

Zeitschrift:	Bulletin de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles = Bulletin der Naturforschenden Gesellschaft Freiburg
Herausgeber:	Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles
Band:	65 (1976)
Heft:	1: Mélanges en l'honneur du professeur Otto Huber à l'occasion de son 60e anniversaire = Festschrift zum 60. Geburtstag von Professor Otto Huber
Artikel:	Bestimmung der Kernladungsverteilung aus myonischen Röntgenlinien
Autor:	Dubler, T. / Kaeser, K. / Robert-Tissot, B.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-308526

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 25.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Bestimmung der Kernladungsverteilung aus myonischen Röntgenlinien¹

von T. DUBLER, K. KAESER, B. ROBERT-TISSOT,
L. A. SCHALLER, L. SCHELLENBERG und H. SCHNEUWLY,

Physikalisches Institut der Universität Freiburg i. Ue.

1. Einleitung

Die Bestimmung der Struktur der Atomkerne ist ein altes, aber immer noch äußerst aktuelles Problem der Kernphysik. Neben dem Studium von Kernreaktionen und spektroskopischen Untersuchungen, zu denen OTTO HUBER (1942, 1943, 1949, 1952) wesentliche Beiträge geleistet hat, kommt der genauen Bestimmung der Ladungsverteilung der Atomkerne eine grundlegende Bedeutung zu.

Seit den ersten Streuexperimenten von Geiger und Marsden mit He-Kernen und der Interpretation von RUTHERFORD (1911) haben sich sowohl die theoretischen wie die experimentellen Methoden rasch entwickelt. Spezielle Erfolge erzielte die Methode der Streuung hochenergetischer Elektronen. Diese Art von Messungen erlaubt nicht nur die Bestimmung eines mittleren Kerndurchmessers, sondern auch Aussagen über die radiale Verteilung der Kernladung (UEBERALL 1971).

1936 wurde das schwere Elektron, das sog. Myon, in der kosmischen Strahlung entdeckt. Zehn Jahre später konnte das Myon künstlich

¹ Diese Arbeit wurde vom Schweiz. Nationalfonds finanziell unterstützt.

mit Hilfe von Beschleunigern hergestellt werden. Dies führte WHEELER (1947) zum Vorschlag, negative Myonen in Materie abzubremsen, damit sie vom Coulombfeld des Kerns eingefangen werden. Da die Myonen rund 207 mal schwerer sind als die Elektronen, kommen ihre Atombahnen dem Kern so nahe, daß sie die endliche Kernausdehnung deutlich spüren. Gehen wir vom Bohr'schen Atommodell aus, so müssen die Atombahnradien der Myonen um das Massenverhältnis m_μ/m_e kleiner sein als diejenigen der Elektronen. Für Gold befindet sich dann der am stärksten gebundene 1s-Zustand des Myons praktisch im Innern des Kerns. Umgekehrt nehmen die Übergangsenergien mit dem Massenverhältnis zu, so daß, wiederum für Gold, die Balmerserie in den Energiebereich von 2.4 bis 3.8 MeV zu liegen kommt. Aus dem Unterschied zwischen den berechneten Punktkernenergien und den gemessenen Übergangsenergien läßt sich die Ausdehnung der Kernladung sehr genau bestimmen. Die ersten Messungen dieser Art wurden von FITCH und RAINWATER (1953) durchgeführt.

Unterschiede in der Kernladungsverteilung von Isotopen wurden zuerst anhand der Energieverschiebung von Spektrallinien elektronischer, d. h. normaler Atome beobachtet. Die myonischen Röntgenenergien sind jedoch viel empfindlicher auf die Ladungsverteilung, so daß systematische Untersuchungen auch für leichte Kerne durchgeführt werden können.

Zwischen Grundzustand und angeregten Zuständen des Kernes, sog. Isomeren, treten ebenfalls kleine Differenzen im Ladungsradius auf. Auch zur Erforschung von Isomeren hat OTTO HUBER (1948, 1951, 1952) wesentlich beigetragen. Myonische Atome sind neben dem Mössbauer-Effekt eines der wichtigsten Hilfsmittel zum Studium solcher Strukturänderungen von Kernen (WALTER et al., 1972; BACKE et al., 1974).

Die experimentellen Fortschritte zum Nachweis der myonischen Röntgenstrahlung, insbesondere seit der Herstellung und Verwendung hochauflösender Halbleiterdetektoren, und die zur Analyse verwendeten theoretischen Methoden sind in verschiedenen Übersichtsartikeln beschrieben worden (WU und WILETS, 1969; SCHALLER, 1973; ENGFER et al., 1974; HÜFNER und SCHECK, 1976).

In der vorliegenden Arbeit berichten wir über die Ergebnisse von Messungen an myonischen Atomen zur Bestimmung der Ladungsverteilung von leichten (C, N, O), mittleren (Na, S) und schweren (Au)

Kernen. Ein Teil der Ergebnisse ist bereits früher veröffentlicht worden (DUBLER et al., 1974).

2. Theorie

2.1. Myoneneinfang

Das Myon wird wie jedes geladene Teilchen in Materie gebremst. Bei genügend kleiner kinetischer Energie wird es vom Coulombfeld eines Atomkerns auf eine Bahn mit hoher Hauptquantenzahl eingefangen. Die Frage, ob es in Molekülen zuerst auf Molekülbahnen eingefangen wird, ist experimentell noch nicht geklärt. Dagegen ist erwiesen, daß die chemische Struktur einen Einfluß auf den Einfang und die nachfolgende Kaskade hat (DUBLER et al., 1975; PONOMAREV, 1973). Der Übergang zu Zuständen niedrigerer Hauptquantenzahlen bis schließlich in den 1s-Zustand erfolgt unter Aussendung von Auger-Elektronen oder elektrischer Dipolstrahlung (myonischer Röntgenstrahlung). In schweren myonischen Atomen sind wegen der großen Übergangsenergien auch E2-Übergänge möglich (SCHNEUWLY et al., 1972), welche in normalen Atomen nur selten auftreten. Die für Kaskadenübergänge benötigten Zeiten sind im allgemeinen kleiner als 10^{-11} s. Da die Lebensdauer des Myons etwa $2.2 \cdot 10^{-6}$ s beträgt, kann es für diese Übergänge als stabiles Teilchen betrachtet werden. Nach Erreichen des 1s-Zustandes zerfällt das Myon oder wird vom Kern in einer charakteristischen Zeit von $4 \cdot 10^{-7} (82/Z)$ s durch schwache Wechselwirkung eingefangen. Dadurch wird der Kern so stark angeregt, daß er unter Aussendung von Neutronen und Gammastrahlung, gelegentlich auch durch Protonenemission, in den Grundzustand eines Tochterkerns übergeht. Diese Gammastrahlung wird bezüglich der «prompten» myonischen Röntgenstrahlung als «verzögerte» Strahlung bezeichnet.

Das Myon ist auf Bahnen kleiner Hauptquantenzahl ($n \leq 4$) auf die Kernladungsverteilung empfindlich. Dabei hält es sich weit innerhalb der Elektronenwolke auf. Das myonische Atom kann dann als Zweiteilchensystem, d. h. als wasserstoffähnliches Atom der Ladung Z, behandelt werden. Betrachtet man den Kern als punktförmig und die Bewegung des Myons als nichtrelativistisch, so ergibt die Bohr'sche Theorie die in der Tabelle 1 angegebenen Werte für die Bindungs-

Grösse	Formel	e-Atom			μ-Atom		
		C	S	Au	C	S	Au
Bohrscher Radius	$a_B = \frac{h}{\alpha m c} \cdot \frac{1}{Z}$ [fm]	8'820	3'307	670	43	16	3
Bindungs-Energie	$E_{1s} = \frac{1}{2} \alpha^2 m c^2 Z^2$ [keV]	.490	3.48	84.9	101	720	17'558
Kernradius	$R_N \approx 1.2 A^{1/3}$ [fm]	2.7	3.8	7.0	2.7	3.8	7.0

Tabelle 1: Typische Größen für elektronische und myonische Atome

energie und den Radius der 1s-Bahn. Zum Vergleich sind auch die entsprechenden Werte für ein Elektron angegeben. Relativistisch wird das Myon in erster Näherung durch die Dirac-Gleichung in dem durch die Kernladung erzeugten äußeren Feld beschrieben. Die Bindungsenergie im Feld eines Punktatoms der Ladung Ze ist dann (ROSE, 1961):

$$E_{n,j} = \frac{m_\mu c^2}{\left\{ 1 - \left[1 + \left(\frac{\alpha Z}{n - (j + 1/2) + \sqrt{(j + 1/2)^2 - (\alpha Z)^2}} \right)^2 \right]^{-1/2} \right\}}$$

Dabei bedeuten m_μ die Masse des Myons, c die Lichtgeschwindigkeit, α die Feinstrukturkonstante, n die Hauptquantenzahl und $j = l \pm 1/2$ den Gesamtdrehimpuls (l ist der Bahndrehimpuls).

