Une démonstration du théorème de recouvrement de surfaces d'Ahlfors

Autor(en): **Thélin, Henry de**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **51 (2005)**

Heft 3-4: **L'enseignement mathématique**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-3594

L'Enseignement Mathématique, t. 51 (2005), p. 203–209

UNE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE RECOUVREMENT DE SURFACES D'AHLFORS

par Henry DE THÉLIN

1. INTRODUCTION

Considérons Σ et Σ_0 des surfaces de Riemann compactes, connexes qui ont éventuellement du bord (voir [2], p. 23) et $f\colon \Sigma \longrightarrow \Sigma_0$ une application holomorphe non constante entre ces surfaces (cela signifie que f est holomorphe à l'intérieur de Σ et que f se prolonge continûment jusqu'au bord). Si $f(\partial\Sigma) \subset \partial\Sigma_0$ (on parlera d'application propre) la formule de Riemann-Hurwitz donne la caractéristique d'Euler de Σ en fonction de celle de Σ_0. Plus précisément :

$$\chi(\Sigma) + r = d\chi(\Sigma_0)\,,$$

où r est le nombre de ramifications de f et d est le degré de f. En particulier, nous avons l'inégalité :

$$\chi(\Sigma) \leq d\chi(\Sigma_0)\,.$$

Le théorème d'Ahlfors (voir [1]) permet d'étendre en quelque sorte cette inégalité au cas où f est non propre. Plus précisément, si S désigne le nombre de feuillets moyen au-dessus de Σ_0, i.e.

$$S = \frac{\text{aire de } f(\Sigma) \text{ comptée avec multiplicité}}{\text{aire de } \Sigma_0}\,,$$

et L, la longueur du bord relatif de Σ (i.e. la longueur de $f(\partial\Sigma) - \partial\Sigma_0$) :

THÉORÈME. *Il existe une constante h qui ne dépend que de Σ_0 pour laquelle :*

$$\min(\chi(\Sigma), 0) \leq S\chi(\Sigma_0) + hL\,.$$

Ce théorème reste vrai lorsqu'on prend pour Σ_0 une surface de Riemann compacte, connexe qui possède éventuellement du bord, à laquelle on enlève ensuite un nombre fini de points. Le fait de pouvoir considérer des surfaces Σ_0 de ce type est intéressant. En effet, en utilisant le théorème avec $\Sigma_0 = \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) - \{a,b,c\}$ (où a, b et c sont trois points de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$) et avec Σ une certaine suite de disques, on peut donner une preuve du théorème de Picard (voir [4], p. 350).

L'objectif de cet article est de donner une démonstration courte du théorème de L. Ahlfors qui lui a permis de réaliser une version géométrique de la théorie des distributions de valeurs de R. Nevanlinna.

Signalons aussi que ce théorème a servi récemment dans des problèmes de dynamique holomorphe (voir par exemple [3]).

2. Démonstration du théorème

Commençons par préciser dans quel cadre nous allons nous placer.

Le théorème d'Ahlfors n'a d'intérêt que si $\chi(\Sigma_0)$ est négatif (chose que l'on supposera dans la suite). Ensuite, dans ce théorème, la surface Σ_0 peut être munie de métriques très générales (voir par exemple [4]). Cependant, bien que notre démonstration s'étende à ces cas, par souci de simplicité, Σ_0 sera munie d'une métrique lisse. Enfin, nous allons supposer à partir de maintenant que Σ_0 n'a pas de bord ni de points enlevés et nous expliquerons à la fin de cet article comment traiter les autres cas.

Fixons un point p de Σ_0. En utilisant la décomposition canonique de Σ_0 (voir [5], p. 23), nous pouvons construire $2g$ courbes simples et lisses (où g est le genre de Σ_0) qui passent par le point p, qui ne s'intersectent pas en dehors du point p, et telles que la surface Σ_0 privée de ces courbes soit un disque D_0. Ce disque possède $4g$ côtés que nous pouvons supposer ne passant pas par les valeurs critiques de f.

Notons $\mathcal{C}$, l'ensemble des composantes connexes de Σ au-dessus du disque D_0 (i.e. dans $f^{-1}(D_0)$).

Voici maintenant le plan de la suite de la démonstration. Dans un premier paragraphe, nous allons enlever les composantes Δ de $\mathcal{C}$ pour lesquelles $f(\Delta)$ est très différent de Σ_0. Cette modification de Σ permettra de se rapprocher du cas où f est un revêtement. Le second paragraphe sera ensuite consacré au calcul de $\chi(\Sigma)$. Enfin, dans le dernier, on traitera le cas où Σ_0 a du bord et des points enlevés.

