

**Zeitschrift:** Bulletin de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles = Bulletin der Naturforschenden Gesellschaft Freiburg  
**Herausgeber:** Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles  
**Band:** 33 (1934-1936)

**Vereinsnachrichten:** Procès-verbaux des séances 1934 - 1935

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Procès-verbaux des séances

1934 — 1935

---

## Séance du 6 décembre 1934.

Présidence de M. le prof. Dr S. Bays, président.

Rapport annuel du Président (avec petit résumé historique sur l'organisation des conférences à la Grenette) voir page 3.

---

## Séance du 20 décembre 1934.

Présidence de M. le prof. Dr S. Bays, président.

1. **Prof. P. Girardin:** *Inondations dans la plaine du Pô.*
2. **Prof. L. Weber:** *Demonstration einiger Mineral-Schaustufen.*

Les auteurs n'ont pas fourni de manuscrit.

---

## Séance du 17 janvier 1935.

Présidence de M. le prof. Dr S. Bays, président.

**Dr J. Kopp**, géologue, Ebikon (Lucerne): *Petrolgeologische Expeditionen in Sumatra mit Mitteilungen über die Petrolfrage in der Schweiz unter besonderer Berücksichtigung des Kantons Freiburg.*

Le conférencier fait le récit de ses expéditions dans la forêt vierge de Sumatra à la recherche du pétrole pour une grande compagnie pétrolifère. A l'aide de projections de première qualité, parfois en couleur, il donne une idée très précise de la vie de géologue, à la tête d'une expédition d'une centaine d'indigènes, qui est hérissée de difficultés de toutes sortes et de dangers multiples.

Dans la seconde partie de sa conférence, il traite la question de la recherche du pétrole en Suisse. Les travaux les plus impor-

tants sur cette question sont ceux de M. le professeur R. de Girard : « Les gîtes d'hydrocarbures de la Suisse occidentale » et de M. le professeur Arnold Heim : « Untersuchungen über die petroolführende Molasse der Schweiz ».

Les conclusions de ces travaux désignent la zone subjurassienne, la zone subalpine de la molasse et la zone de flysch comme régions probablement pétrolifères. Dans la zone subjurassienne de la molasse on connaît des *traces de pétrole* à maints endroits, entre Genève et Aarau, tandis qu'au bord des Alpes elles manquent presque entièrement. Par contre, on connaît dans cette dernière zone des *émanations de gaz naturels* sur différents points qui sont peut-être en relation avec le pétrole. L'endroit le plus connu se trouve au Ricken (St-Gall). Des traces de pétrole et de gaz naturel, bien plus fréquentes qu'au bord des Alpes suisses, sont connues au bord des Alpes autrichiennes qui présentent des rochers semblables à ceux de la Suisse.

M. le Dr Arnold Heim, depuis des années, a attiré notre attention sur le fait qu'il n'est pas exclu « de trouver un jour, dans la zone de molasse subalpine de grandes quantités de gaz naturel et peut être aussi du pétrole qui l'accompagne ». Depuis ce moment, un forage important a été exécuté à Tuggen, dans la plaine de la Linth. Ce forage n'a pas traversé des couches productives, mais il a fourni des traces de gaz naturel et de pétrole. Il faut cependant faire une constatation qui est d'une certaine importance. Les travaux préliminaires et l'exécution du forage ont été jugés insuffisants par les spécialistes. On ne peut donc affirmer que, dans la région de la molasse subalpine, le pétrole ne se trouve pas en quantité suffisante pour la production. Pour exploiter une région pétrolifère, il faut souvent une série de forages ; les succès obtenus dans la région pétrolifère autrichienne de Zistersdorf le démontrent d'une manière éclatante.

Dans la région subjurassienne on a fait quelques forages peu profonds à des endroits peu favorables, par exemple à Chavornay (Vaud). Etant donné que la tectonique de cette région montre des dispositions favorables pour l'accumulation du pétrole, comme le démontrent les recherches récentes du conférencier, il faudrait d'abord faire des sondages dans cette zone.

Le conférencier a fait, avec l'aide financière de la Confédération et du canton de Lucerne, des recherches dans la zone subjurassienne, avec l'aide de jeunes gens sans travail, entre Aarau et le lac de Neuchâtel. Il a réussi à mieux préciser la tectonique de cette région et à déterminer les anticlinaux qui sont intéressants au point de vue pétrolifère. Les points de forage proposés par Arnold Heim ont été revisés et l'on s'est rendu compte qu'on peut trouver des endroits encore plus favorables.

Il faudrait compléter les travaux géologiques par des méthodes de géophysique. — Dans ces travaux on n'a pas trouvé trace de pétrole, sauf près de Murgenthal et de Fülenbach, mais il paraît probable que le pétrole se trouve aussi dans le Seeland bernois, car nous trouvons de nouveau du pétrole et des traces de gaz naturel plus à l'ouest, près d'Yverdon, où les failles ont permis aux gaz de s'échapper.

Le manque de traces de pétrole dans le Seeland peut s'expliquer par le manque de failles et de cassures, ou par la présence de couches de marnes imperméables. Les gisements pétrolifères de la molasse aquitanienne doivent se trouver à une profondeur d'environ 500 mètres.

Dans notre canton, la région intéressante se trouve le long du premier anticlinal de la molasse, de Rue à Thusy, dont l'étude tectonique a été commencée par le Dr O. Büchi sur les propositions du prof. R. de Girard. Pour fixer un point favorable pour le forage, il est indispensable de continuer ces études avec des méthodes perfectionnées, de la même manière que dans le Seeland bernois. Il serait à souhaiter que ces recherches pussent bientôt être entreprises.

Selon l'opinion du prof. Arnold Heim et du conférencier, il n'y a pas moins de chance de rencontrer des gisements pétrolifères dans le canton de Fribourg que dans le canton de Vaud. Avec l'appui du gouvernement et en obtenant des conditions avantageuses de la part des concessionnaires, il paraît probable que ces travaux de recherches puissent se faire sans charge financière pour le canton.

La recherche du pétrole en Suisse est un devoir national. Le conférencier a proposé aux autorités fédérales d'instituer une commission suisse du pétrole, proposition qui a été acceptée, et qui sera probablement réalisée sous peu.



De même les commissions scientifiques de la Société helvétique des sciences naturelles ont inscrit la recherche du pétrole dans leur programme. Espérons qu'avec tous ces efforts réunis on réussira à trouver en Suisse des gisements de pétrole qui valent la peine d'être exploités.

---

### Séance du 7 février 1935.

Présidence de M. le prof. Dr S. Bays, président.

**Prof. P. Girardin:** *Calendrier égyptien et calendrier julien.*

L'auteur n'a pas fourni de manuscrit.

---

### Séance du 28 février 1935.

Présidence de M. le prof. Dr S. Bays, président.

**Prof. S. Bays:** *Sur la réponse de Frénicle à un défi de Fermat.*

§ 1. Le 3 janvier 1657, Fermat, dans une lettre en latin, adressée à Claudius Martinus Laurenderius proposait aux mathématiciens français, anglais, et hollandais, sans exclure ceux des autres pays de l'Europe, les deux problèmes suivants:

I. *Trouver un cube qui, ajouté à la somme de ses parties aliquotes, fasse un carré. Par exemple,  $343 = 7^3$ . Les parties aliquotes de ce nombre sont 1, 7, 49 ; si l'on ajoute 343 à leur somme, on a  $400 = 20^2$ . On demande un autre cube ayant la même propriété.*

II. *On demande aussi un nombre carré qui, ajouté à la somme de ses parties aliquotes, fasse un cube.*

Gino Loria <sup>1</sup>, dans un article paru dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. LIV, août 1930, et qui a trait principalement au mémoire de Frénicle contenant la réponse de ce dernier au défi de Fermat, se demande par quelle voie Fermat a pu être conduit à ces énoncés. Il émet l'hypothèse suivante qui est sans doute la

---

<sup>1</sup> Professeur de mathématiques à l'Université de Gênes.

plus vraisemblable. Si le nombre entier  $N$  décomposé en ses facteurs premiers est :

$$N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots,$$

tout diviseur de  $N$  est de la forme  $a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} \dots$  où

$$0 \leq \alpha' \leq \alpha, \quad 0 \leq \beta' \leq \beta, \quad 0 \leq \gamma' \leq \gamma, \dots$$

La somme de ces diviseurs est donc donnée par le produit :

$$S = (1 + a + a^2 + \dots + a^\alpha) (1 + b + b^2 + \dots + b^\beta) (1 + c + c^2 + \dots + c^\gamma) \dots$$

Or, on sait que Fermat fit sur les progressions géométriques des recherches importantes. Rien ne s'oppose à ce qu'il ait calculé les sommes entre parenthèses et trouvé l'expression :

$$S = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \cdot \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \cdot \frac{c^{\gamma+1} - 1}{c - 1} \dots \quad (1)$$

Sous cette forme, les énoncés de Fermat équivalent maintenant à déterminer les nombres premiers  $a, b, c, \dots$  et les exposants  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  de manière que dans le premier,  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  soient des multiples de 3 et  $S$  soit un carré, dans le second,  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  soient des entiers pairs et  $S$  soit un cube.

Ce sont des questions d'analyse indéterminée qui encore aujourd'hui offrent des difficultés que l'on peut dire énormes. Mais sans doute Fermat aura cherché à tâtons une solution du premier énoncé, dans le cas le plus simple, celui où  $N$  n'a qu'un facteur premier  $a$ ,  $N = a^\alpha$ , et où  $S$  est simplement :

$$S = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1}.$$

Après quelques essais Fermat sera tombé sur le nombre  $N = 7^3$  qui donne :

$$S = \frac{7^4 - 1}{7 - 1} = 7^3 + 7^2 + 7 + 1 = (7^2 + 1) (7 + 1) = 50.8 = 20^2.$$

Remarquons encore sous cette forme une propriété caractéristique des solutions de ces problèmes. Si  $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$  et  $N_1 = a_1^{\alpha_1} b_1^{\beta_1} c_1^{\gamma_1} \dots$  sont deux solutions *sans facteurs premiers communs*, du premier, par exemple, leur produit  $NN_1$  est encore une solution du problème. En effet, pour ce produit  $NN_1$ , la somme des diviseurs est :

$$SS_1 = \frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \cdot \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \cdot \frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1} \cdots \frac{a_1^{\alpha_1+1}-1}{a_1-1} \cdot \frac{b_1^{\beta_1+1}-1}{b_1-1} \cdot \frac{c_1^{\gamma_1+1}-1}{c_1-1} \cdots;$$

elle est encore un carré, S et S<sub>1</sub> étant séparément des carrés.

§ 2. Frénicle de Bessy, dont on connaît l'extraordinaire habileté arithmétique découvrit rapidement deux nombres qui satisfont au premier problème de Fermat et un qui satisfait au second. On les trouve dans une lettre de Huygens du 28 février 1658, mais on savait que la réponse de Frénicle avait été imprimée dans un placard publié en 1657. Cet opuscule était considéré comme perdu; les éditeurs des œuvres de Fermat en 1894 le déclarèrent introuvable Moritz Cantor, en 1900, dans ses *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* était du même avis, tout en indiquant ce qui devait en être les initiales bibliographiques: D.B.F.D.B.<sup>1</sup>.

Paul Boutroux, aidé peut-être par la donnée de Cantor, en découvrit un exemplaire en 1921 à la Bibliothèque Nationale de Paris. Un second exemplaire fut trouvé ensuite à la Bibliothèque de Clermont-Ferrand, parmi plusieurs opuscules ayant appartenu à Blaise Pascal. Enfin un troisième exemplaire a été encore découvert à la Bibliothèque Nationale de Paris; ce dernier contient cinq pages d'additions aux trente pages du petit volume original. C'est ce document qu'étudie Gino Loria dans l'article du *Bulletin des Sciences mathématiques* auquel je me réfère.

Le morceau principal de l'opuscule en question est le suivant; j'en donne avec Gino Loria la traduction française:

« *Quadruple solution du premier problème donnée à Paris le 20 février 1657 par le noble Parisien D.B.F.D.B. :*

*Premier cube : d'un nombre pair.*

Le nombre 424 462 145 606 577 000 est le cube de 751 530. Ce cube ajouté à la somme de ses parties donne le nombre 1 669 404 572 559 360 000 qui est le carré de 1 292 054 400.

*Second cube : d'un nombre impair.*

Le nombre 51 481 899 427 489 507 065 375 est le cube de 37 200 735. Et ce cube ajouté à toutes ses parties est le carré dont le côté est 346 787 400 960.

<sup>1</sup> Dominus Bernardus Frenicle de Bessy.

*Troisième cube pair et quatrième cube impair.* Si l'on multiplie les deux cubes qui précèdent par le cube  $7^3$ , qui est le nombre donné comme exemple par M. Fermat, on trouve d'autres cubes beaucoup plus grands; mais nous les négligerons car leur calcul exige beaucoup de temps.

Il est remarquable que dans l'exemple donné par M. Fermat pour son premier problème, on peut trouver quelque autre propriété du cube 343; en effet, non seulement la somme des parties de ce cube unie à ce cube lui-même donne un carré, c'est-à-dire 400, mais même les parties de ce carré 400 ajoutées au carré lui-même forment un autre carré, c'est-à-dire 961, dont le côté est 31.

*Solution du second problème.* Le nombre  
931 426 156 963 217 079 241,

carré de 30 519 275 171, ajouté à toutes ses parties aliquotes, forme le cube dont le côté est 10 773 399. »

Suivent des énoncés de plusieurs problèmes numériques qui sont proposés aux mathématiciens et dont Frénicle donne des solutions particulières. Gino Loria ne s'y arrête pas et arrive à un autre passage, non pas plus important au point de vue arithmétique, mais caractéristique de l'époque, des façons de procéder et de s'exprimer si étranges à nos yeux, qu'adoptaient ces mathématiciens du XVII<sup>e</sup> siècle, lorsqu'ils publiaient leurs travaux. Le but de cet exposé n'étant pas le même que celui de l'article de Gino Loria, je ne m'arrêterai pas davantage à ce morceau et j'en viens à la question qui doit former le fond du contenu des lignes suivantes.