2.2. Räumliche Kernladungsverteilung

Die endliche Ausdehnung der Kernladung führt zu einer Verminderung der Bindungsenergie im Vergleich zur Punktatomrechnung. Ist der Kern nicht kugelsymmetrisch und weist ein elektrisches Quadru-

polmoment auf, so werden die Berechnungen kompliziert. Dafür läßt sich dann aus der resultierenden Hyperfeinaufspaltung dieses Quadropolmoment genauer als aus elektronischen Atomen bestimmen, da die Aufspaltung proportional zu m_μ^3 ist (DEY et al., 1973). Im folgenden betrachten wir vorwiegend sphärisch symmetrische Kerne.

Gegenüber der Punktkernenergie ist die Abweichung der Bindungsenergie des Myons umso größer, je stärker die Überlappung der Wellenfunktion $\psi(r)$ des Myons im betreffenden Zustand mit der Kernladungsdichte $\rho(r)$ ist. Diese Überlappung ist im 1s-Zustand am größten und nimmt für höhere Zustände rasch ab. Die Niveaus $1s_{1/2}$, $2s_{1/2}$, $2p_{1/2}$ und $2p_{3/2}$ sind somit auf die Ladungsverteilung am empfindlichsten. Die Zahl der Parameter, welche für eine gegebene Verteilung bestimmt werden können, ist daher praktisch auf drei beschränkt.

Mit dem Potential $V(r)$ einer ausgedehnten Kernladung läßt sich die Dirac-Gleichung nicht mehr analytisch lösen. Sie muß numerisch integriert werden. Eine Störungsrechnung, wie sie bei elektronischen Atomen angewendet werden kann, ist nicht mehr möglich. Bei schweren Kernen reduziert nämlich die endliche Kernausdehnung die Bindungsenergie des myonischen 1s-Zustandes um rund 50 %.

Das Potential $V(r)$ erhält man durch Integration der Ladungsverteilung $\rho(r)$

$$V(r) = -\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \rho(r') \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right) 4\pi r'^2 dr', \quad (2)$$

wobei die Kernladungsdichte der Normierungsbedingung

$$4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr = 1 \quad (3)$$

genügt. Für unsere späteren Ausführungen ist es zweckmäßig, Momente der Ladungsverteilung einzuführen. Allgemein ist das k-te Moment $\langle r^k \rangle$ einer Verteilung $\rho(r)$ definiert als

$$\langle r^k \rangle = 4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^k r^2 dr \quad (4)$$

Die Wurzel des zweiten Moments, $\langle r^2 \rangle^{1/2}$, heißt der mittlere quadratische Radius. Es läßt sich zeigen (HILL und FORD, 1954), daß für leichte Kerne dieses zweite Moment in guter Näherung aus der Ana-

lyse der (2p-1s)-Übergänge erhalten wird, während für schwere Kerne ein kleineres Moment bestimmt wird.

Eine anschaulichere Größe wurde mit dem Begriff des sog. äquivalenten Radius R_k eingeführt (FORD und WILLS, 1969):

$$R_k = \left(\frac{k+3}{3} \langle r^k \rangle \right)^{1/k} \quad (5)$$

R_k ist der Radius einer homogen geladenen Kugel, die das gleiche k-te Moment wie die Ladungsverteilung $\rho(r)$ aufweisen würde.

Zur numerischen Berechnung der myonischen Energieniveaus sowie zur Analyse von Elektronenstreudaten werden möglichst einfache Modelle der Ladungsverteilung $\rho(r)$ gewählt, welche durch Funktionen von maximal drei Parametern dargestellt werden können. Dabei nimmt man an, daß der radiale Verlauf einer mehr oder weniger scharf begrenzten Verteilung entspricht. Eine der meist benützten Verteilungen ist das zweiparametrische Fermi-Modell:

$$\rho(r) = \rho_0 \left[1 + \exp \left(4 \ln 3 \frac{r-c}{t} \right) \right]^{-1} \quad (6)$$

Hier bedeuten c der Halbwertsradius, t die Schichtdicke und ρ_0 die Normierungsdichte. Der mittlere quadratische Radius lässt sich in diesem Fall durch folgende einfache Form approximieren:

$$\langle r^2 \rangle^{1/2} \approx \left[0.60 (c^2 + 1.19 t^2) \right]^{1/2} \quad (7)$$

Für leichte Kerne wird auch häufig eine aus dem Schalenmodell erhaltene Ladungsverteilung benutzt:

$$\rho(r) = \rho_0 \left[1 + \alpha \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \exp \left[- \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \quad (8)$$

Dabei sind a und α anpaßbare Parameter. Der mittlere quadratische Radius wird hier

$$\langle r^2 \rangle^{1/2} = \left[\frac{3}{2} a^2 \frac{2+5\alpha}{2+3\alpha} \right]^{1/2} \quad (9)$$

In der Tabelle 2 sind die mit einer realistischen Fermi-Verteilung berechneten Bindungsenergien für die Elemente C, S und Au mit den Diracschen Punktkernnäherungen verglichen. Man erkennt daraus den mit der Ladungszahl zunehmenden Einfluß der Kernausdehnung auf die Bindungsenergien. Die Kernausdehnung hebt die (n, j)-Entartung der Punktkernnäherung auf; die $2s_{1/2}$ und $2p_{1/2}$ Niveaus z. B. weisen

N&j	C		S		Au	
	E_p [keV]	E_A [keV]	E_p [keV]	E_A [keV]	E_p [keV]	E_A [keV]
$1s_{1/2}$	100.377	99.972	720.116	692.305	19313.603	10064.832
$2s_{1/2}$	25.097	25.046	180.183	176.627	4944.143	3365.735
$2p_{1/2}$	25.097	25.097	180.183	180.165	4944.143	4469.653
$2p_{3/2}$	25.085	25.085	179.567	179.560	4481.967	4300.162
$3d_{3/2}$	11.149	11.149	79.830	79.830	2006.256	1996.192
$3d_{5/2}$	11.148	11.148	79.770	79.770	1968.052	1959.224

Tabelle 2: Berechnete myonische Bindungsenergien für Punktkern und ausgedehnten Kern.

nicht mehr dieselbe Energie auf. Die Messung der ($2s_{1/2}$ - $2p_{1/2}$) – und ($2s_{1/2}$ - $2p_{3/2}$) – Übergänge ist daher von ganz speziellem Interesse. Der Nachweis ist jedoch schwierig wegen ihrer geringen Intensität.

Die Parameter einer Modellverteilung, z. B. c und t für das Fermi-Modell, werden durch Vergleich der theoretisch berechneten Übergangsenergien mit den gemessenen Energien bestimmt. Für jeden Übergang trifft eine Schar von (c, t)-Werten zu. Aus einem c-t Diagramm (BACKE et al., 1972) oder über einen Minimalisierungsprozeß (ROBERT-TISSOT, 1975) wird dasjenige Wertepaar bestimmt, welches die experimentellen Übergangsenergien mit minimalem χ^2 reproduziert.

2.3. Modellunabhängige Analyse

Die Analyse myonischer Daten mit Hilfe einer vorgegebenen Ladungsverteilung bedeutet eine willkürliche Annahme über die erst durch das Experiment zu bestimmende Verteilung. Neben der Fermi- und der Schalenmodell-Verteilung gibt es auch andere Verteilungen, welche die gemessenen Übergangsenergien wiedergeben können. Die aus dem Modell berechneten $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ sind somit nicht modellunabhängig, die berechneten Fehler des mittleren quadratischen Radius nicht realistisch. Man kann aber, ausgehend von einem modellabhängigen Moment, durch Störungsrechnung ein weitgehend modellunabhängiges Moment erhalten, wie im folgenden gezeigt werden soll.