2.1 Modification de Σ

Si Δ est une composante au-dessus de D_0, on peut décomposer $f(\Delta)$ en strates: Δ^1 est la partie de $f(\Delta)$ recouverte au moins une fois, ..., Δ^p celle recouverte p fois (où p est la multiplicité maximale de $f(\Delta)$). On note γ_j la partie de $f(\partial\Sigma)$ qui borde Δ^j et on fixe $\epsilon > 0$ petit (en particulier devant la longueur du plus petit côté de D_0). Alors, si $l(\gamma_j)$ désigne la longueur de γ_j, on peut avoir:

- l'existence d'un j dans $\{1,\dots,p\}$ avec $l(\gamma_j) \geq \epsilon$ (on dira que la strate en question a un *bord long*) ou:
- pour tout j dans $\{1,\dots,p\}$, $l(\gamma_j) \leq \epsilon$ (on parlera de *bord court*).

On va maintenant pouvoir faire une dichotomie sur le dernier cas. Pour cela, on va utiliser les faits suivants (qui sont vrais dans notre contexte car d'une part on considère une métrique lisse sur Σ_0 et d'autre part le bord de D_0 est lisse par morceaux):

Fait 1 (Inégalité isopérimétrique linéaire). *Il existe des constantes ϵ_0 et h qui ne dépendent que de Σ_0 telles que toute courbe simple fermée lisse par morceaux γ qui vit dans une boule $B(x,\epsilon_0)$ entoure un domaine dont l'aire $a(\gamma)$ vérifie*

$$a(\gamma) \leq h\, l(\gamma)\,.$$

Ici $l(\gamma)$ désigne la longueur de γ.

Fait 2 (Régularité du bord de D_0). *Il existe une constante h qui ne dépend que de D_0, telle que pour toute courbe γ qui touche le bord de D_0 en deux points, on a*

$$\min(\lambda, \lambda') \leq h\, l(\gamma)\,,$$

où λ et λ' sont les longueurs des deux composantes de $\partial D_0 - \gamma$.

En combinant les faits 1 et 2, on obtient:

Conséquences

Si γ est une courbe de longueur inférieure à ϵ qui joint deux points du bord de D_0 alors il existe un disque $D(\gamma)$ qui est bordé par la réunion de γ avec l'une des deux composantes de $\partial D_0 - \gamma$ et qui possède une aire inférieure à $h\, l(\gamma)$ (on rappelle que l'on note h toute constante qui ne dépend que de Σ_0). De plus $D_0 - D(\gamma)$ est toujours un disque.

Si γ est une courbe fermée de longueur inférieure à ϵ qui ne touche pas le bord de D_0 alors γ borde un disque $D(\gamma)$ qui a une aire majorée par $h\,l(\gamma)$.

Maintenant, si Δ est une composante telle que toutes les strates de $f(\Delta)$ ont un bord court (i.e. pour tout j dans $\{1,\ldots,p\}$, $l(\gamma_j)\leq\epsilon$), on en déduit donc que:

$$\text{aire de } \Delta^j \geq \text{aire de } D_0 - h\,l(\gamma_j)\,, \quad \text{pour un certain } j\in\{1,\ldots,p\}\,.$$

Ou bien:

$$\text{aire de } \Delta^j \leq h\,l(\gamma_j)\,, \quad \text{pour tout } j\in\{1,\ldots,p\}\,.$$

En effet, en utilisant une décomposition de γ_j en morceaux qui joignent deux points du bord de D_0 ou en courbes fermées qui ne touchent pas le bord de D_0, on construit une union de disques $\cup_i D(\gamma_{j,i})$ dont l'aire est majorée par $h\,l(\gamma_j)$ et telle que $D_0-\cup_i D(\gamma_{j,i})$ est un connexe (disque avec des trous). En remarquant que Δ^j contient ce connexe ou bien est incluse dans son complémentaire, on obtient la dichotomie précédente.

Ce sont les composantes du dernier type $(\Sigma^i)_{i\in I}$ qui ont leur image la plus différente de Σ_0 (elles vérifient $l(\gamma_j)\leq\epsilon$ et aire de $\Delta^j\leq h\,l(\gamma_j)$ pour tout $j\in\{1,\ldots,p\}$). Les Σ^i seront appelées mauvaises composantes et nous allons les enlever.