Auparavant remarquons, encore avec Gino Loria, que l'observation de Frénicle ci-dessus (troisième cube pair et quatrième cube impair) équivaut à la propriété caractéristique que nous avons mise en évidence à la fin du § 1. Nous verrons, en effet, que le premier et le second cube donnés ne contiennent pas le facteur 7. Cette propriété essentielle des solutions du problème ne lui a donc pas échappé.

§ 3. Gino Loria s'étonne que l'on ne trouve pas dans la brochure en question la démonstration de l'exactitude des solutions apportées par Frénicle aux deux énoncés de Fermat. Il dit avoir cherché dans la collection des *Ouvrages de M. Frénicle* publiés dans



le t. V des *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences depuis 1666 jusqu'à 1699*, et n'avoir rien trouvé. « D'ailleurs, ajoute-t-il, cela ne doit pas étonner car Frénicle a toujours fait secret de ses méthodes et dans sa solution de réponse au second défi de Fermat<sup>1</sup>, il déclare, en arithméticien plutôt pratique que théorique qu'il était, s'occuper non de la recherche de la démonstration, mais seulement de trouver des nombres satisfaisant à l'équation  $ax^2+1=y^2$ . Par conséquent, dit-il, reste ouverte la question de savoir si les nombres donnés par Frénicle satisfont réellement aux questions proposées par Fermat dans son premier défi ? »

Et Gino Loria établit facilement, au moyen de la forme que j'ai donnée avec lui plus haut aux problèmes posés qu'il en est bien ainsi, c'est-à-dire vérifie donc simplement les assertions de Frénicle concernant les trois nombres que donne ce dernier, comme solutions des questions posées.

Or il nous semble, outre que cette vérification n'a qu'un intérêt restreint, Frénicle étant trop bon mathématicien pour avancer un nombre dont il n'aurait pas été sûr, qu'il est une question plus intéressante à se poser. C'est celle de se demander par quelle méthode Frénicle a pu parvenir à ces trois solutions. C'est là le secret qu'un mathématicien comme Frénicle a voulu garder ; quant au reste, il était loisible et il l'est encore à chacun, de vérifier que tel nombre est un cube dont la somme des diviseurs est un carré, ou l'inverse.

Nous avons essayé de retrouver le moyen qui a pu servir à Frénicle et pour cela, nous avons essayé simplement de retrouver les solutions de Frénicle avec d'autres encore, si possible, par des moyens élémentaires, les seuls qui, encore aujourd'hui, paraissent pouvoir donner quelque résultat dans un tel problème. Nous verrons ensuite si Frénicle a pu se servir de ces mêmes moyens.

§ 4. Reprenons les problèmes posés, sous la forme qui leur a été donnée plus haut. Dans (1) S doit être un carré pour le problème I,

---

<sup>1</sup> Il s'agit du problème qui revient aujourd'hui à l'équation de Pell  $x^2 - Dy^2 = 1$  et écrit autrement, consiste à trouver un nombre carré qui multiplié par un facteur a donne un produit qui augmenté de 1 est un nouveau carré.



un cube pour le problème II. Il s'agit donc de rendre carré ou cube un produit de facteurs dont la forme générale est :

$$\frac{p^{k-1}}{p-1} = 1 + p + p^2 + \dots + p^{k-1}, \quad (2)$$

$p$  désignant un nombre premier et  $k$  un nombre entier quelconques. Cette façon de poser le problème conduit à la question générale suivante :

*Pour quels  $p$  et quels  $k$ , l'expression (2) qui est toujours un entier, sera-t-elle multiple de  $q$ ,  $q$  désignant un second nombre premier quelconque ?*

Il existe deux manières de répondre à cette question. L'une tout-à-fait élémentaire et plus longue est celle que Frénicle *peut* avoir employée. Elle paraît en tout cas ne pas dépasser l'état vraisemblable de ses connaissances arithmétiques. Une seconde manière revient au fond à la première sous une forme un peu moins élémentaire, surtout plus condensée et plus courte, mais plus voilée aussi. Elle exige l'emploi de tables d'indices qu'il est sans doute exclu que Frénicle ait jamais possédées, même si la notion d'*indice* eût été déjà réalisée et utilisable, ce qui ne serait pas impossible, une fois connu et développé le théorème de Fermat dont il est question ci-dessous.

Avant d'exposer ces deux méthodes, il est nécessaire, déjà d'après le mot que nous venons d'employer, de rappeler quelques concepts et propriétés très élémentaires de la théorie des nombres. Nous ne le faisons que dans la mesure stricte où ces concepts et propriétés sont utilisés dans la suite.

1. Deux nombres  $a$  et  $b$  qui ne diffèrent entre eux que d'un multiple d'un nombre  $q^1$ , sont dits *congrus entre eux relativement au module  $q$* , et on note le fait par la relation suivante, qui est dite une *congruence* :  $a \equiv b \pmod{q}$ .

2. Les congruences ont des propriétés analogues à celles des égalités ; en particulier on peut multiplier entre elles membre à membre des congruences relatives au même module.

---

<sup>1</sup> Une fois pour toutes, il s'agit toujours, dans tout cet exposé, uniquement de nombres *entiers positifs* ; c'est ce que nous entendrons toujours par le mot *nombre* ou par son symbole à l'avenir.

3. Il existe une théorie des congruences analogue à la théorie des équations ; en particulier toute congruence linéaire  $ax + b \equiv 0 \pmod{q}$  a une et une seule solution  $x \equiv a \pmod{q}$ , donc représentée par les nombres de la forme  $a + nq$ , à condition que le coefficient de  $x$  soit premier avec le module.

4. Un théorème déjà donné par Fermat dit que pour tout nombre premier  $q$ , on a  $a^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ ,  $a$  étant premier à  $q$ . Si  $a$  doit nécessairement être élevé à la puissance  $q-1$  pour être  $\equiv 1 \pmod{q}$ , on appelle  $a$  une *racine primitive* de  $q$ . Dans ce cas les puissances  $a^0 = 1, a^1, a^2, \dots, a^{q-2}, (a)$ , sont congrues dans un certain ordre aux  $q-1$  restes  $\pmod{q}$  :  $1, 2, 3, \dots, q-1, (\beta)$ . Les puissances suivantes  $a^{q-1}, a^q, a^{q+1}, \dots, (a)$ , sont congrues à ces mêmes restes, dans le même ordre qui se répète indéfiniment, puisque  $a^{q-1} \equiv 1, a^q \equiv a^1, a^{q+1} \equiv a^2, \dots, \pmod{q}$ .

5. L'exposant des puissances  $(a)$  est dit l'*indice* du nombre  $(\beta)$  correspondant. Ainsi si  $a^i \equiv r \pmod{q}$ , l'indice de  $r$ , ou de  $r + nq$ , est  $i$ , ou  $i + q-1$ , ou  $i + 2(q-1)$ , etc. ; autrement dit les indices sont congrus entre eux  $\pmod{q-1}$ , tandis que les nombres sont congrus entre eux  $\pmod{q}$ . L'indice de 1 est 0, ou mieux :  $\text{ind } 1 \equiv 0 \pmod{q-1}$  ; on établit facilement que  $\frac{q-1}{2}$  est toujours l'indice de  $q-1$ , ou mieux  $\text{ind } (q-1) \equiv \frac{q-1}{2} \pmod{q-1}$ .

6. Les indices ont des propriétés analogues à celles des logarithmes ; en particulier  $\text{ind } a^i \equiv i. \text{ind } a \pmod{q-1}$ .

§ 5. Dans la *première* manière, nous fixons le nombre  $q$  et nous prenons successivement les cas  $q = 5, 7, 11$ , etc. Nous laissons de côté les cas  $q = 2$  et  $q = 3$ , parce que l'on voit immédiatement si un entier est divisible par 2 ou par 3.

Il y a d'abord deux cas dans lesquels la réponse est générale et immédiate :

$$1^{\text{er}} \text{ cas. } p = q, \quad \frac{q^k - 1}{q - 1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{k-1} ;$$

Ce quotient n'est jamais multiple de  $q$ .

$$2^{\text{e}} \text{ cas. } p = nq + 1, \quad \frac{p^k - 1}{p - 1} \equiv 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = k \pmod{q} ;$$

Si  $k$  est multiple de  $q$ , pour tous les  $p$  de la forme  $nq + 1$ ,  $\frac{p^k - 1}{p - 1}$  est multiple de  $q$ ; sinon cela n'a lieu pour aucun  $p$  de la forme indiquée.

Soit maintenant  $q = 5$  :

a)  $p = nq + 2$ , ou  $\text{mod } 5$ ):  $p \equiv 2, p^2 \equiv 4, p^3 \equiv 3, p^4 \equiv 1, p^5 \equiv 2, \dots$

$$\frac{p^k - 1}{p - 1} \equiv 1 + 2 + 4 + 3 + 1 + 2 + \dots$$

La somme des  $k$  termes du second membre est  $\equiv 0, 1, 3, 2, \text{ (mod } 5)$ , selon que  $k = 4m, 4m + 1, 4m + 2, 4m + 3$ .

b)  $p = nq + 3$ , ou  $\text{mod } 5$ ):  $p \equiv 3, p^2 \equiv 4, p^3 \equiv 2, p^4 \equiv 1, p^5 \equiv 3, \dots$

$$\frac{p^k - 1}{p - 1} \equiv 1 + 3 + 4 + 2 + 1 + 3 + \dots$$

La somme des  $k$  termes du second membre est  $\equiv 0, 1, 4, 3, \text{ (mod } 5)$ , selon que  $k = 4m, 4m + 1, 4m + 2, 4m + 3$ .

c)  $p = nq + 4$ , ou  $\text{mod } 5$ ):  $p \equiv 4, p^2 \equiv 1, p^3 \equiv 4, \dots$

$$\frac{p^k - 1}{p - 1} \equiv 1 + 4 + 1 + 4 + \dots$$

La somme des  $k$  termes du second membre est  $\equiv 0$  ou  $1 \text{ (mod } 5)$ , selon que  $k = 2m$  ou  $2m + 1$ .

En résumé  $\frac{p^k - 1}{p - 1}$  ne sera multiple de 5 que:

- a) pour les  $p$  de la forme  $5n + 1$ , si  $k$  est multiple de 5;
- $\beta$ ) pour les  $p$  des formes  $5n + 2$  et  $5n + 3$ , si  $k$  est multiple de 4;
- $\gamma$ ) pour les  $p$  de la forme  $5n + 4$ , si  $k$  est multiple de 2.

Nous prenons ensuite  $q = 7, 11, 13$ , etc., et nous traitons chaque cas d'une façon analogue à celle que nous venons d'exposer pour  $q = 5$ . Nous donnerons encore le tableau résumé pour  $q = 7$ , à titre d'indication:

En résumé  $\frac{p^k - 1}{p - 1}$  ne sera multiple de 7 que:

- a) pour les  $p$  de la forme  $7n + 1$ , si  $k$  est multiple de 7;
- $\beta$ ) pour les  $p$  des formes  $7n + 2$  et  $7n + 4$ , si  $k$  est multiple de 3;

- γ) pour les  $p$  des formes  $7n+3$  et  $7n+5$ , si  $k$  est multiple de 6 ;  
 δ) pour les  $p$  de la forme  $7n+6$ , si  $k$  est multiple de 2.

Il n'est pas besoin de remarquer que la méthode devient déjà pour  $q = 11, 13, 17$ , etc., rapidement très longue, par le fait du nombre des formes que peut prendre  $p$  :  $nq+2, nq+3, \dots, nq+q-1$ .

§ 6. Dans la *seconde* manière nous nous servons des indices et de tables d'indices, comme les donne, par exemple, le célèbre *Canon arithmeticus* de Jacobi (Berlin 1839) pour les nombres premiers jusqu'à 1000.

Soit  $i$  le plus petit exposant positif pour lequel  $p^i \equiv 1 \pmod{q}$ ,  $p \neq q$ . D'après le théorème de Fermat, cet exposant existe et il est au plus égal à  $q-1$ .

On a  $p^{ni} \equiv 1 \pmod{q}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$   
 $p^{ni+r} \equiv 1 \pmod{q}$ ,  $r = 1, 2, \dots, i-1$ .

Autrement dit, tous les exposants et les seuls pour lesquels  $p^k - 1$  est multiple de  $q$ , sont  $k = ni$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Il y a maintenant deux cas à considérer :

1<sup>er</sup> cas.  $q$  n'est pas facteur premier de  $p - 1$ .

Alors  $i > 1$ , car pour  $i = 1$ ,  $p - 1 \equiv 0 \pmod{q}$ .

Pour  $k = ni$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , et seulement pour ces nombres :

$$\frac{p^k - 1}{p - 1} = \frac{mq}{p - 1} \text{ et } \frac{m}{p - 1} \text{ est entier,}$$

puisque le premier quotient est entier et  $q$  est premier avec  $p - 1$ .

Dans ce cas, pour  $k = ni$  et seulement pour ces nombres l'expression (2) est multiple de  $q$ .

2<sup>me</sup> cas.  $q$  est facteur premier de  $p - 1$ .

Alors  $i = 1$ , puisque  $p - 1 \equiv 0 \pmod{q}$ .

$$\frac{p^k - 1}{p - 1} = 1 + (mq + 1) + (mq + 1)^2 + \dots + (mq + 1)^{k-1} \equiv k \pmod{q}$$

Dans ce cas, pour  $k = nq$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , et seulement pour ces nombres, l'expression (2) est multiple de  $q^1$ .

<sup>1</sup> Ce deuxième cas est le deuxième cas général du § précédent. Le premier cas général du § précédent,  $p = q$ , est écarté ici en ayant posé  $p \neq q$ . Pour  $q = p$ , la congruence  $p^1 \equiv 1 \pmod{q}$  est impossible.