Die Auswirkung einer Veränderung $\Delta\rho$ der Ladungsverteilung, z. B. die Differenz zwischen wahrer und modellabhängiger Ladungsverteilung, auf die Übergangsenergie E_{if} erhält man durch Störungsrechnung zu

$$\Delta E_{if} = 4\pi e \int_0^\infty \Delta V(r) \left[|\psi_i(r)|^2 - |\psi_f(r)|^2 \right] r^2 dr \quad (10)$$

Dabei bedeuten $\Delta V(r)$ die $\Delta\rho$ entsprechende Änderung des Potentials, $\psi_i(r)$ die Wellenfunktion des Myons im Anfangszustand i, $\psi_f(r)$ die Wellenfunktion im Endzustand f. Unter Verwendung der Poisson-Gleichungen

$$\nabla^2 V(r) = - \frac{Ze}{\epsilon_0} \rho(r) \quad (11)$$

$$\text{und } \nabla^2 U(r) = - \frac{e}{\epsilon_0} |\psi(r)|^2 \quad (12)$$

und des zweiten Greenschen Satzes ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Delta E_{if} &= - 4\pi \epsilon_0 \int_0^\infty \Delta V(r) \nabla^2 \left[U_i(r) - U_f(r) \right] r^2 dr \\ &= - 4\pi \epsilon_0 \int_0^\infty \nabla^2 \left[\Delta V(r) \right] \left[U_i(r) - U_f(r) \right] r^2 dr \\ &= 4\pi \epsilon_0 \int_0^\infty \frac{Ze}{\epsilon_0} \Delta \rho(r) \left[U_i(r) - U_f(r) \right] r^2 dr \end{aligned} \quad (13)$$

Die Differenz der Potentiale U kann durch eine analytische Funktion approximiert werden (FORD und WILLS, 1969). Eine gute Näherung ist nach BARRETT (1970)

$$U_i(r) - U_f(r) \approx B r^k e^{-\alpha r} \quad (14)$$

B , α und k sind zu bestimmende Konstanten. Die Barrett-Näherung führt zur Definition des verallgemeinerten Moments

$$\langle r^k e^{-\alpha r} \rangle = 4\pi \int_0^\infty \rho(r) e^{-\alpha r} r^{k+2} dr \quad (15)$$

Setzen wir (14) und (15) in (13) ein, so erhalten wir

$$\Delta E_{if} \approx ZeB \langle r^k e^{-\alpha r} \rangle \quad (16)$$

Da die Potentiale U nur wenig von der gewählten Ladungsverteilung abhängen, lässt sich aus jedem myonischen Übergang ein spezielles verallgemeinertes Moment bestimmen. Auch diese verallgemeinerten Momente können auf die anschaulicheren äquivalenten Radien R_k zurückgeführt werden. Letztere sind durch die Gleichung

$$\frac{3}{R_k^3} \int_0^{R_k} e^{-\alpha r} r^{k+2} dr = \langle r^k e^{-\alpha r} \rangle \quad (17)$$

definiert. Für $\alpha = 0$ erhält man wieder die Gleichung (5).

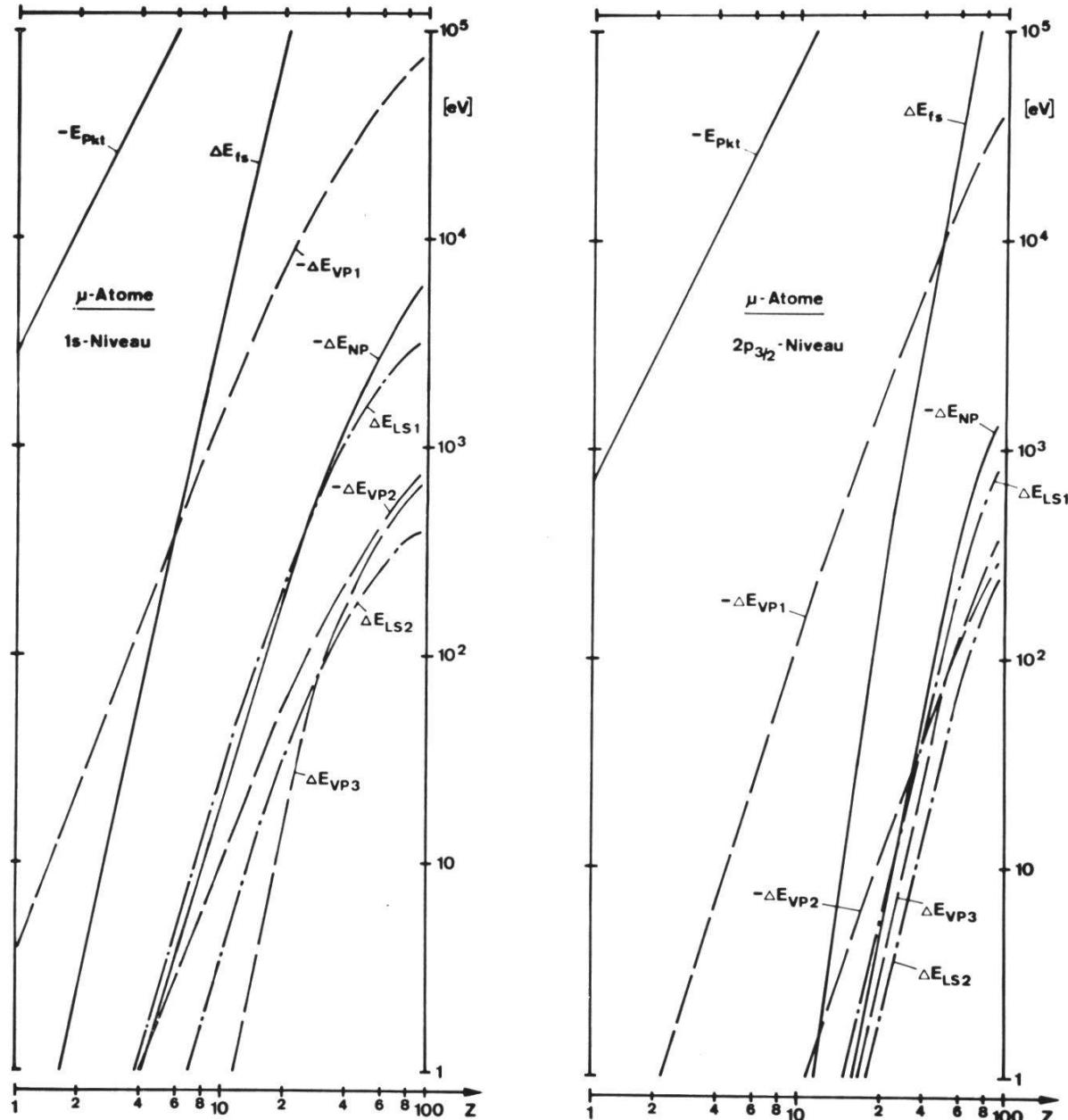
R_k ist ein modellunabhängiger Radiusparameter, der für jeden gemessenen myonischen Übergang bestimmt werden kann. Für die bekannten myonischen Übergänge sind die R_k -Werte tabelliert (ENGFER et al., 1974). Die Empfindlichkeit C_z des äquivalenten Radius auf die gemessenen Energien ist durch die Beziehung

$$C_z = \frac{dR_k}{dE} = - R_k \left\{ 3ZB \left[\langle e^{-\alpha r} r^k \rangle - e^{-\alpha R_k} R_k^k \right] \right\}^{-1} \quad (18)$$

