

Periodic p-torsion in the Farrell cohomology of some symplectic groups

Autor(en): **Busch, Cornelia Minette**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **54 (2008)**

Heft 1-2

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-109888>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

19

PERIODIC p -TORSION IN THE FARRELL COHOMOLOGY OF SOME SYMPLECTIC GROUPS

by Cornelia Minette BUSCH

For an odd prime p and a nonzero integer $0 \neq n \in \mathbf{Z}$ we consider $\mathrm{Sp}(p-1, \mathbf{Z}[1/n])$, the group of symplectic matrices with coefficients in $\mathbf{Z}[1/n]$. It is defined to be

$$\mathrm{Sp}(p-1, \mathbf{Z}[1/n]) := \left\{ Y \in \mathrm{GL}(p-1, \mathbf{Z}[1/n]) \mid Y^t J Y = J := \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

where $\mathbf{1}$ denotes the identity on $\mathbf{Z}[1/n]^{(p-1)/2}$. This symplectic group has finite virtual cohomological dimension and contains elements of order p . Moreover $\mathrm{Sp}(p-1, \mathbf{Z}[1/n])$ has p -periodic Farrell cohomology since each of its elementary abelian p -subgroups has rank ≤ 1 . Let

$$\widehat{H}^*(\mathrm{Sp}(p-1, \mathbf{Z}[1/n]), \mathbf{Z})_{(p)}$$

denote the p -primary part of the Farrell cohomology of $\mathrm{Sp}(p-1, \mathbf{Z}[1/n])$ with coefficients in $\mathbf{Z}$.

QUESTION 19.1. *What is the p -period of the Farrell cohomology ring*

$$\widehat{H}^*(\mathrm{Sp}(p-1, \mathbf{Z}[1/n]), \mathbf{Z})?$$

Here p is an odd prime and $0 \neq n \in \mathbf{Z}$ is any nonzero integer.

Since the group we are considering has the properties given above we get, by a result of K. S. Brown [1], the isomorphism

$$\widehat{H}^*(\mathrm{Sp}(p-1, \mathbf{Z}[1/n]), \mathbf{Z})_{(p)} \cong \prod_{P \in \mathfrak{P}} \widehat{H}^*(N(P), \mathbf{Z})_{(p)}.$$

Here $\mathfrak{P}$ is a set of representatives of conjugacy classes of subgroups P of order p in $\mathrm{Sp}(p-1, \mathbf{Z}[1/n])$ and $N(P)$ denotes the normalizer of P .

In order to use this isomorphism, we analyze the structure of the subgroups of order p in $\mathrm{Sp}(p-1, \mathbf{Z}[1/n])$. We see in [3] that the conjugacy classes of elements of order p in $\mathrm{Sp}(p-1, \mathbf{Z}[1/n])$ are related to some ideal classes in $\mathbf{Z}[1/n][\xi]$, where ξ is a primitive p th root of unity. Therefore, if $n = 1$, the number of conjugacy classes of elements of order p in $\mathrm{Sp}(p-1, \mathbf{Z})$ depends on h^- , the relative class number of p . In [2] we get the following result.

THEOREM 19.2. *Let p be an odd prime for which the relative class number h^- is odd and let y be such that $p-1 = 2^r y$ with y odd. Then the period of $\widehat{H}^*(\mathrm{Sp}(p-1, \mathbf{Z}), \mathbf{Z})_{(p)}$ equals $2y$.*

The smallest prime p for which h^- is even is $p = 29$. In fact it is not known if the statement of Theorem 19.2 is true for primes with even relative class number. Since the number of ideal classes in $\mathbf{Z}[\xi]$ is finite, it is possible to choose $0 \neq n \in \mathbf{Z}$ such that $\mathbf{Z}[1/n][\xi + \xi^{-1}]$ and $\mathbf{Z}[1/n][\xi]$ are principal ideal domains and moreover the odd prime p divides n . With these assumptions, we get the following result [4].

THEOREM 19.3. *Choose p and n as above. Let y be the greatest odd divisor of $p-1$. Then $2y$ is the p -period of the Farrell cohomology ring $\widehat{H}^*(\mathrm{Sp}(p-1, \mathbf{Z}[1/n]), \mathbf{Z})$ and, moreover, for any $i \in \mathbf{Z}$ we get an isomorphism*

$$\widehat{H}^i(\mathrm{Sp}(p-1, \mathbf{Z}[1/n]), \mathbf{Z}) \cong \widehat{H}^{i+d}(\mathrm{Sp}(p-1, \mathbf{Z}[1/n]), \mathbf{Z})$$

with $d = y$ if and only if for each $j \mid y$ a prime $q \mid n$ exists with inertia degree f_q such that $j \mid \frac{p-1}{2f_q}$, and with $d = 2y$ if for some j no such q exists.

Here f_q is the inertia degree of the prime q in $\mathbf{Z}[\xi]$. It is the order of q in the group of units of $\mathbf{F}_p$. It is a consequence of Dirichlet's theorem on primes in arithmetic progression that for every $f_q \mid p-1$ an infinite number of primes q exist with inertia degree f_q . Let us guess the answer to Question 19.1.

CONJECTURE 19.4. *Let p be an odd prime. Then the p -period of the Farrell cohomology ring $\widehat{H}^*(\mathrm{Sp}(p-1, \mathbf{Z}[1/n]), \mathbf{Z})$ equals $2y$ for all $n \neq 0$, where y is the greatest odd divisor of $p-1$.*

REFERENCES

- [1] BROWN, K.S. *Cohomology of Groups*. Graduate Texts in Mathematics 87. Springer, 1982.
- [2] BUSCH, C.M. The Farrell cohomology of $\mathrm{Sp}(p-1, \mathbf{Z})$. *Doc. Math.* 7 (2002), 239–254.
- [3] ——— Conjugacy classes of p -torsion in symplectic groups over S -integers. *New York J. Math.* 12 (2006), 169–182.
- [4] ——— Isomorphisms in the Farrell cohomology of $\mathrm{Sp}(p-1, \mathbf{Z}[1/n])$. To appear in *New York J. Math.* 14 (2008).

Cornelia Minette Busch

Katholische Universität Eichstätt-Ingolstadt
Mathematisch-Geographische Fakultät
D-85071 Eichstätt
Germany
e-mail: cornelia.busch@ku-eichstaett.de