*Détermination de i pour le 1<sup>er</sup> cas.* Soit a une racine primitive de q. De  $p^i \equiv 1 \pmod{q}$ , on a, en prenant l'indice de chaque membre :

$$i \operatorname{ind} p \equiv \operatorname{ind} 1 \pmod{q-1}.$$

$$\text{c'est-à-dire } i \operatorname{ind} p \equiv 0 \pmod{q-1}.$$

Soit  $\delta$  le p. g. c. d. de  $\operatorname{ind} p$  et  $q-1$ . La congruence linéaire précédente se réduit à la suivante :

$$i \frac{\operatorname{ind} p}{\delta} \equiv 0 \pmod{\frac{q-1}{\delta}},$$

et elle a comme telle,  $\frac{\operatorname{ind} p}{\delta}$  et  $\frac{q-1}{\delta}$  étant premiers entre eux, *une*

et *une seule* solution qui est, comme entier le plus petit,  $\frac{q-1}{\delta}$ . Donc

$i = \frac{q-1}{\delta}$ , où  $\delta$  est le p. g. c. d. de  $\operatorname{ind} p$  et  $q-1$ , est le plus petit

exposant positif pour lequel  $p^i \equiv 1 \pmod{q}$ .

§ 7. Voici maintenant comment on utilise les résultats fournis par la première ou par la seconde méthode. Nous formons le tableau suivant ; Frénicle a pu écrire le même tableau. Nous disposons sur une ligne horizontale les nombres premiers p successifs 2, 3, 5, 7, ....., et à gauche, en colonne verticale, les nombres premiers q successifs à partir de 5 (voir ci-dessus), 5, 7, 11, .....

Pour le problème I, les k qui nous intéressent sont 4, 7, 10, ....., mais déjà 10 ne peut intervenir que pour les nombres premiers p très petits. Pratiquement nous ne nous sommes servis que de 4, et 7 ou 10 pour les tout premiers p : 2, 3, 5, 7. Pour le problème II, les k qui nous intéressent sont 3, 5, 7, ....., pratiquement, nous n'avons utilisé que l'exposant 3.

Nous plaçons à l'intersection de la ligne q et de la colonne p, l'exposant k le plus petit pour lequel  $\frac{p^k-1}{p-1}$  est multiple de q.

Si nous nous servons de la deuxième méthode, cet exposant est

$i = \frac{q-1}{\delta}$  pour les q qui ne sont pas facteurs premiers de  $p-1$ ,



et  $q$  lui-même pour les  $q$  facteurs premiers de  $p-1$ . Si nous nous servons de la première méthode, pour  $q = 5$ , cet exposant est 4 pour les  $p$  des formes  $5n+2$  et  $5n+3$ , est 2 pour les  $p$  de la forme  $5n+4$ ; pour  $q = 7$ , cet exposant est 2 pour les  $p$  de la forme  $7n+6$ , est 3 pour les  $p$  des formes  $7n+2$  et  $7n+4$ , etc.

Pratiquement, seule la seconde méthode permet de former en peu de temps un tel tableau, par exemple pour les  $q$  inférieurs à 100, les  $p$  inférieurs à 500 et les exposants 2 et 4 qui sont les seuls aisément utilisables pour le problème I<sup>1</sup>. Pour le problème II, nous avons formé un même tableau pour les  $q$  inférieurs à 100, les  $p$  inférieurs à 1000 et l'exposant 3.

Pour écrire le premier tableau par exemple, nous procédons ainsi :

Pour  $i = 2$ ,  $\delta = \frac{q-1}{2}$ ; ainsi  $q-1$  doit être pair et pour cela,

excepté 2, tous les nombres premiers  $q$  conviennent. Ind  $p$  est multiple de  $\delta$  inférieur à  $q-1$ ; par conséquent la seule valeur de ind  $p$  est  $\frac{q-1}{2}$ , qui est l'indice de  $q-1$ . Donc 2 est à placer dans chaque ligne  $q$ , excepté  $q = 2$  (que nous n'avons d'ailleurs pas écrit), sous tous les  $p$  de la forme  $q-1+mq = nq-1$  et sous aucun autre  $p^2$ .

Pour  $i = 4$ ,  $\delta = \frac{q-1}{4}$ ;  $q-1$  doit être multiple de 4. Ainsi

seuls conviennent les  $q$  de la forme  $4x+1$ . D'après la remarque ci-dessous, ind  $p$  peut être  $\frac{q-1}{4}$  et  $\frac{3(q-1)}{4}$ . Si ces indices sont ceux

---

<sup>1</sup> 4 étant multiple de 2, il n'est pas besoin de faire remarquer que l'exposant 2 a la même utilité que l'exposant 4 pour le problème I, puisque d'après ce qui est dit soit au § 5, soit au § 6,  $\frac{p^4-1}{p-1}$  est multiple de  $q$ , dès que  $\frac{p^2-1}{p-1}$  est multiple de  $q$ .

<sup>2</sup> La propriété exprimée dans ce résultat est évidente. Pour que  $\frac{p^2-1}{p-1} = p+1$  soit multiple de  $q$ , il est évident qu'il faut et il suffit que  $p$  soit de la forme  $nq-1$ .

des nombres  $\alpha$  et  $\beta$ , compris dans  $1, 2, \dots, q - 1$ , 4 est à placer dans chaque ligne  $q = 4x + 1$  sous tous les  $p$  des formes  $nq + \alpha$  et  $nq + \beta$ , et uniquement sous ces  $p$ .

Pour écrire le second tableau, en se limitant à l'exposant 3, on a :

Pour  $i = 3$ ,  $\delta = \frac{q-1}{3}$ ; seuls conviennent les  $q$  de la forme  $3x + 1$ . D'après la remarque ci-dessous,  $\text{ind } p$  peut être  $\frac{q-1}{3}$  et  $\frac{2(q-1)}{3}$ . Si ces indices sont ceux des nombres  $\alpha$  et  $\beta$ , compris dans  $1, 2, \dots, q - 1$ , 3 est à placer et uniquement dans chaque ligne  $q = 3x + 1$ , sous tous les  $p$  des formes  $nq + \alpha$  et  $nq + \beta$ .

*Remarque.* Dans  $a = a'\delta$  et  $b = b'\delta$ , il faut et il suffit que  $a'$  et  $b'$  soient premiers entre eux pour que  $\delta$  soit le p.g.c.d. de  $a$  et  $b$ .

$\delta = \frac{q-1}{i}$  est le p.g.c.d. de  $\text{ind } p$  et  $q - 1$ . Dans  $\text{ind } p = a' \frac{q-1}{i}$ ,  $q - 1 = b' \frac{q-1}{i}$ , on a  $b' = i$ ; il faut donc et il suffit que  $a'$  soit premier à  $i$  pour que  $\delta = \frac{q-1}{i}$  soit le p.g.c.d. de  $\text{ind } p$  et  $q - 1$ .  $i$  et  $q$  étant fixés,  $\text{ind } p$  ne pourra donc être que de la forme  $a' \frac{q-1}{i}$  où  $a'$  est premier à  $i$ .

§ 8. Il ne nous est évidemment pas possible de reproduire ici l'un ou l'autre de ces deux tableaux. Nous voudrions seulement en faire saisir l'utilité.

Le tableau des exposants 2 et 4 pour le problème I nous montre d'abord directement quels sont les  $p$  pour lesquels l'expres-

sion  $\frac{p^4-1}{p-1}$  contient le plus de facteurs premiers  $q$  inférieurs à

100, donc quels sont les  $p$  qui ont le plus de chances de servir à la constitution des premières solutions du problème de Fermat. Il

nous permet ensuite pour ces mêmes  $p$  de décomposer immédiatement, avec la plus grande facilité, les quotients  $\frac{p^4-1}{p-1}$ , puisque nous connaissons les  $q$  inférieurs à 100 par lesquels ces quotients sont divisibles.

Par exemple, la colonne  $p = 307$  contient les exposants 4, 2, 2, 4, 4 dans les lignes respectives  $q = 5, 7, 11, 13, 29$ . La décomposition se fait immédiatement:  $\frac{307^4-1}{307-1} = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 29$ .

La colonne  $p = 401$  contient les exposants 4, 4, 4, 2 dans les lignes respectives  $q = 37, 41, 53, 67$ . La décomposition donne:  $\frac{401^4-1}{401-1} = 2^2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 53 \cdot 67$ .

Dans le second tableau ce sont les  $p$  dont les colonnes contiennent *le plus* d'exposants 3, pour lesquels l'expression  $\frac{p^3-1}{p-1}$  est à décomposer. C'est ainsi que nous trouvons aisément  $\frac{439^3-1}{439-1} = 3 \cdot 31^2 \cdot 67$ , qui a servi à Frenicle, et un autre  $p$  au-delà de 500 qui nous sera plus utile encore:  $\frac{653^3-1}{653-1} = 7 \cdot 13^2 \cdot 19^2$ .

Nous donnons maintenant ci-dessous les tableaux de ces décompositions des expressions  $\frac{p^4-1}{p-1}$  et  $\frac{p^3-1}{p-1}$  qui ne contiennent que des  $q$  inférieurs à 100 et qui ont des chances de servir à la construction de solutions (en facteurs premiers inférieurs à 100) du problème I et du problème II. Dans la colonne à gauche sont données les valeurs de  $p$ ; à droite du trait vertical est donnée la décomposition du quotient  $\frac{p^4-1}{p-1}$  et  $\frac{p^3-1}{p-1}$  correspondant. Nous espaçons les facteurs premiers différents de manière à ranger verticalement les mêmes facteurs dans chaque décomposition. Cette disposition, que nous garderons plus loin dans l'écriture des solutions, permettra au lecteur de constituer lui-même aisément ces solutions dans les tableaux ci-dessous, ou du moins de voir comment on les construit en très peu de temps et avec un peu de chance.

I. Décomposition des expressions  $\frac{p^4-1}{p-1}$  qui peuvent servir à trouver des solutions du problème I.

[illegible]

II. Décomposition des expressions  $\frac{p^3-1}{p-1}$  qui peuvent servir à trouver des solutions du problème II.

p = 2		7							
3			13						
5					31				
7	3			19					
11		7		19					
13	3						61		
23		7							79
29			13				67		
37	3	7					67		
47					37		61		
67	3	7 <sup>2</sup>			31				
79	3	7 <sup>2</sup>				43			
137		7			37				73
163	3	7		19			67		
191		7	13 <sup>2</sup>		31				
211	3		13		31	37			
373	3	7 <sup>2</sup>	13						73
439	3				31 <sup>2</sup>		67		
653		7	13 <sup>2</sup>	19 <sup>2</sup>					

Pour  $p = 2, 3, 5, 7$ , dans le cas des exposants 7 et 10 pour le problème I et des exposants 5, 7 et 9 pour le problème II, les seuls quotients  $\frac{p^k - 1}{p - 1}$  qui ne contiennent que des facteurs premiers  $q$  inférieurs à 100, sont :

$$(III) \quad \begin{aligned} \frac{2^5 - 1}{2 - 1} &= 31, & \frac{3^5 - 1}{3 - 1} &= 11^2, & \frac{5^5 - 1}{5 - 1} &= 11 \cdot 71, \\ \frac{2^9 - 1}{2 - 1} &= 7 \cdot 73, & \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} &= 3 \cdot 11 \cdot 31, & \frac{3^{10} - 1}{3 - 1} &= 2^2 \cdot 11^2 \cdot 61. \end{aligned}$$

§ 9. Nous donnons maintenant les solutions que nous avons obtenues sur la base des tableaux du § précédent, en mettant en premier les solutions de Frénicle. Peut-être un lecteur avisé pourra-t-il avec un peu de temps, même dans les limites restreintes des tableaux I, II et III ci-dessus, en trouver une autre, en dehors de celles que nous donnons. Pour abrégér, nous désignons dorénavant l'expression  $\frac{p^k - 1}{p - 1}$  par  $p(k)$ .

## PROBLÈME I.

### 1. 1<sup>re</sup> solution de Frénicle; cube d'un nombre pair.

$$\begin{aligned} 2(4) &= 3 \cdot 5 \\ 3(4) &= 2^3 \cdot 5 \\ 5(4) &= 2^2 \cdot 3 \cdot 13 & N &= (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 41 \cdot 47)^3 \\ 13(4) &= 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17 & S &= 2^{14} \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 29^2. \\ 41(4) &= 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 29^2 \\ 47(4) &= 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17 \end{aligned}$$

### 2. 2<sup>me</sup> solution de Frénicle; cube d'un nombre impair.

$$\begin{aligned} 3(10) &= 2^2 \cdot 11^2 \cdot 61 \\ 5(4) &= 2^2 \cdot 3 \cdot 13 \\ 11(4) &= 2^3 \cdot 3 \cdot 61 & N &= 3^9 (5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 41 \cdot 47)^3 \\ 13(4) &= 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17 & S &= 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 29^2 \cdot 61^2 \\ 41(4) &= 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 29^2 \\ 47(4) &= 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17 \end{aligned}$$

<sup>1</sup>  $3^4 = 81$  est donc un carré dont la somme des diviseurs est un carré.



### 3. Solution nouvelle; cube d'un nombre impair.

$$\begin{array}{lcl}
 17 (4) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 & & 29 \\
 31 (4) = 2^6 & 13 & 37 \quad N = (17 \cdot 31 \cdot 47 \cdot 191)^3 \\
 47 (4) = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 & 13 \cdot 17 & S = 2^{20} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 29^2 \cdot 37^2. \\
 191 (4) = 2^7 \cdot 3 & 17 \cdot 29 \cdot 37 &
 \end{array}$$

### 4. Solution nouvelle; cube d'un nombre pair.

$$\begin{array}{lcl}
 2 (4) = & 3 \cdot 5 & \\
 3 (4) = 2^3 & 5 & \\
 5 (4) = 2^2 \cdot 3 & 13 & \\
 23 (4) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 & & 53 \quad N = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 83 \cdot \\
 43 (4) = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 11 & & 37 \quad 191 \cdot 307)^3 \\
 47 (4) = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 & 13 \cdot 17 & S = 2^{30} \cdot 3^6 \cdot 5^{10} \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^4 \cdot \\
 83 (4) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 & 13 & 53 \quad 17^2 \cdot 29^2 \cdot 37^2 \cdot 53^2. \\
 191 (4) = 2^7 \cdot 3 & 17 \cdot 29 \cdot 37 & \\
 307 (4) = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 & 29 &
 \end{array}$$

Nous avons négligé d'écrire, déjà dans le tableau I du § précédent, la solution de Fermat :  $7 (4) = 2^4 \cdot 5^2 (N = 7^3, S = 2^4 \cdot 5^2)^1$ . Les deux solutions de Frénicle comme les deux nouvelles d'ailleurs aussi, ne contiennent pas le facteur 7; en multipliant les unes et les autres par  $7^3$ , nous obtiendrons donc quatre nouvelles solutions, conformément à la remarque déjà faite par Frénicle (§ 2, dernier alinéa).