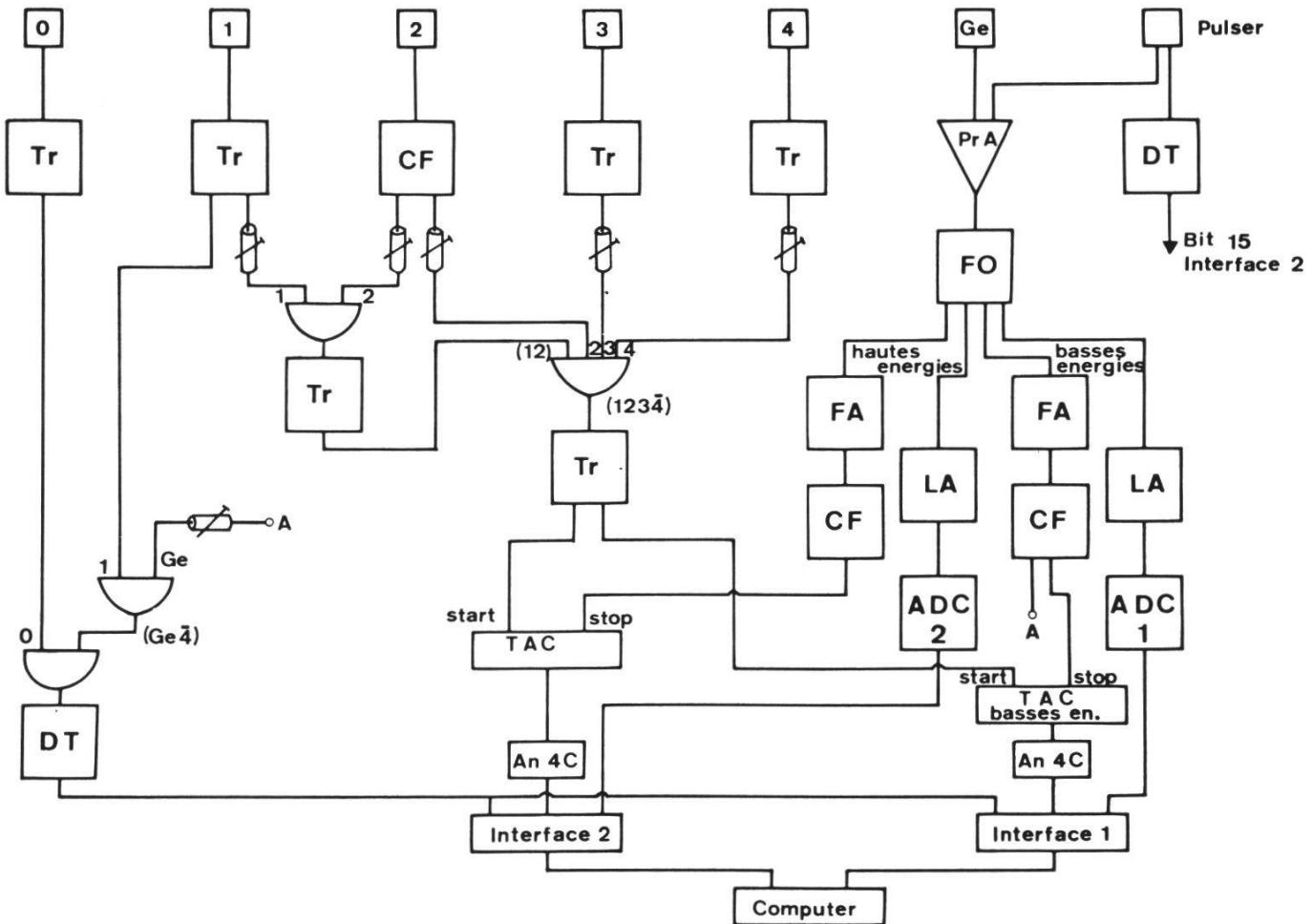
gegeben. Die R_k -Werte ermöglichen über die Definition der verallgemeinerten Momente Vergleiche mit Kernladungsverteilungen, welche mit Hilfe anderer Methoden wie etwa Elektronenstreuung bestimmt werden.

2.4. Korrekturen

Die Bindungsenergie des Myons wird nicht nur von der endlichen Ausdehnung der Kernladung beeinflußt. Um aus den gemessenen myonischen Übergangsenergien die Kernladungsverteilung bestimmen zu können, müssen noch weitere Effekte berücksichtigt werden. Die hauptsächlichsten Korrekturen sind Elektronenabschirmung (VOGEL, 1973), Kernanregung (BACKE et al., 1972), Kernpolarisation (NP), Vakuumpolarisation durch virtuelle Elektron-Positron-Paarbildung



Figur 1: Z Abhängigkeit der Bindungsenergie und der verschiedenen Korrekturen für den $1s_{1/2}$ und den $2p_{3/2}$ Zustand.



Figur 2: Blockschema der elektronischen Schaltung.

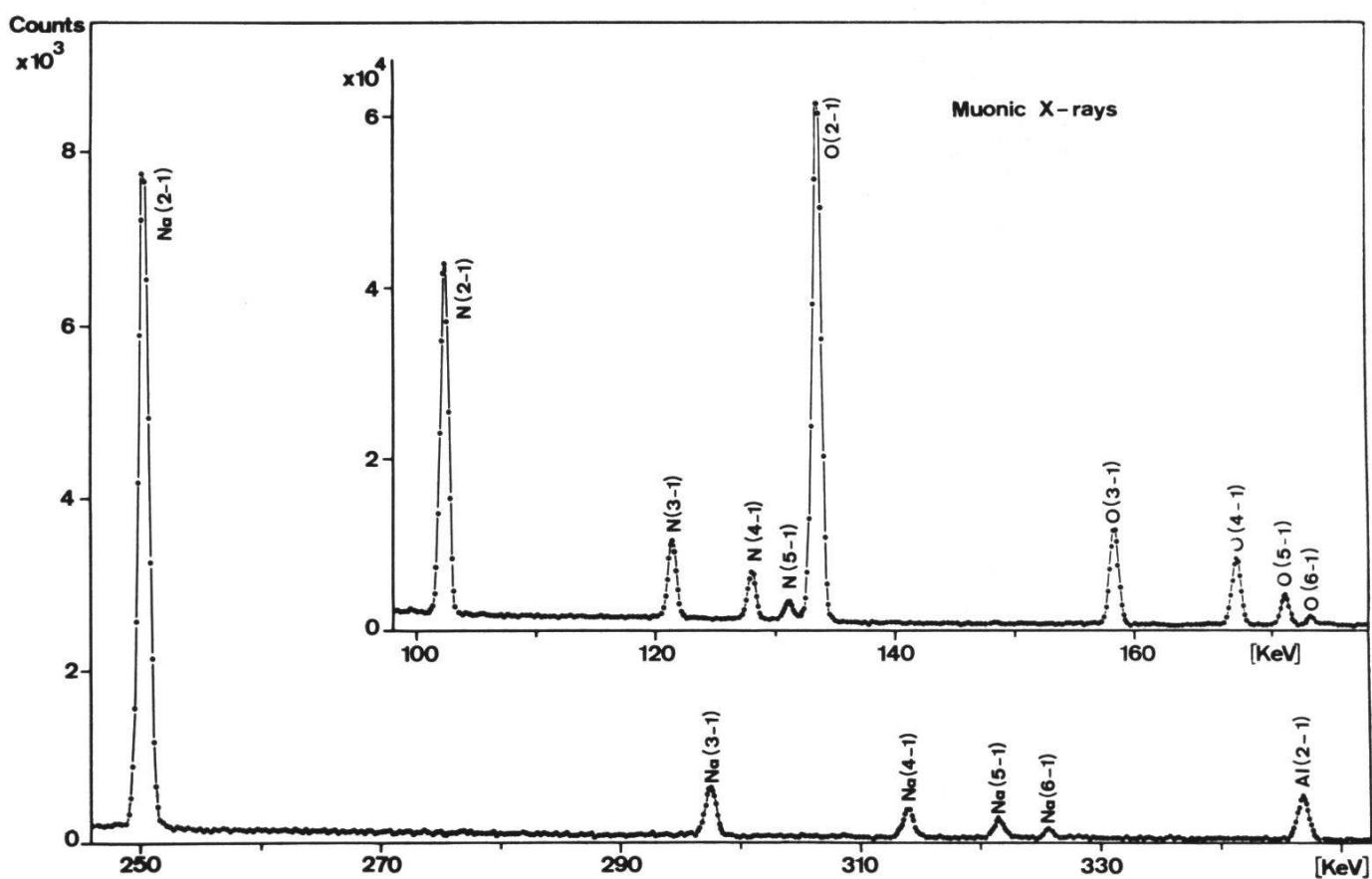
(VP1) und Lambshift (LS1, LS2). Der Test der Vakuumpolarisationskorrekturen höherer Ordnungen (VP2, VP3 etc.) ist von beträchtlichem Interesse, da Abweichungen zwischen Experiment und Theorie die Quantenelektrodynamik in Frage stellen könnten (WALTER et al., 1972).