Remarquons que nous avons deux possibilités:

soit $\Sigma=\cup_{i\in I}\Sigma^i$, ce qui implique:

$$S\leq hL$$

par définition même des mauvaises composantes (dans ce cas le théorème est démontré),

soit $\Sigma\neq\cup_{i\in I}\Sigma^i$ et alors:

$$\chi(\Sigma)\leq\chi(\Sigma-\cup_{i\in I}\Sigma^i)\,,$$

car les composantes Σ^i (avec i dans I) ont du bord en commun avec Σ.

Par ailleurs, toujours par définition des mauvaises composantes, la surface $\widetilde{\Sigma}=\Sigma-\cup_{i\in I}\Sigma^i$ a la longueur de son bord relatif majoré par hL et l'aire de $f(\widetilde{\Sigma})$ diffère de celle de $f(\Sigma)$ d'au plus hL.

En résumé, si on démontre que

$$\chi(\widetilde{\Sigma})\leq\widetilde{S}\chi(\Sigma_0)+h\widetilde{L}$$

(avec des notations évidentes), le théorème sera démontré. En particulier, quitte à remplacer Σ par $\widetilde{\Sigma}$, nous pourrons supposer dans toute la suite que Σ vérifie la propriété suivante:

PROPRIÉTÉ DE Σ. *Pour toutes les composantes Δ de Σ au-dessus de D_0, il existe une strate Δ^j de $f(\Delta)$ qui a soit un bord long (i.e. $l(\gamma_j) \geq \epsilon$) soit une aire minorée par* aire de $D_0 - h\, l(\gamma_j)$.

2.2 CALCUL DE $\chi(\Sigma)$

Désignons toujours par $\mathcal{C}$ l'ensemble des composantes connexes de Σ au-dessus du disque D_0 (i.e. dans $f^{-1}(D_0)$). On notera s le nombre de relevés du point p par f. Parmi les composantes connexes dans les préimages par f des côtés de D_0, il y en a certaines qui ne sont pas dans le bord de Σ. Nous les appellerons arêtes de Σ et nous noterons a leur nombre. La surface Σ privée des s relevés du point p s'obtient en recollant les composantes de $\mathcal{C}$ le long des a arêtes. En particulier, nous avons:

$$\chi(\Sigma) = \sum_{\Delta \in \mathcal{C}} \chi(\Delta) - a + s\,.$$

Grâce à notre simplification effectuée au paragraphe précédent, on sait qu'une composante de Σ au-dessus du disque D_0 possède une strate qui a soit un bord long, soit une aire supérieure à aire$(D_0) - h\, l(\gamma_j) = A_0 - h\, l(\gamma_j)$.

Il y en a au plus $\frac{L}{\epsilon}$ qui possèdent une strate avec un bord long.

Si $\mathcal{S}$ désigne les composantes qui possèdent une strate d'aire supérieure à $A_0 - h\, l(\gamma_j)$, on a:

$$\sum_{j \in \mathcal{S}} (A_0 - h\, l(\gamma_j)) \leq \text{aire de } f(\Sigma) \text{ comptée avec multiplicité} = A_0 S\,.$$

Il y a donc au plus $S + hL$ telles composantes.

On a ainsi obtenu la majoration:

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{C}} \chi(\Delta) \leq S + hL\,.$$

Ensuite, si on choisit le point p de sorte à être peu recouvert, nous avons $s \leq S$. Pour finir, il nous faut donc minorer le nombre d'arêtes a.

On se fixe une composante connexe Δ au-dessus de D_0.

La composante $f(\Delta)$ contient des strates pour lesquelles on a $l(\gamma_j) \geq \epsilon$ et d'autres avec cette longueur plus petite que ϵ. Les strates de la deuxième espèce se divisent en deux catégories: celles qui ont une aire inférieure à $h\, l(\gamma_j)$ et celles pour qui cette aire est supérieure à $A_0 - h\, l(\gamma_j)$. Si $m(\Delta)$ désigne le nombre de strates de la dernière sorte, on a:

$$\nu(\Delta) \geq 4g m(\Delta)\,,$$

où $\nu(\Delta)$ désigne le nombre d'arêtes de Σ qui bordent Δ. En effet, considérons γ un sous-segment d'un côté de D_0 choisi de sorte qu'un petit voisinage de γ dans D_0 soit inclus dans les $m(\Delta)$ strates (c'est possible car les strates s'emboîtent les unes dans les autres et parce que ϵ est très petit devant la longueur du plus petit côté de D_0); alors γ a au moins $m(\Delta)$ relevés par f qui sont inclus dans des arêtes de Δ.