## PROBLÈME II.

### 1. Solution de Frénicle.

$$\begin{array}{lcl}
 7 (3) = 3 & 19 & \\
 11 (3) = 7 & 19 & \\
 29 (3) = & 13 & 67 \quad N = (7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 163 \cdot 191 \cdot 439)^2. \\
 163 (3) = 3 \cdot 7 & 19 & 67 \quad S = (3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 67)^3 \\
 191 (3) = 7 \cdot 13^2 & 31 & \\
 439 (3) = 3 & 31^2 \cdot 67 &
 \end{array}$$

### 2. Solution nouvelle.

$$\begin{array}{lcl}
 2 (3) = 7 & & \\
 3 (3) = & 13 & N = (2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 653)^2. \\
 11 (3) = 7 & 19 & S = (7 \cdot 13 \cdot 19)^3 \\
 653 (3) = 7 \cdot 13^2 & 19^2 &
 \end{array}$$

<sup>1</sup> La solution de Fermat est-elle le seul  $p (4)$  ou même aussi le seul  $p (3n + 1)$  qui soit directement un carré ou même simplement une puissance exacte ?

### 3. Solution nouvelle.

$$\begin{array}{rclcl}
 3 \ (3) & = & 13 & & \\
 5 \ (3) & = & & 31 & \\
 37 \ (3) & = & 3 \ 7 & 67 & N = (3 \cdot 5 \cdot 37 \cdot 163 \cdot 439 \cdot 653)^2. \\
 163 \ (3) & = & 3 \ 7 & 19 \ 67 & S = (3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 67)^3. \\
 439 \ (3) & = & 3 & 31^2 \ 67 & \\
 653 \ (3) & = & 7 \ 13^2 \ 19^2 & & 
 \end{array}$$

Nous remarquons d'abord que grâce au nombre 653 (3) nous avons une solution nouvelle bien inférieure à celle de Frénicle, et ensuite que par un curieux hasard notre seconde solution a la même somme S que celle de Frénicle.

§ 10. Il ne nous reste maintenant plus qu'à discuter par quelle voie Frénicle a pu trouver ses solutions.

Tout d'abord, il est à peu près exclu que Frénicle ait pu disposer à l'avance de tables donnant la décomposition en facteurs premiers des expressions  $p(4)$  ou  $p(3)$ , ou d'une manière générale  $p(k)$ , préalablement établies à l'énoncé des problèmes par Fermat, dans sa lettre du 3 janvier 1657. Aujourd'hui même de telles tables *publiées* n'existent sans doute pas, du moins à notre connaissance immédiate.

Pour le problème I, du moment que les  $p$  dont il se sert ne vont pas au-delà de 47, et que la décomposition de  $p(4)$  en facteurs premiers pour les  $p$  qui ne sont pas trop élevés, est facile à cause de la décomposition partielle immédiate  $1+p+p^2+p^3 = (1+p)(1+p^2)$ , le plus probable est que Frénicle ait simplement fait cette décomposition pour tous les  $p$  successifs de 2 à 47. Il suffit qu'il ait encore cherché à décomposer  $p(10)$  pour  $p = 2$  et 3, pour tomber sur les solutions qu'il donne, et la décomposition de  $p(10)$  bénéficie encore d'une décomposition partielle immédiate:  $1+p+p^2+\dots+p^9 = (1+p^5)(1+p+p^2+p^3+p^4)$ , tandis que  $p(7) = 1+p+p^2+\dots+p^6$  est indécomposable de cette manière.

Par contre, pour le problème II,  $p(3) = 1+p+p^2$  est indécomposable de la manière que nous venons d'employer et Frénicle a dû utiliser des  $p$  allant jusqu'à 439. Il est vraiment peu probable qu'il ait décomposé  $p(3)$  pour tous les  $p$  successifs de 2 à 439, étant donné le temps qu'une telle opération exigeait. D'autre part, procéder au hasard, par tâtonnements, sur les différents  $p(3)$ ,  $p \geq 2$ , n'offrait que très peu de chances d'aboutir à un résultat, à moins

que Frénicle ait eu d'autres indications sur la nature des expressions  $p(3)$  en dépendance de  $p$ , ce qui paraît bien difficile. Par contre le procédé que nous avons employé, conçu de la première manière (§ 5), et le tableau II que nous avons dressé lui étaient faciles, et le moyen n'était pas si long. Ayant obtenu, en effet, par exemple, 7 (3), 11 (3) et 29 (3) par décomposition immédiate de ces nombres qui ne sont pas grands, il n'avait à faire les tableaux, analogues à ceux que nous donnons au § 5 pour  $q = 5$  et  $q = 7$ , que pour  $q = 7, 13, 19$  et 67, pour être à même de connaître les  $p(3)$  qui contiennent ces mêmes facteurs, en particulier les  $p(3)$  qui contiennent 67. Avec 439 (3) il introduisait le nouveau facteur 31; le tableau correspondant pour  $q = 31$  suffisait pour terminer sa solution. Et encore ces tableaux, du moment qu'il s'était fixé  $k = 3$ , n'étaient à établir qu'en petite partie.

Tel est, à notre humble avis, désarticulé et démonté, le secret probable de Frénicle !

---

### Séance du 14 mars 1935.

Présidence de M. le prof. Dr S. Bays, président.

**Prof. W. Oehl:** *Die Alpen und die Sprachwissenschaft.*

L'auteur n'a pas fourni de manuscrit.

---

### Séance du 21 mars 1935.

Présidence de M. le prof. Dr S. Bays, président.

**Prof. L. Chardonnens:** *L'hydrogène « lourd » et l'eau « lourde ».*

La presse quotidienne nous a appris, à la fin de l'année passée, que le prix Nobel de chimie pour 1934 a été décerné au physico-chimiste Harold Clayton Urey, professeur à l'Université de Columbia, pour sa découverte de l'hydrogène lourd. Depuis cette découverte, faite au printemps de l'année 1932 par Urey et ses collaborateurs Brickwedde et Murphy, plus de 200 travaux ont paru sur cette nouvelle espèce d'hydrogène — mieux: sur ce nouvel élément — et sur ses dérivés. Les Universités américaines de Columbia, de Princeton, de Berkeley et d'autres encore y ont évidemment la part

la plus large ; mais les Universités d'Europe ne se sont cependant pas laissé distancer et de remarquables recherches dans ce domaine ont été faites entre autres à Bâle, Berlin, Erlangen, Göttingen, Leipzig, Liège, Manchester, Munich, Vienne, etc. Le sujet n'est donc plus, à l'heure actuelle, d'une actualité toute fraîche ; cela d'autant plus que des articles généraux sur la question ont paru dans de nombreuses revues et en diverses langues et que d'excellentes monographies (Darmois, Farkas, Frerichs, Mark, etc.) ont été publiées. Une mise au point et un résumé des résultats obtenus peuvent toutefois paraître ne pas être ici tout à fait hors de propos.

\*   \*   \*

On sait que tout système des poids atomiques des éléments a nécessairement pour base un élément déterminé, choisi d'une manière plus ou moins arbitraire, auquel on attribue, d'une manière plus ou moins arbitraire aussi, un poids atomique déterminé. Cet élément de référence fut tout d'abord l'hydrogène ; et on lui attribua, parce que c'était l'élément le plus léger que l'on connût, le poids atomique 1. Pour des raisons d'ordre pratique — le nombre des combinaisons contenant de l'oxygène étant beaucoup plus grand que celui des composés contenant de l'hydrogène — on choisit plus tard comme élément de référence l'oxygène et on lui attribua le poids atomique 16,0000 exactement. (Dans le système précédent —  $H=1$  — l'oxygène avait le p.a. 15,88.)

L'élément de référence étant fixé et la base du système ( $O=16$ ) étant choisie, on peut déterminer les poids atomiques des autres éléments par diverses méthodes.

1) Les méthodes *chimiques* (Richards, Hönigschmid) consistent en principe dans l'analyse exacte de combinaisons contenant de l'oxygène ou de composés contenant un élément dont on ait auparavant déterminé le p.a. par rapport à l'oxygène.

On trouve ainsi pour le p.a. de l'hydrogène  $1,00777 \pm 0,00002$ .

2) Les méthodes *physico-chimiques* (Guye, Moles) consistent dans la détermination exacte des poids moléculaires des gaz à partir de leurs densités, celles-ci étant rapportées à la densité de l'oxygène dont le poids moléculaire est fixé égal à 32,0000.

3) Parmi les méthodes *physiques* la principale est celle dite du spectrographe de masse (Aston). Elle consiste en principe dans l'é-



tude de la déviation sous l'action successive d'un champ électrique et d'un champ magnétique des rayons dits rayons canaux formés de particules matérielles positivement chargées. Ces particules sont plus ou moins déviées suivant leurs masses et inscrivent pour ainsi dire leurs poids atomiques sur la plaque photographique.

Par cette méthode on réussit à montrer que beaucoup d'éléments que l'on avait considérés jusqu'alors comme purs de tout mélange étaient en réalité formés de plusieurs éléments — au sens strict du terme —, de poids atomiques différents, en proportion toujours la même. Ces diverses espèces d'un même élément ont toutefois la même charge nucléaire, ont donc le même nombre atomique et se placent toutes dans le même casier du système périodique. On les appelle les isotopes de cet élément (Soddy). L'élément Chlore se compose ainsi de trois chlores de p. a. 35, 37 et 39, dans la proportion approximative 78 à 22 à  $<1$ .

Cette méthode donna pour le p.a. de l'hydrogène la valeur  $1,00778 \pm 0,00015$ .

La concordance entre les résultats obtenus par les deux méthodes était parfaite. Et l'on pouvait conclure que sans doute les deux méthodes étaient basées sur le même poids atomique de référence, celui de l'oxygène égal à 16,0000 exactement. En réalité, il n'en était rien et la concordance constatée était illusoire.

En effet, en 1929, Giauque et Johnston, en analysant le spectre d'absorption de l'oxygène atmosphérique, montrèrent que l'oxygène est aussi un mélange de trois isotopes de masses atomiques 16, 17 et 18.

Il est évident

1<sup>o</sup> que les chimistes, dans leur système de poids atomiques, attribuaient le p.a. 16,0000 à l'atome d'oxygène du mélange naturel;

2<sup>o</sup> que les physiciens par contre donnaient le p.a. 16,0000 à l'isotope de l'oxygène que seuls ils avaient pu déceler jusque-là dans leur spectrographe de masses, c'est-à-dire à l'isotope 16 qui se trouvait en plus grande quantité dans le mélange.

La base des deux systèmes n'était plus la même. Et les résultats obtenus par les deux méthodes ne pouvaient plus concorder. Les divergences devaient évidemment dépendre des quantités relatives des trois isotopes 16, 17 et 18 dans le mélange naturel.



Par l'étude des spectres de bandes de l'oxygène moléculaire naturel, Mecke et Childs montrèrent en 1931 que la proportion des trois isotopes de l'oxygène était la suivante:

$$O_{16} : O_{18} : O_{17} = 630 \pm 20 : 1 : 0,2$$

Et les physiciens, améliorant la sensibilité de leur spectrographe de masses, constatèrent eux aussi l'existence des trois isotopes et déterminèrent la proportion:

536 : 1 : 0,25 résultat en concordance satisfaisante avec le précédent.

Il s'agissait de ramener les deux méthodes à une même base de référence: il fallait ou bien corriger le p.a. standard des chimistes, ce qui semblait logique, ou bien corriger celui des physiciens. Pour des raisons d'ordre pratique, ce furent les physiciens qui cédèrent.

Si l'on se base sur le standard physique (p.a. de l'isotope 16 = 16,0000) le poids atomique moyen du mélange naturel se calcule:

$$\frac{630 \cdot 16 + 18 + 0,2 \cdot 17}{631,2} = 16,00348$$

Si par contre l'oxygène naturel a le p.a. 16,0000 (standard chimique), l'isotope 16 doit avoir inversement un p.a., dans l'échelle chimique, inférieur à 16. D'où le facteur de transformation

système physique  $\longrightarrow$  système chimico-pratique

$$\frac{16,00000}{16,00348} = 0,999782$$

Si l'on transforme les résultats obtenus pour les p.a. par la spectrographie de masses en les multipliant par ce facteur, en tenant compte bien entendu des proportions d'isotopes dans les mélanges, on arrive à des p.a. moyens qui concordent encore mieux qu'auparavant avec les valeurs pratiques obtenues par les méthodes chimiques.

L'hydrogène cependant fait exception. Avec le facteur de transformation 0,999782, on obtient, à partir des résultats les meilleurs de la spectrographie de masses comme valeur pratique pour le p.a. de l'hydrogène

$$1,00756 \pm 0,00004$$

tandis que le p.a. pratique obtenu par les méthodes chimiques est

$$1,00777 \pm 0,00002$$

La divergence est donc plus grande que la limite d'erreur expérimentale.

Cette divergence s'explique si l'on fait l'hypothèse que l'hydrogène ordinaire contient en petite quantité un isotope plus lourd, par exemple un isotope de masse 2. Dans la spectrographie de masses en effet, seul l'isotope le plus abondant laissait sa trace; dans les méthodes chimiques au contraire, c'est le mélange qui est étudié et le p.a. obtenu est le p.a. moyen du mélange.

Soit  $A = 1,00756$  le p.a. de l'isotope léger, le plus abondant;  
soit  $B = 2,01512$  le p.a. de l'isotope lourd (que l'on suppose donc de masse exactement double);

soit  $C = 1,00777$  le p.a. moyen de l'hydrogène naturel.