Die meisten der hier erwähnten Korrekturen sind in Abhängigkeit der Ordnungszahl für die $1s_{1/2}$ und $2p_{3/2}$ Niveaus in Figur 1 aufgezeichnet. Ebenfalls dargestellt sind die Punktkernenergien (Pkt) und die Kernausdehnungskorrekturen (fs).

3. Messungen

Die Messungen an den leichten Kernen C, N und O und an ^{197}Au wurden am Myonenkanal des Synchrozyklotrons am CERN (DUBLER et al., 1974; ROBERT-TISSOT, 1975), die Experimente mit Na und S am supraleitenden Myonenkanal des Schweizerischen Instituts für

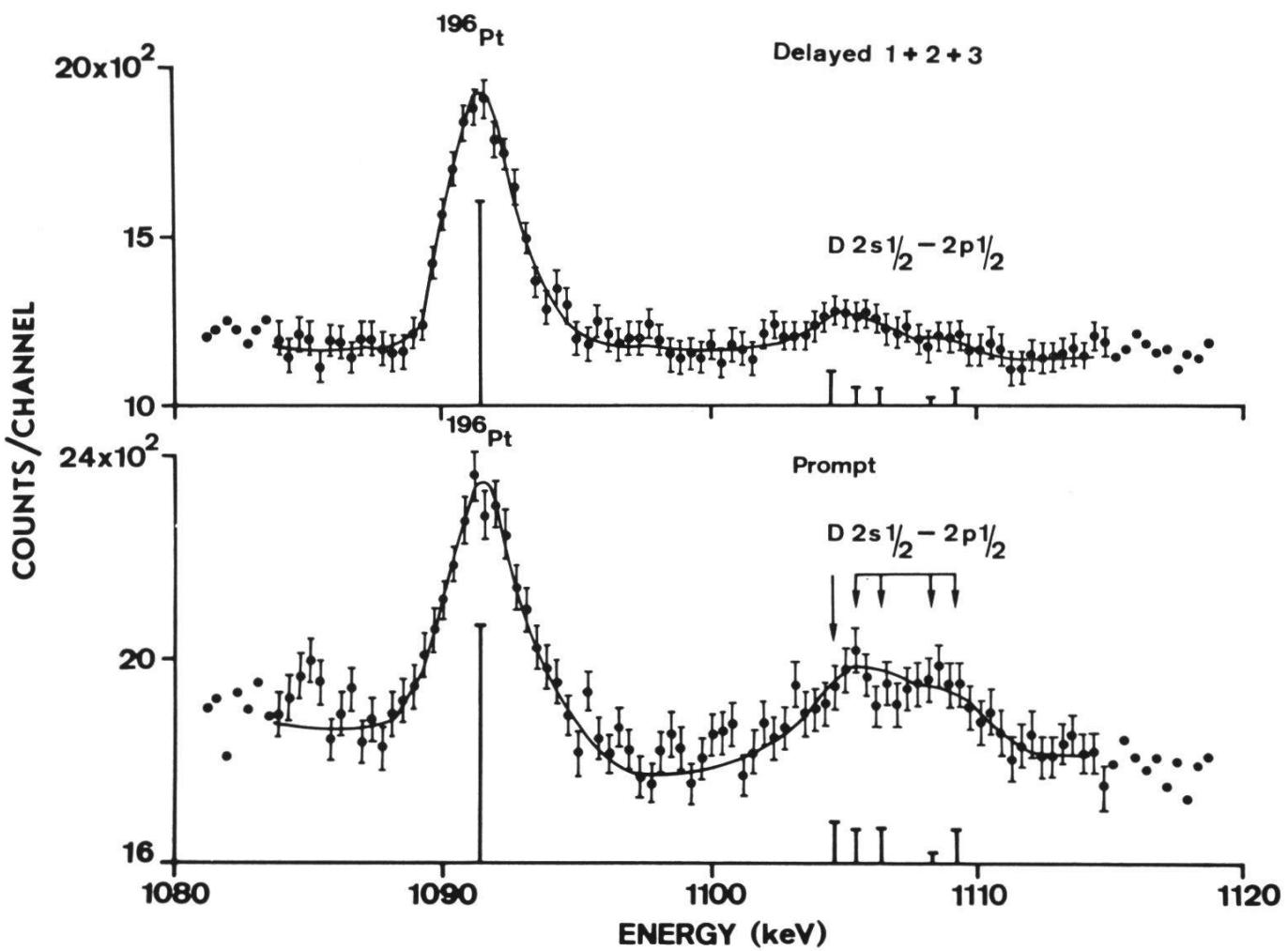
Nuklearforschung (SIN) in Villigen (SCHELLENBERG, 1970) durchgeführt. Figur 2 zeigt das Blockschema der elektronischen Schaltung. Das Target befindet sich zwischen den Szintillationszählern 3 und 4 des aus den vier Zählern 1, 2, 3 und 4 bestehenden Teleskops. Die einfallenden Myonen werden durch eine Koinzidenzbedingung zwischen den Signalen der Zähler 1, 2 und 3 nachgewiesen, die im Target gestoppten Myonen durch eine zusätzliche Antikoinzidenz mit dem Zähler 4. Die im Ge (Li)-Detektor registrierten Ereignisse werden in prompte und verzögerte Ereignisse aufgeteilt. Als «prompt» werden diejenigen Ereignisse betrachtet, welche innerhalb 20 – 30 ns nach dem 1234 – Stoppsignal eintreffen. Später registrierte Ereignisse sind dann meist Gammaquanten aus angeregten Tochterkernen, welche durch den Myoneneinfang im Targetkern entstehen (verzögerte γ -Quanten). Die Zeitinformation erfolgt durch einen Zeit-Amplituden-Wandler (TAC), welcher Zeitdifferenzen in Spannungsdifferenzen umwandelt. Mit einem 4-Kanal-Diskriminator können die gewünschten Zeitbereiche ausgewählt werden. Die Energiemessung der myonischen



Figur 3: Lyman Serien von myonischem Stickstoff, Sauerstoff und Natrium.

Röntgenstrahlung geschieht mit Hilfe eines 8192-Kanal-Impulshöhen-Analysators (ADC) nach einer linearen Verstärkung (LA) des Diodensignals. Neben den Targetereignissen werden in der Zeit, in der keine Myonensignale eintreffen, Eichereignisse gemessen. Dabei dient der im Pionenstrahl stehende Zähler 0 dazu, diesen Eichsignalen dieselbe vom Beschleuniger herrührende Zeitstruktur wie den Myonensignalen zu erteilen. Als Eichquellen wurden radioaktive γ -Präparate mit genau bekannten Energien benutzt, nämlich ^{16}N , ^{57}Co , ^{182}Ta , ^{192}Ir , ^{198}Au und ^{228}Th (DUBLER et al., 1974; ROBERT-TISSOT, 1975; HELMER et al., 1976).

Zeit- und Energieinformation wurden einander zugeordnet und in einer PDP 11/40 Rechenanlage verarbeitet. Gleichzeitig konnte mit



Figur 4: $(2s_{1/2} - 2p_{1/2})$ Übergang in myonischem Gold. Promptes und verzögertes Spektrum. Der Übergang weist infolge Quadrupolwechselwirkung eine Hyperfeinstruktur auf, die eingezeichnet ist.

diesem Computer der Ablauf des Experimentes überwacht werden. Die Ereignisse wurden auf Magnetbändern abgespeichert, welche dann auf der IBM 370/145 Rechenanlage in Fribourg weiter verarbeitet wurden.

Uebergang	C (keV)	N (keV)	O (keV)	Na (keV)	S (keV)
2p-1s	75.248 (.015)	102.406 (.015)	133.525 (.015)	250.238 (.040)	516.344 (.045)
3p-1s	89.212 (.015)	121.437 (.015)	158.408 (.015)	297.437 (.050)	
4p-1s	94.095 (.015)	128.091 (.015)	167.114 (.016)		
5p-1s	96.355 (.016)	131.167 (.017)	171.144 (.016)		

Tabelle 3: Experimentelle Übergangsenergien der Lymanserie.

