pour tout $\varepsilon > 0$ (par la majoration classique $\tau(n) \ll n^{\varepsilon}$: voir [50, p. 83, Corollaire 11]). Comme (22) suggère que $\mathcal{G}(n) \overset{?}{\gg} n$, on déduit donc de (22) et (23) que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \Lambda(k)\Lambda(n-k) \overset{?}{\sim} 2 \prod_{p \geq 3} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right) \cdot \prod_{\substack{p \mid n \\ p \geq 3}} \frac{p-1}{p-2} \cdot n ,$$

qui est l'une des variantes de l'estimation prédite par Hardy et Littlewood [28]. De tels arguments s'appliquent probablement à la conjecture de Schinzel énoncée au paragraphe 13.1. Enfin, rappelons que le théorème le plus proche de la conjecture de Goldbach est celui de Chen [9] : « *Tout entier pair suffisamment grand est la somme d'un nombre premier et d'un entier produit d'au plus deux nombres premiers.* »

REMERCIEMENTS. Ils vont à K. Conrad pour ses commentaires pertinents qui nous ont permis d'améliorer une version préliminaire de ce texte.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAIER, S. On the Bateman-Horn conjecture. *J. Number Theory 96* (2002), 432–448.

[2] —— A probabilistic model for primes in random sets. Prépublication (2002).

[3] BATEMAN, P. T. et R. A. HORN. A heuristic asymptotic formula concerning the distribution of prime numbers. *Math. Comp. 16* (1962), 363–367.

[4] BATEMAN, P. T. et R. M. STEMMLER. Waring's problem for algebraic numbers and primes of the form $(p^r - 1)/(p^d - 1)$. *Illinois J. Math. 6* (1962), 142–156.

[5] BOMBIERI, E. Le grand crible dans la théorie analytique des nombres. *Astérisque 18*, 1974.

[6] BOUNIAKOWSKY, V. Sur les diviseurs numériques invariables des fonctions rationnelles entières. *Mémoires sc. math. et phys. 6* (1854), 306–329.

[7] BRUN, V. Über das Goldbachsche Gesetz und die Anzahl der Primzahlpaare. *Arch. f. Math. og Naturv. 34* (1915), 3–19.

[8] CANTOR, G. Vérification jusqu'à 1000 du théorème empirique de Goldbach. *Assoc. Franç. Caen XXIII* (1894), 117–134.

[9] CHEN, J. R. On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes. *Sci. Sinica 16* (1973), 157–176.

[10] CHERWELL. Note on the distribution of the intervals between prime numbers. *Quart. J. Math., Oxford Ser. 17* (1946), 46–62.

[11] CHERWELL et E. M. WRIGHT. The frequency of prime-patterns. *Quart. J. Math., Oxford Ser. (2) 11* (1960), 60–63.

[12] COLLIOT-THÉLÈNE, J.-L. et J.-J. SANSUC. Sur le principe de Hasse et l'approximation faible, et sur une conjecture de Schinzel. *Acta Arith. 41* (1982), 33–53.

[13] COLLIOT-THÉLÈNE, J.-L., A. SKOROBOGATOV et P. SWINNERTON-DYER. Hasse principle for pencils of curves of genus one whose Jacobians have rational 2-division points. *Invent. Math. 134* (1998), 579–650.

[14] CONRAD, K. Hardy-Littlewood constants. *Mathematical Properties of Sequences and Other Combinatorial Structures.* Los Angeles, CA, 2002, 133–154, Kluwer Acad. Publ., Boston, 2003.

[15] CONRAD, B. et K. CONRAD. The Möbius function and the residue theorem. *J. Number Theory 110* (2005), 22–36.

[16] CONRAD, B., K. CONRAD et R. GROSS. Irreducible specialization in genus 0. Prépublication (2005).

[17] DAVENPORT, H. et A. SCHINZEL. A note on certain arithmetical constants. *Illinois. J. Math. 10* (1966), 181–185.

[18] DICKSON, L. A new extension of Dirichlet's theorem on prime numbers. *Messenger of Math. 33* (1904), 155–161.

[19] DIRICHLET, G. L. Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält. *Abh. Akad. Berlin* (1837), 45–71.

[20] EULER, L. Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs. *Bibliothèque impartiale 3* (1751), 10–31. (La citation reproduite ici se trouve dans la réédition de l'article dans les *Opera Posthuma 1* (1862), 76–84 et est disponible sur le site http://math.dartmouth.edu/~euler/docs/originals/E175.pdf.)

[21] FRIEDLANDER, J. et H. IWANIEC. The polynomial X^2+Y^4 captures its primes. *Ann. of Math. (2) 148* (1998), 945–1040.

[22] FRÖHLICH, A. et M. J. TAYLOR. *Algebraic Number Theory.* Cambridge studies in advanced mathematics *27*, 1991.

[23] GOLDBACH, C. Lettre à L. Euler datée du 7 juin 1742. Facsimilé disponible sur le site http://www.mathstat.dal.ca/~joerg/pic/g-letter.jpg.