Si  $x$  est le nombre d'atomes  $A$  pour un atome  $B$  du mélange, on calcule pour le p.a. moyen, c'est-à-dire pour  $C$ :

$$C = \frac{x \cdot A + 1 \cdot B}{x + 1}$$

$$\text{D'où l'on tire: } x = \frac{B - C}{C - A} = \frac{1,00735}{0,00021} = 4797$$

La proportion de l'isotope lourd de p.a. 2,01512 serait donc de  $1/4800$  ca. Cet isotope devrait en conséquence être décelable.

Des tentatives faites dans ce sens par Kallmann et Lasareff, au moyen du spectrographe de masses, ne furent cependant pas couronnées de succès.

C'est alors que Urey et ses collaborateurs eurent l'idée d'opérer non pas avec l'hydrogène naturel mais avec de l'hydrogène enrichi préalablement en isotope plus lourd. S'appuyant sur des considérations théoriques, ils firent porter leurs essais sur le résidu de l'évaporation à basse pression d'une grande quantité d'hydrogène liquide. Comme moyen de détection ils utilisèrent l'analyse spectrale ordinaire, en se servant à cet effet d'un spectrographe à réseau de très forte dispersion.

Le résultat fut concluant. Urey put en effet constater sur le spectrogramme la présence, à côté des raies intenses du spectre atomique de l'hydrogène léger, des raies attendues — très faibles, il est vrai, — dues à l'isotope lourd. Les longueurs d'onde de ces

raies concordaient de manière remarquable<sup>1</sup>, à quelques millièmes d'unités Angström près, avec les longueurs d'onde calculées pour un atome d'hydrogène de masse double par la formule de Balmer-Rydberg-Sommerfeld.

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{109737,11}{1 + \frac{m}{M}} \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde en cm,

$m$  la masse de l'électron,

$M$  la masse de l'atome d'hydrogène

et  $n$  représente les nombres entiers 3, 4, 5, 6, etc.

L'hydrogène lourd de masse environ 2 était donc découvert. Urey lui donna le nom de Deuterium (symbole D). L'hydrogène léger de masse environ 1 devait s'appeler désormais Protium, le nom habituel d'hydrogène étant réservé au mélange isotopique naturel. Les noyaux des deux isotopes auraient les noms correspondants de Deuton et de Proton.

Des expériences de contrôle furent immédiatement entreprises par d'autres physiciens (Bleakney, Kallmann, Bainbridge), en particulier au moyen de la spectrographie de masses, et confirmèrent pleinement les résultats obtenus par Urey. Tous cependant furent d'accord pour reconnaître que, si l'on en jugeait par les intensités relatives des raies spectrographiques des deux isotopes, l'abondance de l'isotope lourd dans l'hydrogène naturel devait être sensiblement plus faible que celle que le calcul avait prévue. La proportion prévue était en effet H : D = 4800 : 1. L'expérience montrait un rapport d'environ 30 000 : 1. On trouva plus tard l'explication de cette divergence lorsque l'on constata qu'une séparation partielle des deux isotopes se produisait dans l'électrolyse de l'eau. En opérant sur de l'hydrogène obtenu par électrolyse, que

---

<sup>1</sup> Les différences de longueurs d'onde entre les raies correspondantes des deux isotopes calculées d'une part au moyen de la formule et expérimentalement observées d'autre part sont en unités Angström:

Raie	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$
$\Delta\lambda$ calc.	1,793	1,326	1,185	1,119
$\Delta\lambda$ observ.	1,791	1,313	1,176	1,088

l'on croyait être le plus pur, on s'était mis involontairement dans les conditions expérimentales les plus défavorables, l'hydrogène électrolytique étant précisément un peu moins riche en Deuterium que l'hydrogène naturel.

L'importance de la découverte de Urey était telle que de nombreux chercheurs s'attachèrent aussitôt à étudier les propriétés de ce nouvel élément — car en fait c'en était bien un — et en premier lieu les moyens de l'obtenir plus pur et en plus grandes quantités. Les tentatives d'enrichissement en Deuterium par absorption et désorption fractionnées d'hydrogène gazeux sur et du charbon, les essais de rectification d'hydrogène liquide ne furent guère satisfaisants. La seule méthode qui se révéla viable — l'électrolyse de l'eau mise à part, sur laquelle on reviendra — fut celle de la diffusion fractionnée. Cette méthode, due à Hertz, qui avait déjà servi à son auteur avec succès à la séparation complète des deux isotopes du néon, lui permit dans le cas de l'hydrogène aussi l'obtention d'une petite quantité de Deuterium pur, si pur que l'analyse spectrale n'y révéla plus trace d'hydrogène léger.

L'opinion générale admise, il y a encore peu d'années, sur les propriétés des divers isotopes d'un même élément était que ces propriétés — les propriétés chimiques en particulier — ne différaient que d'une manière insensible. Cette opinion était justifiée tant qu'il ne s'était agi que d'isotopes de masses relativement élevées, la différence procentuelle de ces masses étant alors en effet minime, comme pour les isotopes 35, 37 et 39 du chlore p. ex. Il en est évidemment tout autrement pour l'hydrogène, où les masses atomiques des deux isotopes (Protium et Deuterium) sont dans le rapport du simple au double. Aussi n'est-il pas étonnant que les propriétés de ces deux hydrogènes diffèrent de notable manière, à tel point que l'on peut considérer ces deux « isotopes » comme deux éléments nettement distincts.

Voici quelques-unes de ces propriétés:

*Poids atomiques (système chimique)*

Protium:	1,00756
Deuterium:	2,01319
Hydrog. ord.:	1,00777



### *Autres propriétés*

<i>Deuterium</i>	<i>Hydrogène ordin.</i>
P. de fusion 18°,7 K	15°,98 K
P. d'ébullit. 23°,6 K	20°,4 K
Chal. de fus. 48 cal/Mol	28 cal/Mol

Mentionnons encore pour mémoire que des expériences ou des mesures ont été faites sur la désintégration atomique et la radioactivité artificielle provoquées par des Deutons de grande vitesse, la série de Lyman du spectre atomique du Deuterium, la structure fine des raies spectrales, l'effet Stark, les modifications ortho et para du Deuterium d'une part ; d'autre part sur la vitesse d'« hydrogénation » de l'éthylène par le Deuterium gazeux, sur la vitesse de réaction du Deuterium avec l'oxygène, sur les limites d'explosibilité des mélanges de Deuterium et d'oxygène etc.

\* \* \*

Il est clair que si l'hydrogène naturel est mélangé de deux isotopes, l'eau doit aussi être un mélange. Ce fait est d'autant plus remarquable que l'eau était peut-être le corps chimique que l'on croyait connaître le mieux et que l'on pensait obtenir dans le plus grand état de pureté. La preuve en est dans le fait que l'on a choisi l'eau comme substance de référence dans la définition de constantes physiques importantes : unité de masse, unité de quantité de chaleur, points fixes de l'échelle thermométrique etc.

En faisant certaines hypothèses, on pouvait prévoir, dans une certaine mesure tout au moins, quelques propriétés de l'oxyde de Deuterium  $D_2O$  ; en particulier, si l'on suppose que l'eau  $H_2O$  et l'eau  $D_2O$  contiennent le même nombre de molécules par unité de volume, les densités de ces deux eaux doivent être dans le même rapport que leurs poids moléculaires. Or le p. m. de l'eau  $D_2O$ , soit 20, est de 11 % plus élevé que le p. m. de l'eau  $H_2O$  18. La densité de l'eau lourde doit donc être aussi de 11 % plus élevée que celle de l'eau ordinaire, c. à d. doit être environ 1,11 au voisinage de la température habituelle. On a donc dans la détermination de la densité un moyen à la fois sûr et sensible de s'assurer d'un enrichissement éventuel de l'eau en oxyde de Deuterium.



On pouvait aussi supposer a priori que les tensions de vapeur des deux eaux devaient être différentes. Une distillation fractionnée de l'eau ordinaire suffisamment efficace semblait donc devoir permettre une séparation. Et, en effet, G. N. Lewis, de l'Université de Berkeley en Californie, en soumettant de l'eau à une distillation fractionnée très soigneuse dans une colonne de six mètres de hauteur, constata une différence appréciable de la densité entre les fractions de tête et les fractions de queue, de l'ordre du dix-millième ( $70-80 \cdot 10^{-6}$ ). L'effet était donc réel mais minime.

En février 1933, Urey et Washburn annoncèrent qu'ils avaient observé dans l'électrolyse de solutions aqueuses un enrichissement du Deuterium dans le résidu de l'électrolyse. Et exactement en même temps, Lewis publiait les résultats de ses essais, dans lesquels il avait obtenu par électrolyse une eau de densité 1,035, qui devait en conséquence contenir environ 3 % de  $D_2O$ .

Quatre mois plus tard, Lewis annonçait ses résultats définitifs : il avait obtenu à partir de 10 litres d'eau ordinaire 0,12 cm<sup>3</sup> d'eau lourde de densité 1,1056, densité qui ne se modifiait plus par électrolyse ultérieure ; cette eau devait être de l'oxyde de Deuterium pur <sup>1</sup>.

Un peu plus d'une année après la découverte du Deuterium, son principal dérivé était préparé à l'état pur.

Si le mécanisme de la séparation électrolytique des deux isotopes est encore peu clair <sup>2</sup>, les conditions expérimentales dans lesquelles il faut opérer ont été par contre déjà fort bien étudiées. Le « rendement » de l'électrolyse dépend de nombreux facteurs : nature des électrodes, nature et concentration de l'électrolyte, température, densité de courant, etc. L'efficacité de la séparation est définie par une certaine constante  $\alpha$ , dont la valeur numérique est fonc-

---

<sup>1</sup> Des recherches toutes récentes ont montré qu'en poussant l'électrolyse beaucoup plus loin encore, jusqu'à ce que le volume final ne soit plus que le 150 000 000<sup>me</sup> du volume initial, on obtenait un résidu ne contenant plus trace de Protium mais enrichi en un troisième isotope de l'hydrogène plus lourd que le Deuterium, de masse probablement égale à 3, qu'on pourrait appeler Tritium. La spectrographie de masses appliquée au Deuterium tiré de ce résidu permet d'estimer, par extrapolation, l'«abondance» du Tritium dans l'hydrogène naturel à moins de un dix-milliardième.

<sup>2</sup> Les phénomènes de survoltage cathodique y jouent un rôle.

tion des conditions expérimentales. Son sens physique est donné par les considérations suivantes :

On pose comme principe que la diminution par unité de temps de la quantité d'eau lourde dans l'électrolyte est proportionnelle à chaque instant à la quantité encore présente à cet instant ; et de même pour l'eau légère : la diminution par unité de temps de la quantité d'eau légère est proportionnelle à chaque instant à la quantité d'eau légère encore présente. Si  $D$  est la quantité d'eau lourde présente au temps  $t$ , si  $H$  est la quantité d'eau légère présente au même temps  $t$ , on a donc

$$-\frac{dD}{dt} = \alpha'' D \text{ et } -\frac{dH}{dt} = \alpha' H, \text{ où } \alpha'' \text{ et } \alpha' \text{ sont des facteurs}$$

de proportionalité.

Autrement dit : la diminution relative par unité de temps de la quantité d'eau lourde dans l'électrolyte est constante ; de même pour l'eau légère :

$$-\frac{dD}{dt} \cdot \frac{1}{D} = \alpha'' \text{ et } -\frac{dH}{dt} \cdot \frac{1}{H} = \alpha'$$

Par intégration et en posant que  $D_0$  et  $H_0$  sont les quantités des deux eaux présentes dans l'électrolyte au temps 0, c. à. d. au début, on obtient :

$$\ln D/D_0 = -\alpha'' t \text{ et } \ln H/H_0 = -\alpha' t$$

Le rapport de ces deux grandeurs est le facteur de séparation  $\alpha$ .

$$\alpha = \frac{\alpha'}{\alpha''} = \frac{\log H/H_0}{\log D/D_0}$$

Ce facteur est donc égal, comme on s'en rend compte facilement, au quotient de la « perte relative » en eau légère par unité de temps par la « perte relative » correspondante en eau lourde. Il est donc d'autant plus grand que l'enrichissement du résidu de l'électrolyse en eau lourde est plus efficace. Sa valeur numérique dépend, comme on l'a vu, des conditions expérimentales ; elle oscille entre 3 et 8 environ et est souvent voisine de 6.

La définition du facteur de séparation permet de calculer, pour toute valeur de ce facteur, jusqu'à quelle réduction de volume on doit pousser l'électrolyse pour obtenir, à partir d'une eau de concentration donnée, une eau lourde de concentration déterminée en  $D_2O$ .

On aboutit en effet, par quelques transformations simples, à la relation :

$$\log \frac{V}{V_0} = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \log \frac{d}{d_0} - \frac{1}{\alpha - 1} \log \frac{1 - d_0}{1 - d}$$

où  $d$ ,  $d_0$ ,  $h$ ,  $h_0$  sont les concentrations en  $D_2O$  et  $H_2O$  aux temps  $t$  et  $t_0$ ;  $V$  le volume de l'électrolyte au temps  $t$  et  $V_0$  le volume au temps  $t_0$  c. a. d. au début.

En introduisant  $\alpha = 6$  et  $d = 0,017 \%$  (composition de l'eau naturelle), on trouve que pour atteindre une concentration de  $90 \%$  en eau lourde il faut électrolyser jusqu'à ce que le volume ne soit plus que la  $46\,500^{\text{me}}$  partie du volume initial. En partant de 100 litres on doit donc pousser l'électrolyse jusqu'à  $2\text{ cm}^3$  environ. Cette réduction de volume entraîne des pertes considérables en Deuterium et le calcul permet de les prévoir aussi: ainsi, en partant de  $100\,000\text{ cm}^3$  d'eau à  $0,017 \%$ , donc d'une quantité d'eau contenant 17 gr. d'eau lourde, on obtient environ  $2\text{ cm}^3$  d'eau enrichie à  $90 \%$ , c. à. d. contenant 1,8 gr. de  $D_2O$  pur. La perte en  $D_2O$  sous forme de gaz tonnant dégagé est d'environ 15 gr. soit  $90 \%$  de la quantité primitive. On peut calculer aussi à partir de quelle concentration une récupération du gaz tonnant dégagé sera rentable.

