

# Planar 2-cocycles of finite groups

Autor(en): **Chen, Yu Qing**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **54 (2008)**

Heft 1-2

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-109893>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## 24

### PLANAR 2-COCYCLES OF FINITE GROUPS

by Yu Qing CHEN

Let  $G$  be a finite group and  $A$  a  $G$ -module. Recall [2] that a (normalized) 2-cocycle of  $G$  with coefficients in  $A$  is a function

$$f: G \times G \rightarrow A$$

satisfying

- (i)  $f(g, 1) = f(1, g) = 0$ , for all  $g \in G$ ;
- (ii)  $f(g, h) + f(gh, k) = gf(h, k) + f(g, hk)$  for all  $g, h, k \in G$ .

DEFINITION 24.1. A 2-cocycle of  $G$  with coefficients in  $A$  is called *planar* (the extension group acts on a finite projective plane as a collineation group [3], [4], [5]) if

- (i)  $|G| = |A|$ ;
- (ii) for every  $1 \neq g \in G$ , the maps

$$f(g, \ ): G \rightarrow A$$

and

$$f(\ , g): G \rightarrow A$$

are bijections.

EXAMPLE 24.2. Let  $\mathbf{F}$  be a finite field. We can regard  $\mathbf{F}$  as a trivial  $\mathbf{F}$ -module. For any Galois automorphism  $\sigma$ , we define  $f_\sigma: \mathbf{F} \times \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$  by

$$f_\sigma(x, y) = x\sigma(y).$$

The function  $f_\sigma$  is a planar 2-cocycle of the additive group of  $\mathbf{F}$  with coefficients in the same group.

CONJECTURE 24.3. *If  $G$  has a planar 2-cocycle, then  $G$  is a  $p$ -group.*

REMARK 24.4. A more general conjecture is the so-called prime power conjecture, which asserts that the order of a finite projective plane is always a power of a prime ([1], [5]).

CONJECTURE 24.5 (Stronger version). *If  $G$  has a planar 2-cocycle with coefficients in a  $G$ -module  $A$ , then  $G$  and the underlying group of  $A$  are elementary abelian groups.*

REMARK 24.6. In the case when  $G$  is abelian and the cocycle is symmetric (i.e.  $f(x, y) = f(y, x)$  for all  $x$  and  $y$  in  $G$ ), which is equivalent to the extension group being abelian, Conjecture 24.3 is true [1] but we do not know whether the stronger version is also true.

#### REFERENCES

- [1] BLOKHUIS, A., D. JUNGnickel and B. SCHMIDT. Proof of the prime power conjecture for projective planes of order  $n$  with abelian collineation groups of order  $n^2$ . *Proc. Amer. Math. Soc.* 130 (2002), 1473–1476.
- [2] BROWN, K. S. *Cohomology of Groups*. Graduate Texts in Mathematics 87. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982.
- [3] GALATI, J. C. A group extension approach to relative difference sets. *J. Combin. Des.* 12 (2004), 279–298.
- [4] PERERA, A. A. I. and K. J. HORADAM. Cocyclic generalised Hadamard matrices and central relative difference sets. *Des. Codes Cryptogr.* 15 (1998), 187–200.
- [5] POTT, A. *Finite Geometry and Character Theory*. Lecture Notes in Mathematics 1601. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995.

Yu Qing Chen

Department of Mathematics and Statistics  
Wright State University  
Dayton, OH 45435  
USA  
*e-mail*: yuqing.chen@wright.edu