[24] GOLOMB, S. The lambda method in prime number theory. *J. Number Theory 2* (1970), 193–198.

[25] HADAMARD, J. Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques. *Bull. S. M. F. 24* (1896), 199–220.

[26] HARDY, G. H. *Divergent Series.* Oxford University Press, first edition, 1949.

[27] HARDY, G. H. et J. E. LITTLEWOOD. Tauberian theorem concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive. *Proc. Lond. Math. Soc. (2) 13* (1914), 174–191.

[28] HARDY, G. H. et J. E. LITTLEWOOD. Some problems of 'Partitio Numerorum', III. On the expression of a number as a sum of primes. *Acta Math. 44* (1923), 1–70.

[29] HARDY, G. H. et E. M. WRIGHT. *An Introduction to the Theory of Numbers.* Oxford Science Publications, fifth edition, 1979.

[30] HEATH-BROWN, D. R. Primes represented by x^3+2y^3. *Acta Math. 186* (2001), 1–84.

[31] IWANIEC, H. Primes represented by quadratic polynomials in two variables. *Acta Arith. 24* (1974), 435–459.

[32] KOREVAAR, J. A century of complex tauberian theory. *Bull. Amer. Math. Soc. 39* (2002), 475–531.

[33] —— Distributional Wiener-Ikehara theorem and twin primes. *Indag. Math. (N.S.) 16* (2005), 37–49.

[34] KUROKAWA, N. Special values of Euler products and Hardy-Littlewood constants. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 60* (1984), 325–338.

[35] —— On the meromorphy of Euler products I, II. *Proc. Lond. Math. Soc. (3) 53* (1986), 1–47; 209–236.

[36] LANDAU, E. Ueber die zahlentheoretische Function $\varphi(n)$ und ihre Beziehung zum Goldbach'schen Satz. *Gött. Nachr.* (1900), 177–186.

[37] LANG, S. La conjecture de Bateman-Horn. *Gaz. Math. 67* (1996), 82–84.

[38] —— *Algebraic Number Theory.* Addison-Wesley, 1970.

[39] MERTENS, F. Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie. Ueber die Vertheilung der Primzahlen. *Borchardts J. für Math. (J. reine angew. Math.) 78* (1874), 46–63.

[40] NEWMAN, D. J. Simple analytic proof of the prime number theorem. *Amer. Math. Monthly 87* (1980), 693–696.

[41] DE POLIGNAC, A. Six propositions arithmologiques déduites du crible d'Ératosthène. *Nouv. Ann. Math. 8* (1849), 423–429.

[42] PÓLYA, G. Heuristic reasoning in the theory of numbers. *Amer. Math. Monthly 66* (1959), 375–384.

[43] RIESZ, M. Ein Konvergenzsatz für Dirichletsche Reihen. *Acta Math. 40* (1916), 349–361.

[44] SCHINZEL, A. et W. SIERPIŃSKI. Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers. *Acta Arith. 4* (1958), 185–208.

[45] SCHINZEL, A. A remark on a paper of Bateman and Horn. *Math. Comp. 17* (1963), 445–447.

[46] SERRE, J.-P. *Représentations linéaires des groupes finis.* Hermann, Paris, 1967.

[47] STÄCKEL, P. Ueber Goldbach's empirisches Theorem. *Gött. Nachr.* (1896), 292–299.

[48] SYLVESTER, J. J. On the partition of an even number into two primes. *Proc. Lond. Math. Soc. 4* (1872), 4–6.

[49] TCHEBICHEF, P. L. Sur la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée. *J. de Liouville 17* (1852), 341–365.

[50] TENENBAUM, G. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres.* Publication de l'Institut Élie Cartan *13*, Université de Nancy, 1990.

[51] TITCHMARSH, E. C. *The Theory of the Riemann Zeta-Function.* Oxford Science Publications, second edition, 1986.

[52] DE LA VALLÉE-POUSSIN, C. Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. *Brux. S. sc. 21 B* (1897), 251–342 et 343–368.

Certaines des références anciennes peuvent être difficiles à trouver. Des versions scannées des articles [25, 36, 47, 49] sont accessibles sur certaines bibliothèques numériques recensées sur http://www.library.cornell.edu/math/digitalization.php. De plus, la base de données *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* donne un lien direct vers la version scannée de nombreux articles datés d'avant 1942: http://www.emis.de/MATH/JFM/.

(Reçu le 13 septembre 2005)

Marc Hindry

Institut de Mathématiques de Jussieu
Université Denis Diderot – Paris VII
Boîte 7012
2 place Jussieu
F-75251 Paris Cedex 05
France
e-mail: hindry@math.jussieu.fr

Tanguy Rivoal

Institut Fourier
CNRS UMR 5582 – Université Grenoble 1
100 rue des Maths, BP 74
F-38402 Saint-Martin d'Hères Cedex
France
e-mail: rivoal@ujf-grenoble.fr