Dans la pratique, les conditions expérimentales employées par les divers chercheurs sont assez variables. Une température basse, une densité de courant pas trop faible sont des facteurs favorables. Partout on utilise comme matériel de départ les résidus des bains électrolytiques industriels (fabrique de soude, de chlore, usines de chromage). Ces eaux industrielles ont une concentration en  $D_2O$ , suivant la durée de fonctionnement, de  $0,03 \%$  à  $0,07 \%$ . L'électrolyse se fait par étapes, entrecoupées de distillations de l'eau enrichie, afin d'éviter que la concentration de l'électrolyte (soude caustique ou acide sulfurique) ne devienne trop élevée. L'eau lourde à diverses concentrations se trouve déjà dans le commerce <sup>1</sup>.

Les *propriétés physiques* de l'eau lourde pure sont en grande partie déjà assez bien connues. En voici quelques-unes, avec, en regard, les propriétés correspondantes de l'eau ordinaire.

---

<sup>1</sup> Le prix en est devenu même, la concurrence aidant, relativement abordable: récemment (mai 1935), une fabrique d'Oslo offrait l'eau lourde pure au prix d'environ 8 fr. le gramme.

	$D_2O$	<i>Eau ordin.</i>
Densité 20/4	1,1059	0,9982
Pt. de congél.	3,82° C	0,00° C
Pt. d'ébullit. sous 760 mm	101,42° C	100,00° C
Maximum de densité à	11,6° C	4,00° C
Tension de vapeur		
en mm. Hg à	20°C	17,5
	40	55,3
	100	760
Chaleur de vaporisation en Kcal/Mol.	9,98	9,72
Viscosité à 20° C en millipoises	12,60	10,09
Tension superficielle en dynes/cm	67,8	72,75
Constante diélectrique	80,2	81
Coductibilité spécifique à 25° C	$1,10^{-5}$ (?)	$6,10^{-8}$
Produit ionique à 25° C	$0,5.10^{-14}$ (?)	$1,3.10^{-14}$
Indice de réfraction D/20° C	1,32844	1,33300

Il n'est pas douteux que quelques-unes de ces constantes physiques seront sujettes sous peu à révision et à correction et que ce tableau, déjà imposant, se complétera rapidement <sup>1</sup>.

Mentionnons encore que le pouvoir dissolvant de l'eau lourde sur les sels est plus faible notablement que celui de l'eau ordinaire et que les mobilités des ions dissous dans l'eau lourde sont sensiblement plus petites.

*Au point de vue chimique*, l'eau lourde est caractérisée par une moins grande réactivité que l'eau ordinaire ; elle réagit p. ex. moins facilement avec les métaux, le carbure de calcium etc.

Elle échange ces atomes D contre les atomes H de diverses substances ; p. ex. contre les atomes H de l'hydrogène gazeux ordinaire, contre ceux de la vapeur d'eau ordinaire, d'où son « hygrosco-picité » ; de même contre les atomes H de substances qu'elle dissout : contre les atomes H des sels d'ammonium, de l'eau oxygénée,

<sup>1</sup> On peut y ajouter déjà :

	$D_2O$	<i>Eau ordinaire</i>
Température critique	371,5° C	374,2° C
Chaleur de fusion en calories/Mol	1522	1435

Les capacités calorifiques moléculaires des deux eaux à l'état liquide seraient sensiblement égales.



en présence d'alcali contre ceux de l'acétone, de même contre les atomes d'hydrogène des groupements hydroxyliques du sucre etc.

*Les propriétés physiologiques* de l'eau lourde sont celles qui ont suscité le plus de commentaires. Il est peut-être prématuré de tirer maintenant déjà des conclusions définitives des essais nécessairement incomplets qui ont été faits jusqu'ici. Il semble cependant acquis que dans l'eau légèrement enrichie ou de concentration moyenne en  $D_2O$  les processus vitaux, comme d'ailleurs les processus chimiques, se passent plus lentement que dans l'eau ordinaire. La germination des graines, les divisions cellulaires, les réactions de fermentation ont en général une évolution moins rapide, parfois accompagnée d'une plus grande longévité des organismes. L'eau lourde de forte concentration par contre serait un milieu incapable d'entretenir la vie, sans toutefois manifester de propriétés toxiques, à proprement parler. L'homme supporte l'ingestion de quantités même notables d'eau légèrement enrichie en  $D_2O$ ; un expérimentateur d'Oslo aurait pu même absorber jusqu'à dix grammes d'eau lourde pure sans aucun dommage.

L'oxyde de Deuterium a servi de produit de départ pour la préparation de déjà nombreux dérivés; ces dérivés ont été préparés pour la plupart en quantités extrêmement petites, de telle sorte que leurs propriétés sont encore fort mal connues. Outre la préparation du Deuterium lui-même, que l'on obtient maintenant pur en quantités notables en décomposant l'eau lourde pure par les métaux, mentionnons celle des acides «deuterochlorique»  $DCl$ , «deuteroiodique»  $DI$ , «deuterofluorique»  $DF$ , «deutero cyanique»  $DCN$ , «deuteroacétique»  $CH_3COOD$ , de divers deuteroammoniacs  $ND_3$ ,  $NHD_2$ ,  $NH_2D$ , du sulfate de sodium décadautérate  $Na_2SO_4 \cdot 10 D_2O$  (son point de transition serait à  $34,48^\circ C$ , c'est-à-dire  $2,1^\circ$  plus haut que celui du décahydrate ordinaire), du deuteroacétylène  $C_2D_2$ , du deutero benzène  $C_6D_6$ , du deuterométhanol  $CH_3OD$ , du deuterochloroforme  $CCl_3D$ , etc.

Il est difficile dans l'état actuel des recherches, de prévoir si la découverte du Deuterium et de l'eau lourde aura jamais une importance pratique, industrielle ou médicale. Mais il est certain qu'elle constitue pour la science pure un indéniable et très remarquable progrès. On possède dans le Deuterium et ses combinaisons un matériel expérimental idéal, à cause de sa simplicité, pour



l'éclaircissement de nombreux processus élémentaires encore mystérieux. On peut s'attendre dans ce domaine, à un avenir fécond.

---

### Séance du 9 mai 1935.

Présidence de M. le prof. Dr S. Bays, président.

**Prof. A. Huber:** *Die Dreiteilung des Winkels.*

L'auteur n'a pas fourni de manuscrit.

---

### Séance du 23 mai 1935.

Présidence de M. le prof. Dr S. Bays, président.

**O. Büchi:** *Die neue Trinkwasserversorgung der Stadt Freiburg. — Geologie und Hydrologie der Hofmattquellen (Alterswil).*

An der Kantonsstrasse Tifers-Plaffeien befindet sich etwa 2 km oberhalb Alterswil die Hofmatt, eine ehemalige Wirtschaft. Etwa 300 m westlich dieses Gehöftes, am rechten Ufer des Galternbaches (Gotteron) entspringen mehrere starke Quellen. Es handelt sich um 3 Gruppen von Quellen, die fast in einer Linie liegen von SW nach NE, und um einige vereinzelte Quellen. Sie liegen in einer Meereshöhe von 753-761 m, was für die Druckleitung nach Freiburg von grosser Bedeutung ist. (Reservoir am Guintzet auf 691 m.). Diese Quellen bilden Grundwasseraufstösse, die Sand aufwirbeln. Eine dieser Quellen entspringt auf einem kleinen Kegel! Die vereinigten Quellbäche bilden einen kurzen Bachlauf, der sich mit dem Galternbach vereinigt.

Der Ertrag dieser Quellgruppen wurde früher auf ca. 4000 l/m geschätzt, erwies sich aber bei genauer Messung<sup>1</sup> vom 30. April bis Ende Mai 1934 von nur 2060-2110 l/m, unter Zurechnung unvermeidlicher Verluste beim Messen auf maximal 2200 l/m.

---

<sup>1</sup> Das Material für diese Arbeit (Gutachten, Bohrresultate, Tabellen, etc.) wurde mir in zuvorkommender Weise von H. Chefingénieur Müller zur Verfügung gestellt. Ihm sowie H. Ing. Bonabry sei mein bester Dank ausgesprochen für Material und Auskünfte.

Dieser Ertrag war aber ziemlich konstant. Die Wassertemperatur, gemessen in den verschiedensten Jahreszeiten, ist mit grosser Konstanz ca 9,5°. Da die Temperatur etwas höher ist als das Jahresmittel der Gegend, so darf man auf eine gewisse Tiefe des Grundwassers schliessen.

Diese starke Quellgruppe hat schon lange die Aufmerksamkeit des Wasseramtes der freiburgischen Kraftwerke erregt. Schon im Jahre 1906 sicherte es sich dieselben durch Ankauf der Quellrechte.

Nach dem Weltkrieg, vom 31. Juli bis 16. August 1919, wurde von den Trinkwassergeologen *H. Mollet* und *R. Schider*, damals im Dienste des « Service suisse de l'hygiène publique » eine genaue geologische Terrainaufnahme gemacht als Grundlage für das hydrologische Gutachten.

Es sei hier ein kurzer Ueberblick gegeben über die *Geologie der Gegend* nach der geologischen Karte von Mollet und Schider (Lit. 3) wie auch nach eigenen Felduntersuchungen anlässlich einer Publikation über alte Senseläufe (Lit. 6 u. 7). Die Quellen von Hofmatt liegen im Gebiet der *Meeresmolasse* des Burdigalien im ungefalteten Molasseland ausserhalb der Störungen des Alpenrandes, was die Untersuchungen erleichtert. Das Molasseland ist aber teilweise von mächtigen glacialen Ablagerungen bedeckt, die in dieser Frage eine grosse Rolle spielen.

Oestlich der Hofmatt ist ein Molassehügel, das Kleeholz. Seine Molasseschichten fallen bei Wengliswil an der Hauptstrasse Alterswil-Plaffeien 10-12° gegen SE ein. Westlich der Hofmatt haben wir die Molassehügel von Rechthalten und südlich davon die höchste Erhebung der näheren Umgebung, den Hügel von Oberholz zwischen Plasselb und Brünisried. Beim Wäldchen Rüti misst die Molasse 10° Fallen nach SE. Die Molasseaufschlüsse von Wengliswil und Rüti rahmen das obere Galterntal ein. Bei Plasselb zeigt die Molasse eine schwache Antiklinale mit Axialfallen gegen SW. Die Tektonik der Molasse schliesst darum eine Herkunft des Wassers der Hofmattquellen als Schichtquellen derselben aus. Es müsste als Schichtquelle gegen SE abfliessen, also gegen Plaffeien.

Die Gegend von Plaffeien ist geologisch etwas komplizierter gebaut. Molasse finden wir am Tütschbach und am rechten Ufer der Sense. Dort ist auch die Ueberschiebung der Süsswassermolasse auf die Meeresmolasse zu sehen bei Fallvorsassli. Sehr wichtig ist

das Fehlen jeglichen Felsgrundes am linken Senseufer von der Tütschbachmündung bis gegen die Brücke von Guggersbach. Erst von dort abwärts fliesst die Sense in einer tiefen Molasseschlucht mit 100-170 m hohen Felswänden (bei der Ruine Obermaggenberg).

Die *glacialen Ablagerungen* sind mächtig und von grosser Bedeutung. Wir finden bis 15 m mächtige *Schotter* am linken Ufer der Sense von Lindengraben bis zur Brücke von Guggersbach, wobei sie nur auf kurzer Strecke bedeckt sind durch abgerutschte Tone. Sie liegen, wo ihre Unterlage sichtbar ist, direkt auf Molasse und erscheinen wieder bei der Gumperslochquelle ob der Sense Schlucht, wo jene Quelle diesen Schottern entspringt. Nahe der Hauptstrasse bei Brünisried sind ähnliche grobe Schotter auf Molasse zu finden, die vielleicht mit den tiefer gelegenen im Zusammenhang waren.

Diese Schotter sind von blauen u. gelben Tönen bedeckt auf grosse Entfernung. Ueber diesen lagern erst die fluvioglacialen Schotter und Moränen der letzten Eiszeit. Darum handelt es sich um alte Schotter, um die Füllung eines alten Sensetales, wovon weiter unten die Rede sein soll.

Die *blauen u. gelben Tone*, die stellenweise fein geschichtet, « gebändert » sind und die alten Schotter bedecken, sind eine besondere Form von Grundmoräne. Die vereinzelt gekritzten Gesschiebe darin beweisen den Zusammenhang mit einer Vergletscherung. Wir finden sie in grosser Ausdehnung, ca. 10 m mächtig, im Talboden von Plaffeien über den alten Schottern, aber unter den jungen Sensealluvionen, auf denen das Dorf steht. Diese Tone ziehen sich bis E Brünisried den Abhängen der Sense entlang und bewirken stellenweise bedeutende Gehängerutschungen, so westlich der Strasse, die von Zumholz nach Guggersbach hinuntersteigt.

Es ist nun von grosser Bedeutung, dass wir dieselben Tone wieder im oberen Galterntal finden, ganz besonders in der Umgebung der Hofmattquellen und weiter talabwärts bis Poffetsmühle bei St. Ursen und in einem kleinen Graben, dem Gübelbach.

Diese gebänderten blauen Tone müssen sich in einem Stausee abgelagert haben, der am Rand des Rhonegletschers sich bildete. Sie spielen in hydrologischer Hinsicht eine wichtige Rolle, wie wir bald sehen werden.

Ueber diesen blauen Tonen folgen bei Leist grosse Moränen und stellenweise *fluvioglaciale Sande und Schotter*, die vom Rhonegletscher und seinen Schmelzwassern abgelagert wurden. Ihre Bedeutung ist für die Hydrologie in dieser Gegend gering.

Die Schotter, die von Hayozmühle bis Obermühlethal und Kappellenacker ob der Galternschlucht auf Molasse aufliegen, können auch älteren Datums sein. Doch sind sie von den älteren Senseschottern durch die abdichtende Lehmschicht getrennt.

