* Rheinisches Landesmuseum Bonn 1985.
KARUSU, S.: Der Erfinder des Würfels. Mitt. dtsch. archaeolog. Inst., Athenische Abt. *88,* 55–65 (1973).
KENDALL, M.G.: Studies in the history of probability and statistics II. – The Beginnings of a probability calculus. Biometrika *43,* 1–14 (1956).
KLOPSCH, P.: Pseudo-Ovidius De Vetula. Untersuchungen und Text. Mittellat. Studien, hrsg. von K. LANGOSCH. Leiden 1967.
KOHLI, K.: Aus dem Briefwechsel zwischen Leibniz und Jakob Bernoulli. In: Die Werke von Jakob Bernoulli; hrsg. von der Naturforsch. Ges. Basel; Band *3,* bearbeitet von B.L. VAN DER WAERDEN. Basel 1975.
– – , und VAN DER WAERDEN, B.L.: Bewertung von Leibrenten. In: Die Werke von Jakob Bernoulli; hrsg. von der Naturforsch. Ges. Basel; Band *3,* bearbeitet von B.L VAN DER WAERDEN. Basel 1975.

DELLA LANA: Comedia di Dante degli Allagherii col commento di Jacopo di Giovanni della Lana, a.c.di L. SCARABELLI. Milano 1865.
LAPLACE, P.S.: Théorie analytique des probabilités. Paris 1812.
LIBRI, G.: Histoire des sciences mathématiques en Italie *II*. Paris 1838/41.
LOEFFEL, H.: Glückspiel und Markovketten. El. Math. *29*, 142–149 (1974).
– – : Über die Anfänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mitt. Ver. schweiz. Versicherungsmathematiker *76*, 121–129 (1976).
MAHALANOBIS, P.C.: The foundations of statistics. Sankyā *18*, 183–194 (1957).
MAISTROV, L.E.: Probability theory, a historical sketch (translated by S. KOTZ from the Russian). New York 1974.
NIKOLOV, V.: Die Kunst der späten Kupferzeit in Bulgarien. In: BIEGEL, G. (Hrsg.): Das erste Gold der Menschheit. Freiburg i.Br. 1986.
ORE, O.: Cardano, the gambling scholar. Princeton 1953.
– – : Pascal and the invention of probability theory. Americ. Math. Monthly *67*, 409–419 (1960).
PASCAL, B.: Œuvres complètes. Texte établi et annoté par J. CHEVALIER. Paris 1954.
PEVERONE, G.F.: Due brevi e facili trattati, il primo d'arithmetica, l'altro di geometria. Lione 1558.
POINCARÉ, H.: Sciences et hypothèses. Paris 1935.
RABINOVITCH, N.L.: Studies in the history of probability and statistics XXII. – Probability in the Talmud. Biometrika *56*, 437–441 (1969).
– – : Studies in the history of probability and statistics XXIV. – Combinations and probability in rabbinic literatur. Biometrika *57*, 203–205 (1970).
– – : Probability and statistical inference in Ancient and Medieval Jewish Literature. Toronto 1973.
RIECHE, A.: Römische Kinder- und Gesellschaftsspiele. Schriften des Limesmuseums Aalen *34*. Stuttgart 1984.
SAMBURSKY, S.: On the possible and the probable in Ancient Greece. Osiris *12*, 35–48 (1956).
– – : Das physikalische Weltbild der Antike. Zürich 1965.
SAPEGNO, N.: Dante Alighieri, La Divina Commedia. Milano-Napoli 1957.
SCHMID, E.: Beinerne Spielwürfel von Vindonissa. Ges. pro Vindonissa, Jahresber. *1978*. Brugg 1980.
SCHNEIDER, I.: Die Mathematisierung der Vorhersage künftiger Ereignisse in der Wahrscheinlichkeitstheorie vom 17. bis zum 19. Jahrhundert. Ber. Wissenschaftsgesch. *2*, 101–112 (1979).
SCHÜTZ, L.: Thomas-Lexikon. Sammlung, Übersetzung und Erklärung der in sämtlichen Werken des h. Thomas vorkommenden Kunstausdrücke und wissenschaftlichen Aussprüche. Paderborn 1895.
SHEYNIN, O.B.: On the prehistory of the theory of probability. Arch. Hist. exact Sci. *12*, 97–141 (1974).
TODHUNTER, I.: A history of the mathematical theory of probability. London 1865 (repr. New York 1949).
VÄTERLEIN, J.: Roma ludens, Kinder und Erwachsene beim Spiel im alten Rom. Amsterdam 1976.

VAN DER WAERDEN, B. L.: Historische Einleitung. In: Die Werke von Jakob Bernoulli; hrsg. von der Naturforsch. Ges. Basel; Band *3*, bearbeitet von B. L. VAN DER WAERDEN. Basel 1975.