Uebergang	E(exp.) keV	E(theor.) keV	k	R _k fm
3p _{3/2} -1s _{1/2}	8135.2 (1.0)	8135.38	2.376	6.9513 (.0014)
3d _{5/2} -1s _{1/2}	8105.4 (1.0)	8106.03	2.402	6.9536 (.0014)
3p _{1/2} -1s _{1/2}	8090.6 (1.0)	8091.42	2.376	6.9524 (.0017)
3d _{3/2} -1s _{1/2}	8069.4 (1.0)	8068.90	2.401	6.9521 (.0014)
2p _{3/2} -1s _{1/2}	5764.89 (.50)	5764.79	2.318	6.9468 (.0010)
2p _{1/2} -1s _{1/2}	5594.97 (.50)	5594.61	2.309	6.9465 (.0011)
3d _{3/2} -2p _{1/2}	2474.22 (.32)	2474.28	3.439	7.0185 (.0048)
3d _{5/2} -2p _{3/2}	2341.21 (.32)	2341.24	4.148	7.0684 (.0069)
3d _{3/2} -2p _{3/2}	2304.44 (.35)	2304.10	4.148	7.0640 (.0070)
3p _{3/2} -2s _{1/2}	1436.05 (.50)	1435.82	2.020	6.9226 (.0042)
3p _{1/2} -2s _{1/2}	1391.58 (.45)	1391.86	2.000	6.9266 (.0041)
2s _{1/2} -2p _{1/2}	1104.90 (.30)	1104.95	1.425	6.8802 (.0066)

Tabelle 4: Experimentelle Übergangsenergien in myonischem Gold und die daraus bestimmten äquivalenten Radien R_k. Die theoretischen Energien wurden mit einer Fermi-Ladungsverteilung berechnet.

Die verschiedenen Targets wiesen Dicken zwischen 1.5 und 5.8 g/cm² auf. Die Messungen am CERN wurden bei einem Protonenstrahl von 1 μ A und einer Myonenstopprate von rund 5000 Stopps/s durchgeführt. Mit dem neuen SIN-Beschleuniger stand ein wesentlich höherer Strom zur Verfügung, nämlich 10–15 μ A, und mit dem supraleitenden Myonenkanal eine 100mal größere Stopprate. In den Figuren 3 und 4 sind Ausschnitte aus gemessenen Spektren dargestellt. Figur 3 zeigt die K-Serien von myonischem Stickstoff, Sauerstoff und Natrium. Figur 4 enthält den zwar schwachen, aber für die Kernradiusbestimmung besonders interessanten $2s_{1/2}$ – $2p_{1/2}$ Übergang in ^{197}Au . Ebenfalls ersichtlich sind zwei verzögerte γ -Linien, wovon die stärkere dem ^{196}Pt -Tochterkern zugeordnet werden kann.

Die aus den Messungen erhaltenen Übergangsenergien sind in den Tabellen 3 und 4 zusammengefaßt. Die angegebenen Unsicherheiten setzen sich aus statistischen Fehlern und aus der Unsicherheit der verwendeten Eichlinien zusammen.

4. Auswertung

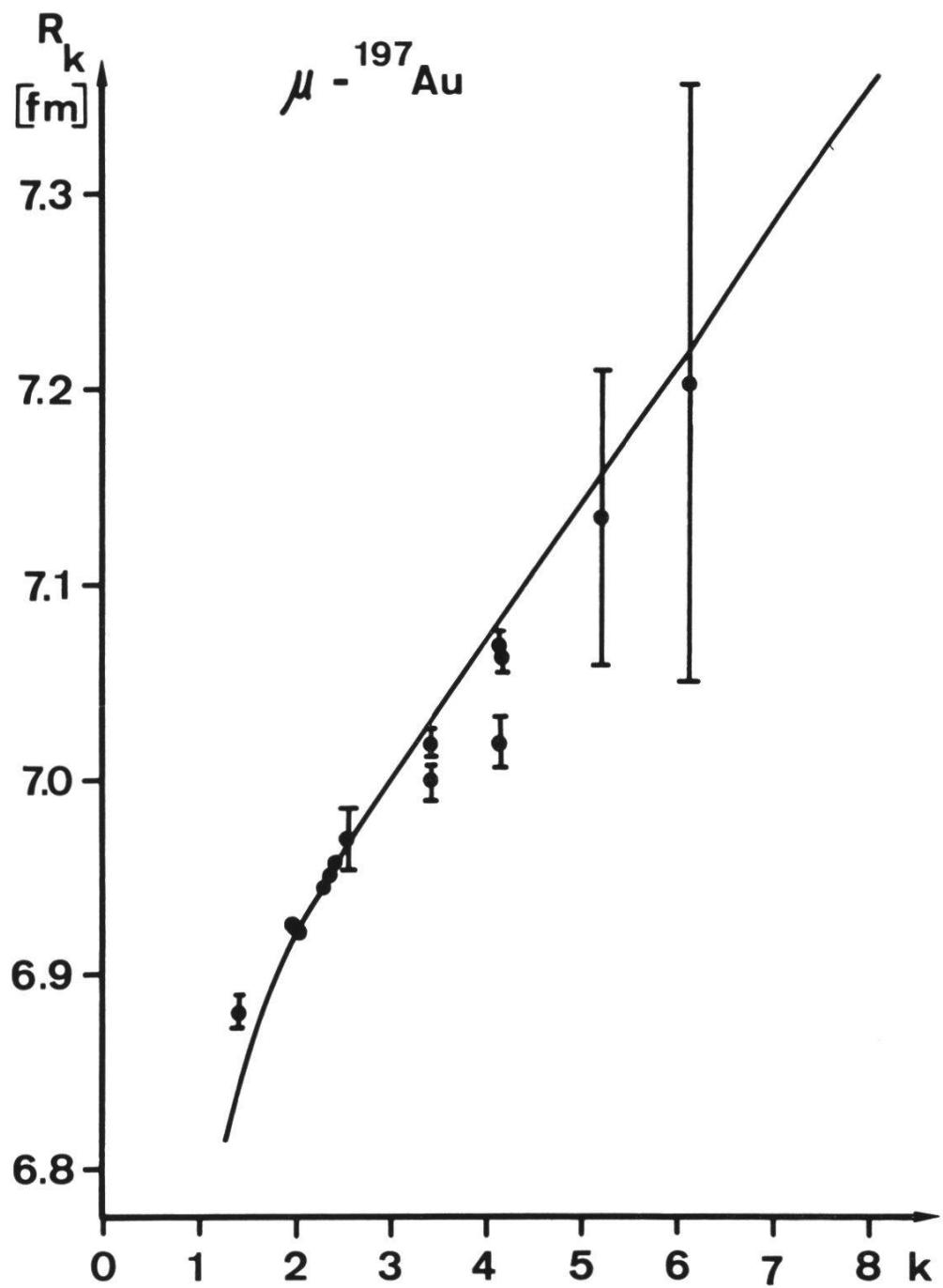
Zur Bestimmung der Kernladungsradien wurden die myonischen Energieniveaus numerisch unter Einschluß der Vakuumpolarisation erster Ordnung berechnet. Dabei wurden die Parameter der gewählten Modell-Ladungsverteilung an die experimentellen myonischen Übergangsenergien angepaßt. Die in Abschnitt 2.4 erwähnten übrigen Korrekturen wurden durch Störungsrechnung oder andere Näherungen bestimmt und sind in Tabelle 5 für die drei (2p-1s)-Übergänge in μ^- -C, μ^- -S und μ^- -Au aufgeführt. Die größte Unsicherheit weist die Berechnung der Kernpolarisation auf. Für die von uns übernommenen Werte von COLE (1969) muß ein Fehler von 50 % angenommen werden. Im Fall schwerer Kerne kann die Kernpolarisation experimentell bestimmt werden (ROBERT-TISSOT, 1975). Auch die Lambshift ist infolge der Unsicherheiten in den Annahmen bei der Berechnung des Bethe-Logarithmus mit einem Fehler von rund 30 % behaftet.