### *Altes Sensetal.*

Aus all diesen Darlegungen geht hervor, dass wir es zwischen Plaffeien und der Hofmatt mit einem alten Sensetal zu tun haben. Das schottererfüllte, alte Sensetal muss sich unterhalb Plaffeien von Sensematt über Leist gegen Hofmatt erstreckt haben. Die Gründe dafür sind kurz die folgenden: 1. Die Molasse fehlt zwischen dem oberen Galtern- und dem Sensetal bei Guggersbach. Die Molassehügel lassen ein Tal von oberflächlich ca. 700 m Breite frei. 2. Die alten Senseschotter gehen unterhalb Plaffeien nicht in die Senseschlucht, sondern westlich gegen Leist; man findet sie ja W dieser Schlucht bei der Gumperslochquelle über Molasse. 3. Die blauen Tone erstrecken sich von Plaffeien bis weit ins Galternthal hinunter. 4. Die Sense fliesst unterhalb Guggersbach in einer auffällig engen, jungen Schlucht. Die beiden Bohrungen haben die Existenz dieses alten Tales bewiesen, da sie etwa 27 m mächtigen Schotter angeschnitten haben, der als Fortsetzung des alten Schotters von Plaffeien aufzufassen ist.

Die Fortsetzung dieses alten Sensetales gegen Tifers-Düdingen ist von H. Mollet und von mir (Lit. 3, 5, 6, 7) untersucht worden. Doch gehört dies nicht zum Thema und soll darum übergangen werden.

Die Breite des Felsbeckens in der Molasse für den ehemaligen Senselauf, ist, wie ich oben bemerkt habe, an der heutigen Oberfläche ca. 750 m, in der Tiefe beim vermutlichen Talboden (in ca. 700 m Meereshöhe), bei gleichmässigen Böschungen der Molasse immer noch 3-400 m. Ein so ausgesprochenes breites Molassetal kann nur die Sense gegraben haben, nicht aber die kleinen Quellflüsse des Galternbaches. Die mächtigen Moränen bei Leist haben nach der letzten Eiszeit die Sense gegen den Guggisberg in die jetzige Schlucht



gedrängt. Es ist aber wahrscheinlich, dass die Sense schon mehrmals in den verschiedenen Interglacialzeiten gegen das obere Galterntal geflossen ist. Der Urheber dieser Zeilen hat im Herbst 1926 an der Tagung der S. N. G. auf einen Senselauf aufmerksam gemacht, der von der Hofmatt sich abwärts gegen Mellisried-Niedermuhren hinzieht (Lit. 6), während Albert Heim (in Lit. 3) und Aeberhard (Lit. 1) zeitweise einen Lauf nach Sodbach-Schwarzenburg annehmen.

### *Hydrologie.*

Die Molasse spielt in hydrologischer Beziehung die Rolle eines schwer durchlässigen Gesteins und enthält meist nur kleine Wasseradern.

Die Schotter und Sandlager sind die besten Wasserhorizonte. Die über den blauen Tonen liegenden Schotter und Sande von Aeschlenberg-Medenwil liefern auch gute Quellen bis zu 400 l/m, die gefasst sind.

Die Herkunft der Hofmattquellen konnte nicht im orographischen Einzugsgebiet gesucht werden. Eine Quelle von ca. 2200 l/m erfordert etwa 5-6 km<sup>2</sup> durchlässigen Bodens, eine solche von 6000 l/m etwa 15 km<sup>2</sup>, was hier niemals der Fall ist. Im Gegenteil, die undurchlässigen Lehme, durch welche die Quellen aufstossen, verhindern im ganzen Einzugsgebiet des oberen Galterntales die Einsickerung von Oberflächenwasser. Die über dem Lehm liegenden Sand- und Kiesschichten entleeren sich durch andere, meist gefasste Quellen, so bei Aeschlenberg, Medenwil und bei Gute Tanne.

Die konstante Temperatur und der gleichmässige Ertrag deuten für die Hofmattquellen auf eine tiefliegende Wasserader und eine weite Herkunft des Wassers. Aus diesen Ueberlegungen heraus kommen alle Geologen, die sich mit dieser Frage befasst haben, zur Auffassung, dass die Hofmattquellen aus dem alten Sense-schotter stammen. Das Wasser kann aber auf der ganzen Strecke der Sense von Zollhaus bis Guggersbach in den alten Schotter hineinsickern durch die Alluvialschicht der heutigen Sense.



*Ergebnisse der Bohrungen bei der Hofmatt.*

*Bohrprofil I.*

Beginn der definitiven Bohrung am 17. Juli 1934.

Humus . . . . .	— 0,35 m	
Gelber Lehm mit Sand und Steinen . . . . .	— 1,75 m	
Blauer Lehm mit grossen Steinen . . . . .	— 1,95 m	
Harter gelber Lehm mit Steinen . . . . .	— 9,— m	
Lehmiger Kies . . . . .	—11,30 m	
Blauer Lehm, sehr hart, mit Steinen . . . . .	—13,20 m	
Grober Kies mit Lehm . . . . .	—14,40 m	
Grobe Geschiebe mit Lehm . . . . .	—15,50 m	} Wasserho-
Reiner Kies . . . . .	—18,70 m	
Sehr harter gelber Lehm . . . . .	—19,— m	
Sehr harter blauer Lehm . . . . .	—22,— m	
Gelber Lehm . . . . .	—22,30 m	} Wasserho-
Sauberer Kies . . . . .	—23,50 m	
Grosser Block in Lehm . . . . .	—27,— m	} Wasserho-
Grober Kies mit dünnen Lehmschichten . . . . .	—34,45 m	

*Bohrprofil II.*

Beginn 14. XI. 1934.

Humus . . . . .	— 0,40 m	
Torf, blauer Lehm mit Sand und Steinen . . . . .	— 1,30 m	
Wechselagerung von blauem Lehm und lehmigem kompaktem Sand . . . . .	— 6,— m	
Sand mit gelbem Lehm und groben Geröllen, kompakt . . . . .	—11,— m	
Blauer Lehm mit Kies, sehr hart . . . . .	—18,— m	
Blauer Lehm . . . . .	—19,40 m	} Wasserho-
Sehr feiner Sand . . . . .	—19,80 m	
Lehmiger Kies . . . . .	—20,30 m	
Grober Kies und Sand, zuerst lehmig, dann rein . . . . .	—25,— m	
Grober Kies mit Sand, rein . . . . .	—30,30 m	} Wasserho-
Grober Kies, rein . . . . .	—43,— m	
Grober Kies und Sand . . . . .	—47,10 m	
Molasse (erbohrt am 13. III. 1935) . . . . .	—47,90 m	

Welche Ergebnisse haben nun die beiden Bohrungen ergeben, welche die freiburgischen Kraftwerke im Jahre 1934 und dieses Jahr ausführen liessen? Am 4. Juli 1934 war eine elektrische Leitung an die Bohrstelle gebaut und das Bohrmaterial herbeigeschafft. Ausführung der Bohrung geschah durch die Tiefbohr- u. Baugesellschaft A.-G. Zürich. Die sehr harten Lehmschichten, die zunächst angetroffen wurden, samt vielen eingeschlossenen Gesteinen, erschwerten und verlangsamten die Bohrung beträchtlich. Diese Lehmschichten dichteten so gut ab, dass der Boden und das Bohrrohr trocken blieben trotz der unmittelbaren Nähe der starken Quellen. Man bohrte mit einem engen Rohr von 340 mm. Am 17. Juli blieb ein Bruchstück eines schraubenartigen Bohrers im Bohrloch stecken und konnte nicht mehr hinausgeholt werden. Man verzichtete bei 12,40 m Tiefe auf das Bohrloch und begann von Neuem zu bohren. Das 2. Mal ging es rascher. Am 8. August erbohrte man einen *Wasserhorizont* bei 15,50 m in reinem Kies, 3 m mächtig. Durch die folgenden Tonschichten bohrte man sehr mühsam. Bei 23,30 m erbohrte man den *eigentlichen Grundwasserstrom* in einem sehr groben Kies. Von 24,50 m bohrte man mit einem 250 mm weiten Rohr. Bei —24,50 m stieg der Ertrag nach dem Durchbohren eines Steins plötzlich von 200 auf 1600 l/m. Von jetzt an erhöhten sich der Ertrag und der Druck gleichmässig. Am 26. September wurde die Bohrung eingestellt bei —34,45 m.

Nun ersetzte man das Rohr von 250 mm durch einen Filter und verlängerte das Bohrrohr bis 6,85 m über die Oberfläche. Bei +1,35 und bei +2,95 m brachte man je einen Hahnen an. Bei geschlossenen Hahnen stieg das Wasser im Rohr bis 6,25 m trotz bedeutendem Verlust von ca. 1000 l/m um das Rohr. Dieses Steigen im Rohr entspricht dem artesischen Auftrieb des Wassers, das unter seiner Lehmdecke abgeschlossen ist und nicht abfliessen kann.

Man hat den Ertrag gemessen mit einem Becken von 1470 l. Bei geöffnetem oberem Hahnen fliesst 1515 l/m ab und das Wasser steigt noch 3,05 m im Rohr. Mit den Verlusten ergibt das Bohrloch ohne zu pumpen 2500 l/m, mit den Quellen, die ungestört weiter fließen, macht dies 4460 l/m.

Bei Oeffnung des unteren Abflussrohres ergibt sich ein Ertrag von 2480 l/m bei einer Wassersäule von 1,50 m. Mit den Verlusten (780 l/m) und den nun verminderten Quellerträgen er-

hält man total 4560 l/m. Nach dem Abnehmen des aufgesetzten Rohres fließt das Wasser bei +90 cm ab bei gleichbleibendem Ertrag.

Am 5. Oktober begannen die *Pumpversuche* mit einer Pumpe von 17 HP. Am Anfang fließen 3675 l/m, der Ertrag steigt bis 5. Oktober auf 4900 l/m. Dabei sank der Wasserspiegel im Rohr auf 275 cm im Maximum. Mittleres Absinken des Wasserspiegels im Rohr bei 4900 l/m: 1,85 m. Mittlerer Ertrag 4750 l/m. Ertrag der gesamten Quellgruppe noch 840 l/m, alles zusammen ergibt 5590 l/m.

Am 10. Oktober wurde diese Pumpe durch eine stärkere ersetzt, von 30 HP., die maximal 5500 l/m ergab und ein Absinken des Wasserspiegels im Rohr von maximal 3,30 m. Mittlerer Ertrag 5200 l/m, mittleres Absinken im Rohr 3,20 m. Quellertrag nur noch 570 l/m, das macht zusammen 5570 l/m. Diese Versuche dauern bis 13. Oktober, während mehr als 24 Stunden blieben Niveau und Ertrag annähernd konstant. Wir dürfen diese Wassermenge als eine minimale betrachten, die aus diesem Bohrloch zu fördern ist, da die Versuche im trockenen Herbst des sehr trockenen Jahres 1934 gemacht wurden, das in hiesiger Gegend nur 880 mm Niederschlag geliefert hat gegen 1000 mm im Mittel.

*Temperaturmessungen* am Rohr bei —28 m: 9,4°; Quelle 9,6°  
am Rohr bei —34,45: 9,1°.

Die Abkühlung gegenüber der Quelle ist wohl auf das Eisenrohr zurückzuführen.

Da die Quellgruppe während der Pumpversuche von 1200 bis auf 524 l/m abgenommen hatte, so ersieht man daraus, dass die Bohrung an einer günstigen Stelle angesetzt war, so dass man den gemeinsamen Wasserträger aller Quellen angebohrt hatte. Es war klar, dass man bei noch weiterem Bohren bis auf die wasserundurchlässige Unterlage wahrscheinlich den gesamten Wasserertrag erreichen konnte. Die Freiburgischen Kraftwerke entschlossen sich darum zu einer neuen Bohrung an etwas anderer Stelle. Sie liegt etwa 80-90 m südlich der 1. Bohrstelle am linken Ufer des Galternbaches.

Man begann am 14. November 1934 mit einem Rohrdurchmesser von 100 cm. Man durchbohrte verschiedene Lehmschichten, von —6 bis —11 m eine unreine Sandschicht. Von —19,80 abwärts

fand man groben Kies mit Sand, zuerst lehmig, dann reinen Kies. Dies ist wiederum der eigentliche Wasserhorizont. Die Bohrung erreichte bei —47,90 m die Molasse ohne auf Grundmoräne zu stoßen. Es wurden sukzessiv engere Rohre eingeschaltet von 80, 60 und zuletzt 40 cm Durchmesser.

### *Ertrag aus dem 2. Bohrloch.*

Aus dem 1. Bohrloch flossen 4500 l/m bis zum Moment, wo aus dem 2. Bohrloch 1000 l/m kamen. Von dem Moment an gab der Ertrag des 1. Bohrloches ab bis auf 3250 l/m. Der Totalertrag der beiden Bohrlöcher samt den freien Quellen ergibt nun 5320 l/m, also vorläufig weniger als beim Pumpen am 1. Bohrloch.

Am 26. III. 1935 unternahm man Pumpversuche am 2. Bohrloch allein mit einem Filterrohr im unteren Teil während 4 Tagen. Der Ertrag war 2000 l/m, bei einem Absinken des Wasserspiegels im Rohr von —4,40 m. Gleichzeitig flossen im 1. Bohrloch 1500 l/m ab.

Vom 1. April an pumpte man gleichzeitig in beiden Bohrlöchern während 6 Tagen. Es lieferte das 1. Bohrloch 3800-3970 l/m bei einem Absinken des Wasserspiegels von —2,20 bis —2,50 im Rohr und das 2. Bohrloch 2200 l/m bei einem Absinken von —4,40 bis 4,50 m im Rohr, zusammen ein Ertrag von über 6000 l/m. Die Versuche wurden fortgesetzt mit einem längeren Filter im 2. Bohrloch, der durch die ganze Kiesschicht reichen muss, um den gesamten Wasserertrag zu erreichen. Der Ertrag stieg hierdurch auf 7000 l/m maximal.

Es ist nicht bekannt geworden, dass durch das Pumpen Quellen im weiteren Umkreis, z. B. im unteren Galterntal seither abgenommen hätten. Es ist möglich, dass beim Auspumpen des Grundwasserträgers in der Hofmatt ein besseres Zirkulieren im Grundwasser entsteht und dadurch rückwärts eine stärkere Versickerung des Sensewassers bei Plaffeien.

