

Objektyp: **ReferenceList**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **55 (2009)**

Heft 3-4

PDF erstellt am: **24.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

(see [25]). Let  $\Sigma_i$  be the set of equivalence classes of cells of dimension  $i$  modulo the  $SL(3, \mathbf{Z})$ -action. For  $\sigma \in \Sigma_i$ , we denote by  $SL(3, \mathbf{Z})_\sigma$  the stabilizer of the cell  $\sigma$  and write  $M_\sigma^q$  for  $M^q$  endowed with the induced action of  $SL(3, \mathbf{Z})_\sigma$  twisted by the orientation character  $SL(3, \mathbf{Z})_\sigma \rightarrow \{\pm 1\}$ . There is a spectral sequence  $E_1^{i,j} = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_i} H^j(SL(3, \mathbf{Z})_\sigma, M_\sigma^q)$  converging to  $H^{i+j}(SL(3, \mathbf{Z}), M^q)$  (see [10], Section VII.7). The stabilizers  $SL(3, \mathbf{Z})_\sigma$  are described in [25], Theorem 2. They are all finite. Thus the spectral sequence reduces to  $E_1^{i,0} = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_i} (M_\sigma^q)^{SL(3, \mathbf{Z})_\sigma}$ . Direct inspection using Theorem 2 in [25] shows that  $E_1^{i \leq 1, 0} = 0$ ,  $E_1^{3,0} \cong (M^q)^4$  and

$$E_2^{2,0} \cong (M^q)^4 \oplus (M^{qA})^3 \oplus (M^{qB}) \oplus (M^{qC})^2,$$

where  $A, B, C$  are respectively the matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

The term  $d_1$  of the spectral sequences is described in [10], Section VII.8. In our case, since the stabilizers of cells of dimension 3 are trivial, the differential  $d_1$  is induced by the inclusions  $(M_\sigma^q)^{SL(3, \mathbf{Z})_\sigma} \hookrightarrow M_\tau^q$  for each 3-dimensional cell  $\tau \in \Sigma_3$  with  $\sigma \subset \tau$  a subface of dimension 2. It follows that  $E_2^{i,j} \cong 0$ . Hence the result follows for  $[G \rightarrow \text{Aut}^+(G)]$ . The case for  $[G \rightarrow \text{Aut}(G)]$  follows using the Künneth formula since  $GL(3, \mathbf{Z}) \cong SL(3, \mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ .  $\square$

REMARK 7.4. For  $n = \dim((\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}) = 4$ , it should be possible to compute explicitly  $H^*([G \rightarrow \text{Aut}^+(G)])$  and  $H^*([G \rightarrow \text{Aut}(G)])$  using Theorem 7.2 and the techniques and results of [17]. For  $n = 5, 6$ , the results of [14] suggest that the cohomology groups  $H^*([G \rightarrow \text{Aut}^+(G)])$  and  $H^*([G \rightarrow \text{Aut}(G)])$  should be non trivial. For larger  $n$ , it seems a difficult question to describe the spectral sequences of Theorem 7.2 explicitly.

#### REFERENCES

- [1] ANDERSON, D. W. Fibrations and geometric realizations. *Bull. Amer. Math. Soc.* 84 (1978), 765–788.
- [2] BAEZ, J. C. and A. D. LAUDA. Higher-dimensional algebra V: 2-groups. *Theory Appl. Categ.* 12 (2004), 423–491.
- [3] BAEZ, J. C., A. S. CRANS, U. SCHREIBER and D. STEVENSON. From loop groups to 2-groups. *Homology Homotopy Appl.* 9 (2007), 101–135.