Für die leichten Kerne C, N und O wurde für die Ladungsverteilung die Schalenmodellverteilung angenommen, wie sie bei der Analyse der Elektronenstreudaten mehrheitlich benutzt wird. Die anderen Kerne wurden mit einer zweiparametrischen Fermi-Verteilung analysiert. Im Fall von Gold wurden 12 auf die Ladungsverteilung verschieden

empfindliche Übergänge ausgewertet, die in Tabelle 4 angegeben sind. Die Analyse wird komplex, da die Übergänge infolge statischer und dynamischer Quadrupolwechselwirkung eine zusätzliche Hyperfeinstruktur aufweisen (ROBERT-TISSOT, 1975) (siehe auch Fig. 4). Mit der in Abschnitt 2.2 beschriebenen Methode wurden die beiden Parameter c und t der Fermi-Verteilung bestimmt. Die mit diesen Werten ($c = 6.599 \pm 0.007$ fm, $t = 2.163 \pm 0.022$ fm) berechneten Energien sind in Tabelle 4 ebenfalls aufgeführt. Ein Vergleich der experimentellen und theoretischen Energien zeigt für alle Übergänge eine gute Übereinstimmung. Die aus der modellunabhängigen Analyse (siehe Abschnitt 2.3) bestimmten verallgemeinerten Momente ergeben die in der Tabelle 4 angegebenen äquivalenten Radien R_k . Die k -Werte wurden dabei der Arbeit von ENGFER et al., (1974) entnommen. In Figur 5 sind die tabellierten R_k -Werte in Abhängigkeit von k einge tragen. Die ausgezogene Kurve gibt den Verlauf von R_k für die verwendete Modell-Ladungsverteilung (Fermi-Verteilung).

	C (eV)	S (eV)	Au (eV)
Vac. Pol. 1. Ord.	371.4	3799	34387
Vac. Pol. 2,3,5 Ord.	2.6	24	- 75
Lambshift	- 5.4	-128	-2620
Relat.red. Masse	0.4	17	108
Kernpolarisation	3.6	90	3625
Electron Screening	- 0.1	-0.1	- 7

Tabelle 5: Korrekturen höherer Ordnung für den (2p – 1s) Übergang in Kohlenstoff und Schwefel. Für Gold sind die Werte für den myonischen- $2p_{1/2} - 1s_{1/2}$ Übergang angegeben.



Figur 5: R_k Werte von Gold in Abhängigkeit von k für die in Tabelle 4 angegebenen Übergänge. Die eingezeichnete Kurve gibt den Verlauf von R_k für die verwendete Modellverteilung wieder.

Die Ergebnisse der Analyse der untersuchten Kerne sind in Tabelle 6 zusammengestellt. Im oberen Teil sind die mittleren quadratischen Radien $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ und die äquivalenten Radien R_2 angegeben. Im mittleren Teil sind die modellunabhängigen äquivalenten Radien R_k für die (2p-1s)-Übergänge aufgeführt.

5. Schlußfolgerungen

Der Vergleich unserer myonischen Resultate für die mittleren Kernladungsradien mit den Ergebnissen aus der Elektronenstreuung (JÄGER et al., 1974) zeigt für alle sechs Kerne gute Übereinstimmung (siehe Tabelle 6). Da die beiden Leptonen, Elektron und Myon, nur elektromagnetisch mit dem Kern wechselwirken – abgesehen von der schwachen Wechselwirkung beim Kerneinfang – wird eine solche Übereinstimmung auch erwartet. Eine signifikante Differenz würde bedeuten, daß Elektronen und Myonen z. B. unterschiedliche Ausdehnung besäßen oder eine verschiedene Wechselwirkung mit dem Kern aufwiesen (BARSHAY, 1973).

	C	N	O	Na	S	Au
$\langle r^2 \rangle^{1/2}$ [fm]	2.49 (5)	2.55 (3)	2.71 (2)	2.94 (6)	3.26 (2)	5.429 (3)
R_2 [fm]	3.21 (6)	3.29 (4)	3.49 (2)	3.79 (7)	4.21 (3)	7.009 (4)
k $a [fm^{-1}]$	2.113 .046	2.112 .047	2.112 .048	2.112 .052	2.111 .059	2.376 .149
R_k [fm]	3.22 (6)	3.28 (4)	3.48 (2)	3.84 (1)	4.19 (1)	6.952 (1)
$\langle r^2 \rangle^{1/2}$ [fm] (e,e)	2.468 (16)	2.540 (20)	2.718 (21)	2.94 (6)	3.250 (15)	5.33 (5)

Tabelle 6: Mittlere quadratische Radien und äquivalente Radien der gemessenen Kerne. In der letzten Zeile sind zum Vergleich die aus Elektronenstreuung bestimmten mittleren quadratischen Radien angegeben.

Da die Elektronen bei der Elektronenstreuung und die Myonen in myonischen Atomen auf verschiedene Momente der Kernladungsverteilung empfindlich sind, ergeben die beiden Methoden komplementäre Information über den Ladungsradius. Aus den myonischen Daten erhält man die kleineren Momente mit großer Genauigkeit, während die Form der Ladungsverteilung detaillierter aus hochenergetischen Elektronenstreudaten ermittelt werden kann. Eine kombinierte Analyse von (e,e)-Streudaten verschiedener Energie und myonischer Daten erlaubt eine genauere modellunabhängige Bestimmung der Kernladungsverteilung (SICK, 1974).

Die Experimente am CERN wurden im Rahmen der Berlin – Darmstadt – Fribourg – ETH-Zürich – Zusammenarbeit durchgeführt. Unseren Kollegen danken wir an dieser Stelle für ihre Mitarbeit.

Zusammenfassung

Die Energien der myonischen K-Röntgenstrahlung in Kohlenstoff, Stickstoff, Sauerstoff, Natrium und Schwefel wurden mit einer Genauigkeit zwischen 15 und 50 eV bestimmt. Auch wurden diejenigen Übergänge gemessen, welche die 1s, 2s und 2p Zustände in myonischem Gold bevölkern. Unter Benutzung des Schalenmodells und Fermimodells wurden die mittleren quadratischen Kernladungsradien evaluiert. Die gewonnenen Resultate sind die folgenden: 2.49 ± 0.05 fm für C, 2.55 ± 0.03 fm für N, 2.71 ± 0.02 fm für O, 2.94 ± 0.06 fm für Na, 3.26 ± 0.02 fm für S und 5.429 ± 0.003 fm für Au. Im weiteren wird eine modellunabhängige Analyse der verallgemeinerten Momente der Ladungsverteilungen präsentiert. In allen sechs Fällen erhält man eine gute Übereinstimmung mit den Elektronenstreudaten. Die Genauigkeit unserer myonischen Resultate ist für die leichteren Kerne vergleichbar mit den (e,e)-Streudaten, für die schwereren Kerne größer.

Summary

Energies of muonic X-rays of the K-series of carbon, nitrogen, oxygen, sodium and sulphur have been measured with an accuracy between 15 and 50 eV. Also, several transitions to the 1s, 2s and 2p states of muonic gold have been determined. Root mean square radii of the nuclear charge distributions were deduced, using the harmonic oscillator shell model as well as the Fermi model. The results are 2.49 ± 0.05 fm for C, 2.55 ± 0.03 fm for N, 2.71 ± 0.02 fm for O, 2.94 ± 0.06 fm for Na, 3.26 ± 0.02 fm for S and 5.429 ± 0.003 fm for Au. A nearly model independent analysis is presented, too, yielding the

k^{th} moments of the respective charge distributions. In all six cases, there is good agreement with recent electron scattering data. The accuracy of our muonic results is comparable to the (e,e)-data for the lighter nuclei and higher for the heavier ones.

Résumé

Les énergies de transitions muoniques de la série K du carbone, azote, oxygène, sodium et soufre ont été mesurés à une précision de 15 à 50 eV. On a également déterminé les énergies de transitions impliquant les niveaux 1s, 2s et 2p de l'atome muonique d'or. Le rayon moyen de la distribution de charge a été déduit, utilisant le modèle en couche (oscillateur harmonique) ainsi que le modèle de Fermi. Les résultats sont 2.49 ± 0.05 fm pour C, 2.55 ± 0.03 fm pour N, 2.71 ± 0.02 fm pour O, 2.94 ± 0.06 fm pour Na, 3.26 ± 0.02 fm pour S et 5.429 ± 0.003 fm pour Au. De plus il est présenté une analyse des moments généralisés indépendante du modèle. Dans les six cas on découvre une concordance avec les résultats obtenus par diffusion d'électrons. La précision atteinte par atomes muoniques, comparable aux résultats obtenus par diffusion d'électrons pour les noyaux légers, devient plus grande pour les noyaux lourds.