### *Ist die Quelle geeignet für Trinkwasser ?*

Obwohl wir annehmen müssen, dass das Wasser der Hofmattquellen Sickerwasser der Sense ist, so wird es doch bei einem unterirdischen Lauf von ca. 4 km, eventuell 3-7 km, reichlich filtriert, denn die Zirkulation in alten Schottern ist sehr langsam, nach Berechnungen 3-5 m pro Tag. Wenn wir mit der bisherigen Wasser-



versorgung der Stadt Freiburg vergleichen, wo das stark verunreinigte Saanewasser nur durch eine kleine Alluvialschicht von minimal 6 m filtriert wird, so ist dieser etwa 4 km lange unterirdische Lauf eine ideale Wasserreinigung. Die chemischen und bakteriologischen Untersuchungen bestätigen dies in weitgehendem Masse. Bakteriologisch ist es absolut rein befunden worden, es ist durchsichtig und farblos, ohne festen Absatz. Die *chemische Analyse* ergibt folgendes Bild:

Aeussere Beschaffenheit: farblos und klar, geruchlos, Geschmack normal.

Temperatur . . . . .	9,50
Wasserstoffionenkonzentration bei 10° C. . . . .	7,3
Freie Kohlensäure . . . . .	9 mgr/l
Gebundene Kohlensäure . . . . .	89,3 »
Freie zugehörige Kohlensäure . . . . .	16,8 »
Agressive Kohlensäure . . . . .	nicht vorhanden
Karbonathärte. . . . .	20,3 fr.°
Karbonathärte nach dem Marmorlösungsver- such (Heyer) . . . . .	19,5°
Gesamthärte n. Blacher. . . . .	21 fr.°
Bleibende Härte . . . . .	0,7 fr.°
Trockenrückstand . . . . .	229 mgr/l
Glühverlust . . . . .	26 »
Chlorion. . . . .	5,7 »
Permanganatverbrauch . . . . .	0,3 »
Eisen (Fe...). . . . .	0,05 »
Sauerstoffgehalt, sofort . . . . .	3,8 cm³/l
» nach 5 Tagen . . . . .	3,6 »
Sauerstoffzehrung . . . . .	0,2 »
Gesamtstickstoff . . . . .	0,75 mgr/l
Ammoniak, frei . . . . .	0,15 »
Nitration . . . . .	0,3 »
Sulfation . . . . .	2
<i>Bakteriologische Untersuchung</i> (5. Zähltag) . . .	72

Bakt. Coli ist selbst in Wassermengen bis 200 cm³ nicht nachweisbar.



Diese Analyse ergibt ein ganz normales Bild eines Grundwassers. Es kann also dieses Wasser als ein nicht nur einwandfreies, sondern sogar vorzügliches Trinkwasser und Gebrauchswasser bezeichnet werden.

### *Andere Erklärungsversuche der Herkunft des Wassers.*

Ich muss mich an dieser Stelle noch mit einigen anderen Erklärungsversuchen der Herkunft des Wassers der Hofmattquellen befassen. Das Wasser sollte vom Entenmoos und vom Roten Moos bei Rechthalten stammen. Diese beiden Moore liegen, wie üblich, auf undurchlässiger Lehmunterlage und entwässern sich oberflächlich. Es handelt sich zwar vermutlich um ein altes Talstück, das sehr hoch gelegen ist und seine Fortsetzung jenseits des Galterntales im Sodbach findet. Es wird aber vom alten Sensetal durchschnitten und seine Abflüsse gelangen über die blauen Tone und können nicht in die alten Schotter einsickern.

Nach der Auffassung von abbé Mermet, der am 19. Februar 1920 mit H. Alf. Monney, ingénieur, die Umgebung der Hofmattquellen absuchte und mit der Wünschelrute untersuchte, stammt das Wasser nicht aus der Gegend von Plaffeien, sondern mehr von SW, Richtung Plasselb, angeblich von der Diablerets.

Die Aussagen von Wünschelrutengängern müssen immer mit Vorsicht aufgenommen werden. Es fällt mir nicht ein, denselben die Fähigkeit abzustreiten, unterirdische Wasseradern zu spüren, aber in der Interpretation der Wahrnehmungen unterlaufen ihnen gerne grosse Fehler.

Da die Molasse in der Richtung gegen SW nach Süden fallende Bänke aufweist, kann es sich erstens nicht um Schichtquellen handeln, die in der Molasse auch viel zu geringfügig wären. Es bleibt nur die Annahme einer kräftigen Verwerfung, die von der Hofmatt sich bis gegen Plasselb oder bis unter das Bett der Aegera fortsetzen würde. Es ist nun oberflächlich weder bei Rechthalten, noch bei Plasselb, wo die Molasse gut sichtbar ist, eine bedeutende Verwerfung konstatiert worden. Ausserdem ist zu bemerken, dass Quellen aus Molasseverwerfungen meist auch nicht sehr ergiebig sind, da dieselben in der Regel sich nicht auf viele km durchziehen, oder dann mit undurchlässigem Material wieder aufgefüllt sind.

Es ist nicht derselbe Fall wie in den grossen Transversalverschiebungen des Juragebietes, wo das Wasser in grösserem Quantum solchen Verwerfungen folgt, um an tieferer Stelle an die Oberfläche zu kommen. (Solche Spaltenquellen sind ausserdem nicht einwandfrei!) Eine Herkunft aus dem Gebiet der Alpen muss wegen der Undurchlässigkeit der am Alpenrand sehr mächtigen Molasseschichten und wegen der zu geringen Temperatur der Quellen abgelehnt werden.

Der einzige sichere Beweis, dass die Hofmattquellen Versickerungswasser der Sense darstellen, wäre ein Färbungsversuch, der in der Nähe von Plaffeien auszuführen wäre bei Niederwasser mit einem genügendem Quantum Fluoreszein. Wegen der langen Beobachtungsdauer von 1 bis 2 Jahren dürfte der Versuch kaum positiv ausfallen.

Für die *Richtigkeit der Auffassung der Geologen* spricht der Umstand, dass in der Schweiz und in anderen Ländern gerade die grössten und ergiebigsten Quellen aus Schottern stammen, entweder aus alluvialen, die jetzigen Ströme begleitenden oder aus alten Schottern, die alte verdeckte Täler ausfüllen und sich nur durch solche Grundwasseraufstösse bemerkbar machen, wie jene bei der Hofmatt. Insbesondere möchte ich hinweisen auf ein neu erschienenes Werk: Dr. Hug und Ing. Beilick: « Die Grundwasserverhältnisse des Kantons Zürich » (Lit. 8.), worin weitaus der grösste Teil der Trinkwasserversorgung dieses grossen industriellen Kantons durch Grundwasserbohrungen und Fassungen bestritten wird, während die Schichtquellen aus der Molasse ganz in den Hintergrund treten und erst recht die Spaltquellen. Diese sehr weitgehende Ausnützung der Grundwasservorräte im Kanton Zürich war nur deswegen möglich, weil der Kanton in diese Frage eingegriffen hat und einen tüchtigen Geologen, Dr. Hug, als Experten bei diesen Wasserarbeiten zugezogen hat. Es wäre auch sehr zu empfehlen, dass im Kanton Freiburg für alle grösseren Wasserversorgungen ein Geologe von Amtswegen beigezogen würde, damit verfehlte Fassungen vermieden würden, und bessere Resultate erzielt würden, wie es das Wasseramt der freiburgischen Kraftwerke erreicht hat.

## LITERATUR

1. B. AEGERHARDT: *L'ancien glacier de l'Aar et ses relations avec celui du Rhône*. Eclogae geol. Helv. vol. XI. pag. 752. 1912.
  2. A. MONNEY: *Rapport sur la question d'une adduction d'eau de sources à Fribourg*. Juillet 1918, manuscrit.
  3. R. SCHIDER und H. MOLLET: *Geologisches Gutachten über die Hofmattquelle* mit 1 Profiltafel und einer geol. Karte, 1919. Manuskript.
  4. E. PRINZ: *Handbuch der Hydrologie*. 1919.
  5. HANS MOLLET: *Ein alter Senselauf*. Eclogae geol. Helv. vol. 20, 1926, p. 229.
  6. O. BÜCHI: *Interglaciales Senseläufe*. Eclogae geol. Helv. vol. 20, 1926, p. 226.
  7. O. BÜCHI: *Ein altes Sensetal*. Beiträge zur Heimatkunde, herausgegeben vom Verein für Heimatkunde des Sensebezirkes, 1928, p. 7.
  8. J. HUG und A. BEILICK: *Die Grundwasserverhältnisse des Kantons Zürich*. 1934.
- 

### Séance du 6 juin 1935.

Présidence de M. le prof. Dr S. Bays, président.

**Dr E. Michel, prof.:** *Sur la propagation des ondes électromagnétiques à la surface de la terre.*

L'auteur n'a pas fourni de manuscrit.

---

### Séance du 27 juin 1935.

Présidence de M. le prof. Dr S. Bays, président.

**Dr. A. Münzhuber :** *Die Hefe als Nähr- und Heilmittel.*

Der Gebrauch der Hefe in der Volksmedizin greift weit in's Altertum zurück. Ihre klassische Anwendung ist die Furunkulose. Leeuwenhoek sah sie zum ersten Male 1618 unter dem Mikroskope, Gay-Lussac führte 1815 die erste gründliche Untersuchung über Hefe aus und Cagniard-Latour erkannte 1837 ihre Pflanzennatur. Sie ist ein einzelliges Lebewesen, bewirkt die alkoholische Gärung und vermehrt sich durch Sprossung. Gibt man zu 100 Liter Bierwürze  $\frac{1}{2}$  Liter dickbreiige Hefe, so wird man am Schlusse der Gärung ca 1 Liter ernten. Dadurch entsteht viel überschüssige Hefe, die, weil wenig haltbar, meist mit dem Abwasser weggespült wird.



Einen grossen Fortschritt bedeutete das Walzentrockenverfahren. Das Trocknen geschieht auf rotierenden Walzen, bei 125° Cel. Die Trocknung muss möglichst rasch vor sich gehen und alles vermieden werden, was Nährwert, Verdaulichkeit und Geschmack beeinträchtigen könnte. Es entsteht so ein gelblich — weisses bis bräunliches Pulver von würzigem Geschmack und Geruch. Diese Trockenhefe hat folgende Zusammensetzung:

Trockensubstanz . . . . .	92 — 94 %
Rohprotein . . . . .	52 — 58 %
Fett . . . . .	3 %
Kohlehydrate . . . . .	25 — 30 %
Asche . . . . .	7 — 9 %

Die Stickstoffsubstanzen bestehen aus 64 % Protein, 26 % Nukleinsubstanzen, 10 % Peptonen und Aminosäuren, die Kohlenhydrate hauptsächlich aus Glykogen und in der Asche sind 32 % Kali und 64 % Phosphorsäure.

Man rechnet auf 1 hl Bier ca 0,1 kg Trockenhefe aus Abfallhefe. In der Schweiz werden pro Jahr ca 2½ Millionen hl Bier erzeugt, die also 200 000 kg Trockenhefe ergeben.

Für den Menschen kommt die Trockenhefe direkt als Eiweissnahrung nicht in Betracht, da die biologisch hochwertigen Eiweisstoffe in zu geringer Menge vorhanden sind. Sie kann aber indirekt dem Menschen dienen, als ausgezeichnetes Futtermittel für Tiere. Den Pferden kann die Hälfte des Hafers durch Trockenhefe ersetzt werden. Wegen des grossen Proteingehaltes ist sie besonders für die Schweinemast geeignet. Auch für die Geflügelzucht wurde sie mit grossem Erfolge verwendet.

Besonders wichtig wird für den Menschen die Hefe durch die, reichlich in ihr enthaltenen spezifisch wirkenden Diätfaktoren, vor allem die Vitamine.

Die Hefe ist das an Vitamin B 1 und B 2 reichste Produkt.

Sie enthält beträchtliche Mengen von Ergosterin, das durch Bestrahlung mit ultravioletem Lichte in das aktive, antirachitische Vitamin D überführt werden kann. Ferner Cholin, das an der Regelung des Blutdruckes und der Darmbewegung beteiligt ist, wie auch eine bedeutende Menge eisen- und phosphorreicher Nukleine. Die Hefe enthält, auch Glutathion, das ein sehr wichtiger

Atmungs- und Schutzstoff ist, und Lezithin, welches die Nerven stärkt.

In schweizerischen Rekruten- und Kaderschulen wurden ausgedehnte Versuche mit Nährhefe angestellt. Die Infektionskrankheiten, besonders die leichten Erkältungen nahmen ab, ebenso die Nachkrankheiten. Schwere Komplikationen waren selten. Bei Grippeepidemien fehlten die sonst so häufigen, wenn auch vorübergehenden Herz- und Nierenschädigungen vollständig. Eiterungen, die sonst im Dienste ziemlich häufig vorkommen, verschwanden fast ganz und heilten, wenn vorhanden, bedeutend rascher. Diese Wirkungen werden dem Gluthathion der Hefe zugeschrieben.

Die Hefe hat also eine kräftige bakterizide und antitoxische Wirkung.

Bezüglich der technischen Verarbeitung unterscheiden wir im Handel 2 Arten:

1) Medizinische oder Heilhefe, die erhalten wird durch trocknen im Vakuum bei 40° Cel. Sie ist gärfähig und enthält noch alle Enzyme. Sie wird verwendet gegen Hautkrankheiten, Darm- und Magenleiden.

2) Pharmazeutische oder Nährhefe. Sie enthält keine lebenden Zellen und Fermente, aber die Vitamine, Glutathion, usw. werden nicht beeinträchtigt.

Die Nährhefe kann heissen und kochenden Speisen sowie auch Gebäcken beigemischt werden, da die in ihr vorhandenen Diätfaktoren inklusive Vitamine durch den Koch- und Backprozess keine Einbusse in ihrer Aktivität erleiden. In neuerer Zeit werden auch Hefeextrakte hergestellt zum Ersatz des Fleischextraktes. Hefeextrakt steht an Wohlgeschmack und Ausgiebigkeit dem Fleischextrakte nicht nach und da die Vitamine und das Glutathion erhalten bleiben, ist er ihm durch seine prophylaktischen und therapeutischen Eigenschaften überlegen.

---