- [4] BAEZ, J. C. and U. SCHREIBER. Higher gauge theory. In: *Categories in Algebra, Geometry and Mathematical Physics*, 7–30. Contemporary Mathematics 431. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [5] BAEZ, J. C. and D. STEVENSON. The classifying space of a topological 2-group. Preprint arXiv: 0801.3843 (2008-9).
- [6] BOTT, R. On the Chern-Weil homomorphism and the continuous cohomology of Lie groups. *Adv. Math.* 11 (1973), 289–303.
- [7] BOTT, R., H. SHULMAN and J. STASHEFF. On the de Rham theory of certain classifying spaces. *Adv. Math.* 20 (1976), 43–56.
- [8] BREEN, L. Bitorseurs et cohomologie non abélienne. In: *The Grothendieck Festschrift*, Vol. I, 401–476. Progress in Mathematics 86. Birkhäuser, 1990.
- [9] ———. Tannakian categories. In: *Motives*, U. Jannsen et al. eds, 337–376. Proc. Sympos. Pure Math. 55, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [10] BROWN, K. S. *Cohomology of Groups*. Graduate Texts in Mathematics 87. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [11] BROWN, R. and P. J. HIGGINS. The equivalence of  $\infty$ -groupoids and crossed complexes. *Cah. Topol. Géom. Différ.* 22 (1981), 371–386.
- [12] DATUASHVILI, T. and T. PIRASHVILI. On (co)homology of 2-types and crossed modules. *J. Algebra* 244 (2001), 352–365.
- [13] DEDECKER, P. Sur la cohomologie non abélienne I (dimension deux). *Canad. J. Math.* 12 (1960), 231–251.
- [14] ELBAZ-VINCENT, P., H. GANGL et C. SOULÉ. Quelques calculs de la cohomologie de  $GL_N(\mathbf{Z})$  et de la  $K$ -théorie de  $\mathbf{Z}$ . *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 335 (2002), 321–324.
- [15] GINOT, G. and M. STIÉNON.  $G$ -gerbes, principal 2-group bundles and characteristic classes. Preprint arXiv: math.AT: 0801.1238 (2008).
- [16] HENRIQUES, A. Integrating  $L_\infty$ -algebras. *Compos. Math.* 144 (2008), 1017–1045.
- [17] HOROZOV, I. Cohomology of  $GL_4(\mathbf{Z})$  with non-trivial coefficients. Preprint arXiv: math/0611847 (2006).
- [18] LODAY, J.-L. Spaces with finitely many nontrivial homotopy groups. *J. Pure Appl. Algebra* 24 (1982), 179–202.
- [19] MOERDIJK, I. and J. MRČUN. *Introduction to Foliations and Lie Groupoids*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 91. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [20] MOERDIJK, I. and J.-A. SVENSSON. Algebraic classification of equivariant homotopy 2-types. *J. Pure Appl. Algebra* 89 (1993), 187–216.
- [21] NOOHI, B. Notes on 2-groupoids, 2-groups and crossed modules. *Homology Homotopy Appl.* 9 (2007), 75–106.
- [22] PRESSLEY, A. and G. SEGAL. *Loop Groups*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.
- [23] SEGAL, G. Classifying spaces and spectral sequences. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* 34 (1968), 105–112.
- [24] SERRE, J.-P. *Trees*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.

- [25] SOULÉ, C. The cohomology of  $SL_3(\mathbf{Z})$ . *Topology* 17 (1978), 1–22.
- [26] STREET, R. The algebra of oriented simplexes. *J. Pure Appl. Algebra* 49 (1987), 283–335.
- [27] ZHU, C.  $n$ -groupoids and stacky groupoids. Preprint arXiv: 0801.2057 (2008-9). To appear in *Int. Math. Res. Not.*
- [28] — Kan replacement of simplicial manifolds. Preprint arXiv: 0812.4150 (2008-9). To appear in *Lett. Math. Phys.*

*(Reçu le 13 juin 2008; version révisée reçue le 20 juin 2009)*

Grégory Ginot

UPMC – Université Pierre et Marie Curie  
Institut mathématique de Jussieu – CNRS UMR 7581  
4, place Jussieu  
F-75252 Paris  
France  
*e-mail*: [ginot@math.jussieu.fr](mailto:ginot@math.jussieu.fr)

Ping Xu

Department of Mathematics  
Penn State University  
University Park, PA 16802  
U. S. A.  
*e-mail*: [ping@math.psu.edu](mailto:ping@math.psu.edu)