La minoration de $\sum m(\Delta)$ entraîne donc celle du nombre d'arêtes $a \geq \frac{1}{2} \sum \nu(\Delta)$. Pour l'obtenir, on va minorer l'aire recouverte par les $\sum m(\Delta)$ strates.

Les strates pour lesquelles la longueur de γ_j est supérieure à ϵ sont en nombre au plus égal à $\frac{L}{\epsilon}$. L'union de ces éléments est donc d'aire inférieure à $\frac{L}{\epsilon}$ aire$(D_0) = hL$.

De même, l'ensemble des strates qui ont un petit bord et une aire majorée par $h\,l(\gamma_j)$ a une aire majorée par hL.

En combinant ces deux majorations, on obtient que l'aire recouverte par les strates qui ont un petit bord et une aire minorée par $A_0 - h\,l(\gamma_j)$ est supérieure à

$$A_0 S - hL\,.$$

Autrement dit, on a:

$$a \geq \frac{4g}{2} \sum_{\Delta \in C} m(\Delta) \geq \frac{4g}{2} \frac{1}{A_0} (A_0 S - hL) \geq 2gS - hL\,.$$

Finalement, on a:

$$\chi(\Sigma) = \sum_{\Delta \in C} \chi(\Delta) - a + s \leq (1 - 2g + 1)S + hL = \chi(\Sigma_0)S + hL\,,$$

qui est l'inégalité que l'on voulait démontrer.

2.3 Le cas où Σ_0 a du bord et des points enlevés

Supposons maintenant que Σ_0 est une surface de Riemann compacte, connexe qui possède m composantes de bord qui sont des courbes simples fermées et lisses et à laquelle on enlève ensuite n points. Soit p un point de Σ_0. Comme dans le cas sans bord, on peut construire $2g$ courbes simples et lisses (où g est le genre de Σ_0) qui passent par le point p, qui ne s'intersectent pas en dehors du point p, et telles que la surface Σ_0 privée de ces courbes soit un disque avec $n+m$ trous. Maintenant, en enlevant à ce disque troué des segments qui joignent p aux $n+m$ trous (segments qui ne se rencontrent qu'au point p), on obtient ainsi un disque D_0 qui possède $4g + 2(n+m) + m$

côtés ($4g + 2(n + m)$ qui proviennent des courbes et des segments construits et m qui sont les bords lisses de Σ_0 privés d'un point).

A partir de ce disque D_0, on peut refaire tout ce que l'on a fait dans les paragraphes précédents. La seule chose qui change c'est la minoration du nombre d'arêtes. En effet, si on fixe une composante Δ au-dessus de D_0 et que l'on note encore $m(\Delta)$ le nombre de strates de $f(\Delta)$ qui ont une aire supérieure à $A_0 - h\,l(\gamma_j)$ et un bord de longueur plus petit que ϵ, on a :

$$\nu(\Delta) \geq (4g + 2(n + m))m(\Delta)\,,$$

où $\nu(\Delta)$ désigne le nombre d'arêtes de Σ qui bordent Δ (il n'y a pas d'arêtes au-dessus des m bords de D_0 qui sont les bords lisses de Σ_0 privés d'un point). En suivant alors le même procédé que dans le paragraphe précédent, on en déduit :

$$a \geq (2g + n + m)S - hL\,.$$

D'où :

$$\chi(\Sigma) = \sum_{\Delta \in C} \chi(\Delta) - a + s \leq (1 - 2g - n - m + 1)S + hL = \chi(\Sigma_0)S + hL\,,$$

qui est l'inégalité que l'on voulait démontrer.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AHLFORS, L. Zur Theorie der Überlagerungsflächen. *Acta Math. 65* (1935), 157–194.

[2] AHLFORS, L. et L. SARIO. *Riemann Surfaces.* Princeton Mathematical Series *26*, 1960.

[3] BEDFORD, E., M. LYUBICH et J. SMILLIE. Polynomial diffeomorphisms of C^2. IV. The measure of maximal entropy and laminar currents. *Invent. Math. 112* (1993), 77–125.

[4] NEVANLINNA, R. *Analytic Functions.* Springer-Verlag, 1970.

[5] REYSSAT, E. *Quelques aspects des surfaces de Riemann.* Progress in Mathematics *77.* Birkhäuser, 1989.

(Reçu le 3 mars 2005)

Henry de Thélin

Université Paris-Sud (Paris 11)
Mathématique, Bât. 425
F-91405 Orsay
France
e-mail : Henry.De-Thelin@math.u-psud.fr

Leere Seite
Blank page
Page vide