Referenzen

- BACKE, H., ENGFER, R., JAHNKE, U., KANKELEIT, E., PEARCE, R. M., PETITJEAN, C., SCHELLENBERG, L., SCHNEUWLY, H., SCHROEDER, W. U., WALTER, H. K., and ZEHNDER, A.: Study of X-rays and nuclear γ -rays in muonic thallium. Nucl. Phys. *A189*, 472–512 (1972).
- BACKE, H., ENGFER, R., KANKELEIT, E., LINK, R., MICHAELSEN, R., PETITJEAN, C., SCHELLENBERG, L., SCHNEUWLY, H., SCHROEDER, W. U., VUILLEUMIER, J. L., WALTER, H. K., and ZEHNDER, A.: Nuclear excitation and isomer shifts in muonic atoms. Nucl. Phys. *A234*, 469–503 (1974).
- BARRETT, R.C.: Model independent parameters of the nuclear charge distribution from muonic X-rays. Phys. Lett. *33B*, 388–390 (1970).
- BARSHAY, S.: Possible difference between the muon- and electron-nuclear interactions. Phys. Rev. *D7*, 2635–2636 (1973).
- COLE, R. K., Jr.: Nuclear polarization corrections to the levels of muonic atoms. Phys. Rev. *177*, 164–176 (1969).
- DE JAGER, C. W., DE VRIES, H., and DE VRIES, C.: Nuclear charge- and magnetization-density-distribution parameters from elastic electron scattering. Nucl. Data Tables *14*, 479–507 (1974).
- DEY, W., EBERSOLD, P., LEISI, H. J., SCHECK, F., BOEHM, F., ENGFER, R., LINK, R., MICHAELSEN, R., ROBERT-TISSOT, B., SCHELLENBERG, L., SCHNEUWLY, H., SCHROEDER, W. U., VUILLEUMIER, J. L., WALTER, H. K., and ZEHNDER, A.: Nuclear spectroscopic quadrupole moments of ^{175}Lu and ^{235}U : A new approach. J. Phys. Soc. Japan *34*, 582–583 (1973, Suppl.).

- DUBLER, T., SCHELLENBERG, L., SCHNEUWLY, H., ENGFER, R., VUILLEUMIER, J. L., WALTER, H. K., ZEHNDER, A., and FRICKE, B.: Nuclear charge radii from X-ray transitions in muonic atoms of carbon, nitrogen and oxygen. *Nucl. Phys.* **A219**, 29–38 (1974).
- DUBLER, T., ENGFER, R., HARTMANN, F. J., KAESER, K., LINDT, W., ROBERT-TISSOT, B., SCHALLER, L. A., SCHELLENBERG, L., und SCHNEUWLY, H.: Messungen von Schwefelverbindungen am Myonenkanal des SIN. *Helv. Phys. Acta* **48**, 519–520 (1975).
- ENGFER, R., SCHNEUWLY, H., VUILLEUMIER, J. L., WALTER, H. K., and ZEHNDER, A.: Charge-distribution parameters, isotope-shifts, isomer-shifts and magnetic hyperfine constants from muonic atoms. *Nucl. Data Tables* **14**, 509–598 (1974).
- ENGFER, R., WALTER, H. K., and SCHNEUWLY, H.: Study of nuclear properties with muonic atoms. *Fizika Elementarnykh Chastits i Atomnogo Yadra, Dubna USSR* **5**, 382–418 (1974).
- FITCH, V. L., and RAINWATER, J.: Studies of X-rays from mu-mesonic atoms. *Phys. Rev.* **92**, 789–800 (1953).
- FORD, K. W., and WILLS, J. G.: Muonic atoms and the radial shape of the nuclear charge distribution. *Phys. Rev.* **185**, 1429–1438 (1969).
- HELMER, R. G., GREENWOOD, R. C., and GEHRKE, R. J.: Reevaluation of precise gamma-ray-energies for calibration of Ge(Li)-spectrometers. *Nucl. Instr. Meths.*, im Druck.
- HILL, D. L., and FORD, K. W.: Mu-mesonic X-rays and the shape of the nuclear charge distribution. *Phys. Rev.* **94**, 1617–1629 (1954).
- HUBER, O., LIENHARD, O., SCHERRER, P., and WAEFFLER, H.: Kernphotoeffekt mit der Lithium-Gammastrahlung. *Helv. Phys. Acta* **15**, 312–314 (1942).
- HUBER, O., LIENHARD, O., SCHERRER, P., und WAEFFLER, H.: Kernphotoeffekt unter Aufspaltung eines Protons: $^{26}\text{Mg}(\gamma, p)^{25}\text{Na}$. *Helv. Phys. Acta* **16**, 431–432 (1943).
- HUBER, O., MARMIER, P., MEDICUS, H., PREISWERK, P., and STEFFEN, R.: A new isomer of element 43 (Tc) of very small excitation energy. *Phys. Rev.* **73**, 1208–1209 (1948).
- HUBER, O., RUETSCHI, R., und SCHERRER, P.: K-Einfang und Positronenemission von ^{61}Cu und ^{64}Cu . *Helv. Phys. Acta* **22**, 375–378 (1949).
- HUBER, O., HUMBEL, F., SCHNEIDER, H., und DE-SHALIT, A.: Zerfall der Quecksilber-Isomere ^{197}Hg . *Helv. Phys. Acta* **24**, 127–152 (1951).
- HUBER, O., HUMBEL, F., SCHNEIDER, H., und DE-SHALIT, A.: Spektrometrische Messung von $\beta\beta$ -Koinzidenzen. *Helv. Phys. Acta* **25**, 3–34 (1952).
- HUBER, O., JOLY, R., SCHERRER, P., und VERSTER, N. F.: Ein 30 sec Isomer ^{195}Au . *Helv. Phys. Acta* **25**, 621–624 (1952).
- HUEFNER, J., and SCHECK, F.: Muonic atoms, in «Muon physics», Vol. 1, ed. HUGHES, V. W., and WU, C. S. Academic Press: New York 1976.
- PONOMAREV, L. I.: Molecular structure effects on atomic and nuclear capture of mesons. *Annu. Rev. Nucl. Sci.* **23**, 395–431 (1973).

- ROBERT-TISSOT, B.: Analyse de transitions muoniques dans l'atome d' ^{197}Au . Thèse No. 743, Institut de Physique, Université de Fribourg (1975).
- ROSE, E. M.: Relativistic electron theory. J. Wiley: New York 1961.
- RUTHERFORD, E.: The scattering of alpha and beta particles by matter and the structure of the atom. Phil. Mag. 21, 669–688 (1911).
- SCHALLER, L. A.: Schweren Elektronen und leichten Protonen im Dienst der Naturwissenschaften und der Medizin. Bull. Soc. Frib. Sc. Nat. 62, 47–52 (1973).
- SCHELLENBERG, L.: Das schweizerische Kernforschungszentrum Villigen (SIN). Bull. Soc. Frib. Sc. Nat. 59, 95–98 (1970).
- SCHNEUWLY, H., SCHELLENBERG, L., BACKE, H., ENGFER, R., JAHNKE, U., LINDENBERGER, K. H., PEARCE, R. M., PETITJEAN, C., SCHROEDER, W. U., WALTER, H. K., and ZEHNDER, A.: Observation of electric quadrupole X-ray transitions in Muonic Thallium, Lead and Bismuth. Nucl. Phys. A196, 452–464 (1972).
- SICK, I.: Model independent nuclear charge densities from elastic electron scattering. Nucl. Phys. A218, 509–541 (1974).
- UEBERALL, H.: Electron scattering from complex nuclei. Academic Press: London 1971.
- VOGEL, P.: Electron screening in muonic atoms. Phys. Rev. A7, 63–69 (1973).
- WALTER, H. K., BACKE, H., ENGFER, R., KANKELEIT, E., PETITJEAN, C., SCHNEUWLY, H., and SCHROEDER, W. U.: Muonic isomer shifts in ^{153}Eu ; a reevaluation of Mössbauer isomer shifts in rare earths. Phys. Lett. 38B, 64–66 (1972).
- WALTER, H. K., VUILLEMIEZ, J. L., BACKE, H., BOEHM, F., ENGFER, R., VON GUNTEN, A. H., LINK, R., MICHAELSEN, R., PETITJEAN, C., SCHELLENBERG, L., SCHNEUWLY, H., SCHROEDER, W. U., and ZEHNDER, A.: Test of quantum-electrodynamical corrections in muonic atoms. Phys. Lett. 40B, 197–199 (1972).
- WHEELER, J. A.: Mechanism of capture of slow mesons. Phys. Rev. 71, 320–321 (1947).
- WU, C. S., and WILETS, L.: Muonic atoms and nuclear structure Annu. Rev. Nucl. Sci. 19, 527–606 (1969).